А. Киселевъ.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА.

Уч. Ком. М. Н. Пр. допущена въ качествѣ **руководства** для гимназій, мужскихъ и женскихъ, и реальныхъ училищъ („Журн. М. Н. Пр“, 1913 апрѣл). **Рекомендована** Учебн. Ком. при Св. Синодѣ для употребленія въ духовныхъ семинаріяхъ въ качествѣ учебнаго пособія „Церк. Вѣд.“, 1893, № 32); **одобрена** Деп. Торг. и Мануф., какъ пособіе для коммерческихъ училищъ (отъ 30 мая 1898 г.).

Для кадетскихъ корпусовъ **рекомендована**, какъ **руководство.**

Изданіе двадцать седьмое.



МОСКВА.
Типографія Т-ва Рябушинскихъ, Страстн. бул., д. П. П. Рябушинскаго.
1915.

Предисловіе къ 23-му изданію.

Настоящее изданіе является значительно переработаннымъ сравнительно съ предыдущими. Существенному измѣненію подверглось прежде всего изложеніе отрицательныхъ и положительныхъ чиселъ, а также чиселъ несоизмѣримыхъ.

Прежняя, искусственно введенная, условность въ изложеніи чиселъ отрицательныхъ теперь устранена; въ настоящемъ изданіи числа эти разсматриваются конкретно, какъ символы для выраженія величинъ, имѣющихъ «направленіе», т.-е. такихъ величинъ, которыя могутъ быть понимаемы въ двухъ противоположныхъ смыслахъ. Хотя въ такомъ видѣ изложеніе теряетъ ту краткость, которую оно имѣло прежде, но зато оно въ значительной степени выигрываетъ въ ясности и въ легкости усвоенія, да и потеря въ краткости отчасти вознаграждается тѣми сокращеніями въ дальнѣйшемъ курсѣ (при изложеніи первыхъ четырехъ алгебраическихъ дѣйствій и изслѣдованія уравненій), какія возможно было ввести благодаря болѣе подробному изложенію отрицательныхъ чиселъ.

О несоизмѣримыхъ числахъ въ прежнихъ изданіяхъ давалось понятіе, какъ о предѣлѣ нѣкотораго ряда соизмѣримыхъ чиселъ. Такое изложеніе страдало прежде всего логическимъ недостаткомъ, извѣстнымъ подъ названіемъ «заколдованнаго круга» (circulus vitiosus), такъ какъ несоизмѣримое число опредѣлялось при помощи предѣла, тогда какъ понятіе о числовомъ предѣлѣ уже предполагаетъ предварительное установленіе понятія о несоизмѣримомъ числѣ и о разности между несоизмѣримымъ числомъ и соизмѣримымъ. Въ настоящемъ изданіи понятіе о несоизмѣримыхъ числахъ и о дѣйствіяхъ надъ ними устанавливается независимо отъ понятія о предѣлѣ. Конечно, въ среднихъ классахъ гимназій (и другихъ соотвѣтствующихъ учебныхъ заведеній) нѣтъ возможности дать вполнѣ строгую теорію неизмѣримыхъ чиселъ. Однако можно и должно требовать, чтобы то элементарное понятіе, которое сообщается учащимся въ этихъ классахъ о несоизмѣримыхъ числахъ, не находилось бы въ противорѣчіи съ научной теоріей ихъ. Это мы и стремились выполнить въ настоящемъ изданіи алгебры.

Съ цѣлью удовлетворить запросы наиболѣе пытливыхъ учениковъ, особенно тѣхъ изъ нихъ, которые предполагаютъ продолжить свое математическое образованіе въ высшемъ учебномъ заведеніи, мы сочли полезнымъ помѣстить въ концѣ книги, въ видѣ особаго приложенія, болѣе строгое и подробное изложеніе теоріи несоизмѣримыхъ чиселъ, именно теоріи, установленной Дедекиндомъ; теорія эта представляется намъ болѣе доступной пониманію учащихся, чѣмъ теоріи Мере-Кантора, Вейерштрасса и др.

Изложеніе какъ чиселъ отрицательныхъ, такъ и несоизмѣримыхъ ведется нами все время при помощи графическаго представленія чиселъ на числовой прямой, и, слѣдовательно, иллюстрируется соотвѣтствующими наглядными чертежами.

Все вообще изложеніе элементарной алгебры было подвергнуто нами тщательному пересмотру съ цѣлью вездѣ, гдѣ возможно, улучшить изложеніе какъ со стороны его простоты, ясности и убѣдительности, такъ и со стороны отдѣлки словесной формы. Укажемъ, напр., на улучшеніе изложенія свойствъ равенствъ и уравненій (§§ 106, 108, 110), изслѣдованія уравненій 1-й степени (§§ 140—148), основныхъ свойствъ извлеченія корней (§§ 162—165), главнѣйшихъ свойствъ неравенствъ (§§ 259—263).

Изъ предисловія къ 25-му изданію.

Задача, иллюстрирующая умноженіе алгебраическихъ чиселъ (о желѣзнодорожномъ поѣздѣ), помѣщавшаяся прежде мелкимъ шрифтомъ въ концѣ главы объ умноженіи (§ 33), теперь отнесена къ самому началу этой главы (§ 29) и помѣщена въ обыкновенномъ шрифтѣ; при такомъ порядкѣ изложенія, прежде установленія правилъ умноженія положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ, учащимся дается конкретное представленіе о пользѣ этихъ правилъ; отъ этого, конечно, изложеніе становится болѣе понятнымъ.

Теорема о дѣлимости многочлена, цѣлаго относительно x, на разность $x-a$ (§ 76) теперь доказывается иначе, помощью разсмотрѣнія самаго процесса дѣленія. Прежнее доказательство, подкупавшее своей простотой, оказывается не вполнѣ строгимъ (о чемъ теперь сдѣлано замѣчаніе въ выноскѣ).

Упрощено изложеніе основныхъ теоремъ о равносильности уравненій (§§ 108 и 110). Упрощеніе достигнуто тѣмъ, что теперь въ текстѣ самихъ теоремъ говорится только о прибавленіи къ частямъ уравненія одного и того же *числа* и объ умноженіи частей уравненія на одно и то же *число* (отличное отъ нуля), тогда какъ прежде добавлялось еще о прибавленіи *алгебраическаго выраженія* и объ умноженіи на *алгебраическое выраженіе*, при чемъ это выраженіе могло содержать въ себѣ неизвѣстныя, или не содержать ихъ. Теперь это добавленіе разсмотрѣно особо, болѣе обстоятельно, въ замѣчаніяхъ къ теоремамъ.

§ 146, озаглавленный «Кажущаяся неопредѣленность», передѣланъ теперь заново. Въ прежнемъ изложеніи возможность сокращать члены дроби на общаго множителя, обращающагося въ 0 при частныхъ значеніяхъ буквъ, допускалась безъ всякихъ оговорокъ, какъ сама собою очевидная; въ этомъ заключалась, конечно, ошибка, такъ какъ сокращеніе на 0 невозможно. Теперь вопросъ разобранъ болѣе обстоятельно (на сколько это возможно въ курсѣ элементарной алгебры).

Изложеніе § 224 («Значеніе общихъ формулъ корней квадратнаго уравненія при $a=0$») нѣсколько измѣнено въ зависимости отъ измѣненнаго изложенія «Кажущейся неопредѣленности».

Двѣ основныя теоремы о равносильности неравенствъ, содержащихъ неизвѣстныя (§§ 261 и 262), изложены теперь иначе, въ соотвѣтствіи съ измѣненнымъ изложеніемъ подобныхъ теоремъ о равносильности уравненій (§§ 108 и 110).

Упрощено изложеніе «Нѣкоторыхъ свойствъ логариѳмовъ» (§ 299), такъ какъ теперь разсматривается только тотъ случай, когда основаніе логариѳмовъ больше 1, тогда какъ прежде разсматривался и случай, когда это основаніе меньше 1. Теперь послѣдній случай отнесенъ къ мелкому шрифту.

Предисловіе къ 27-му изданію.

Изъ особенностей этого изданія укажемъ (въ порядкѣ слѣдованія параграфовъ) слѣдующія:

§§ 43 и 44. Измѣнено, согласно замѣчанію Уч. Ком. Мин. Нар. Пр., опредѣленіе одночлена.

§ 97. Обратная теорема («Если произведеніе двухъ чиселъ равно произведенію двухъ другихъ чиселъ, то...») изложена болѣе подробно и вразумительно.

§ 114. Нѣсколько дополнено (обобщено) изложеніе объ уравненіяхъ, содержащихъ въ знаменателяхъ неизвѣстныя.

§ 220. Рѣшеніе примѣра 5-го (найти значеніе дроби, обращающейся въ $^0/_0$) изложено въ бо́льшемъ соотвѣтствіи съ § 146 («Кажущаяся неопредѣленность»).

§ 224 («Значеніе общихъ формулъ корней квадратнаго уравненія при $a=0$») изложенъ болѣе обстоятельно, при чемъ этотъ параграфъ разбитъ на два: 224 и 224, a.

Въ § 235 («Общій способъ освобожденія уравненія отъ знаковъ радикала») взятъ другой примѣръ, болѣе удобный, чѣмъ прежде, и кромѣ того (согласно замѣчанію прив. доц. *С. О. Шатуновскаго*, помѣщенному въ № 607 «Вѣстника опытной физики и элементарной математики») сдѣлано одно важное дополненіе и приведенъ новый примѣръ.

Въ § 236 («Приведеніе знаменателя дроби къ раціональному виду») взятъ иной примѣръ въ соотвѣтствіи съ примѣромъ § 235.

§ 238. («Преобразованіе сложнаго радикала»). Излагавшаяся прежде лемма о равенствѣ: $a+\sqrt{b}=a_1+\sqrt{b_1}$ теперь выпущена, вслѣдствіе чего изложеніе нѣсколько упрощено и сокращено.

Въ § 310 («По данному числу найти логариѳмъ») нѣсколько измѣнено объясненіе нахожденія $\text{Log}\,74{,}2354$ и добавлено (мелкимъ шрифтомъ) обобщеніе пріема нахожденія на общій случай $\text{Log}(n+h)$.

Добавлены (мелкимъ шрифтомъ): § 311, a («Предѣлъ погрѣшности приближеннаго логариѳма») и 311, b («Случай, когда данное число неточное»).

Въ § 312 нѣсколько измѣнено объясненіе нахожденія числа по данному логариѳму 2,59449 и добавлено (мелкимъ шрифтомъ) обобщеніе пріема на какой угодно 5-тизначный логариѳмъ.

Добавленъ (мелкимъ шрифтомъ) § 313, *a*. («Предѣлъ погрѣшности числа, найденнаго по данному логариѳму»).

Въ § 316 примѣръ 1-й (на вычисленіе помощью логариѳмовъ) взятъ иной, болѣе удобный, при чемъ добавленъ § 316, *a* (мелкимъ шрифтомъ), въ которомъ находится предѣлъ погрѣшности числа, найденнаго въ примѣрѣ 1-мъ. Примѣры 2-й и 3-й оставлены прежніе, но сдѣланы къ нимъ добавленія (мелк. шр.) о предѣлѣ погрѣшности.

Къ § 347 добавлена выноска, въ которой объяснено, почему число π, заключающееся между двумя данными конечными десятичными дробями, будучи развернуто въ непрерывную дробь, должно сохранить всѣ частныя, общія этимъ десятичнымъ дробямъ, также развернутымъ въ непрерывныя дроби.

Прежнее «Приложеніе 2» (въ концѣ книги, о предѣлѣ погрѣшности, совершаемой при вычисленіи помощью пятизначныхъ логариѳмовъ) теперь выпущено, такъ какъ содержаніе этого приложенія (въ нѣсколько упрощенномъ видѣ) отнесено теперь частью къ § 311, *a*, частью къ § 313, *a*. Взамѣнъ того теперь помѣщено новое «Приложеніе 2», въ которомъ излагается нахожденіе верхняго предѣла погрѣшности, совершаемой вслѣдствіе допущенія пропорціональности разностей между логариѳмами разностямъ соотвѣтствующихъ чиселъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Передъ главами, напечатанными мелкимъ шрифтомъ, поставлена звѣздочка.

ОТДѢЛЪ I.

Предварительныя понятія.

ГЛАВА I.

Алгебраическое знакоположеніе.

1. Употребленіе буквъ. 1°. Для обобщенія задачъ. Если желаютъ указать, какъ рѣшаются задачи, сходныя между собою по условіямъ, но различающіяся только величиною данныхъ чиселъ, то обыкновенно поступаютъ такъ: обозначаютъ данныя числа буквами (латинскаго или французскаго алфавита [1]) и, разсуждая совершенно такъ, какъ если бы данныя были выражены числами, указываютъ посредствомъ знаковъ, какія дѣйствія надо произвести надъ данными числами и въ какой послѣдовательности, чтобы получить искомое число. При этомъ, обозначивъ одно число какою-нибудь буквою, другія числа обозначаютъ иными буквами, чтобы не смѣшать одного числа съ другимъ.

Пусть, напр., мы желаемъ узнать, какъ рѣшаются задачи, сходныя съ такой: 15 рабочихъ окончили нѣкоторую работу въ 20 дней. Во сколько дней окончили бы ту же работу 10 человѣкъ? Для этого предлагаемъ задачу въ общемъ видѣ:

a рабочихъ окончили нѣкоторую работу въ t дней. Во сколько дней окончатъ ту же работу b рабочихъ?

Рѣшимъ эту задачу приведеніемъ къ единицѣ. Если a рабочихъ оканчиваютъ работу въ t дней, то 1 рабочему на выполненіе

[1]) Употребительны также и буквы греческаго алфавита, чаще всего слѣдующія: α (альфа), β (бэта), γ (гамма), δ (дельта), ε (эпсилонъ), θ (тэта), π (пи), ρ (ро), φ (фи), ω (омега).

той же работы понадобится $t\times a$ дней, а b рабочимъ $\frac{t\times a}{b}$ дней. Обозначивъ искомое число дней буквою x, можемъ написать:

$$x=\frac{t\times a}{b}.$$

Равенство это наз. алгебраическою формулою; оно выражаетъ, что искомое число x получится, если число дней умножить на число рабочихъ, данное въ условіи задачи, и раздѣлить на число рабочихъ, данное въ ея вопросѣ.

2⁰. Для выраженія свойствъ чиселъ. Если желаемъ кратко выразить, что нѣкоторое свойство принадлежитъ не какимъ-нибудь отдѣльнымъ числамъ, а всѣмъ числамъ, или группѣ чиселъ, то обыкновенно числа эти обозначаютъ буквами. Такъ, свойство, что произведеніе двухъ чиселъ не измѣняется отъ перемѣны порядка сомножителей, можно выразить равенствомъ:

$$a\times b=b\times a.$$

Это равенство есть алгебраическая формула, выражающая, что произведеніе какого-нибудь числа a на другое какое-нибудь число b равно произведенію этого другого числа b на первое число a.

2. Алгебраическое выраженіе. Формула. Совокупность чиселъ, изъ которыхъ всѣ или только нѣкоторыя выражены буквами и которыя соединены посредствомъ знаковъ, указывающихъ, какія дѣйствія и въ какой послѣдовательности надо произвести надъ этими числами, называется алгебраическимъ выраженіемъ (или просто **выраженіямъ**).

Таковы, напр., выраженія:

$$\frac{t\times a}{b};\qquad a\times b;\qquad 2\,.\,a+5.$$

Вычислить алгебраическое выраженіе для данныхъ численныхъ значеній буквъ значитъ подставить въ него на мѣсто буквъ эти значенія и произвести указанныя дѣйствія; число, получившееся послѣ этого, наз. численною величиною алгебраическаго выраженія (для данныхъ значеній буквъ).

Такъ, численная величина перваго изъ указанныхъ выше выраженій при $t=20$, $a=15$ и $b=10$ есть 30.

Два алгебраическія выраженія, соединенныя между собою знакомъ равенства или неравенства, образуютъ алгебраическую формулу; напр.:

$$a\times b=b\times a;\quad a+1>a.$$

3. Тождественныя выраженія. Два алгебраическія выраженія, наз. т о ж д е с т в е н н ы м и, если при всякихъ численныхъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ эти выраженія, они имѣютъ одну и ту же численную величину. Таковы, напр., выраженія:

$$\frac{t\times a}{b} \text{ и } t\times\frac{a}{b};\quad a\times b \text{ и } b\times a.$$

4. Предметъ алгебры. Алгебра указываетъ различные способы, посредствомъ которыхъ одно алгебраическое выраженіе можетъ быть преобразовано въ другое, тождественное ему. Цѣль такого преобразованія можетъ быть различна:

или 1) упрощеніе алгебраическаго выраженія, т.-е. замѣна одного выраженія другимъ, содержащимъ меньшее число дѣйствій, или болѣе простыя дѣйствія;

или 2) приведеніе алгебраическаго выраженія къ виду, удобному для обнаруженія какихъ-либо свойствъ его;

или 3) приведеніе алгебраическаго выраженія къ виду, удобному для запоминанія.

О другихъ сторонахъ алгебры будетъ сказано впослѣдствіи (§ 105).

5. Дѣйствія, разсматриваемыя въ алгебрѣ, слѣдующія: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень и извлеченіе корня. Опредѣленія первыхъ пяти дѣйствій извѣстны изъ ариѳметики, а именно:

С л о ж е н і е есть дѣйствіе, посредствомъ котораго нѣсколько данныхъ чиселъ соединяются въ одно число, называемое ихъ суммой.

В ы ч и т а н і е есть дѣйствіе (обратное сложенію), посредствомъ котораго по данной суммѣ (уменьшаемому) и одному

слагаемому (вычитаемому) отыскивается другое слагаемое (остатокъ или разность).

Умноженіе на цѣлое число есть дѣйствіе, посредствомъ котораго одно данное число (множимое) повторяется слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ въ другомъ данномъ числѣ (во множителѣ); умноженіе на дробь есть дѣйствіе, посредствомъ котораго отыскивается такая дробь множимаго, какую множитель составляетъ отъ единицы.

Дѣленіе есть дѣйствіе (обратное умноженію), посредствомъ котораго по данному произведенію (дѣлимому) и одному сомножителю (дѣлителю) отыскивается другой сомножитель (частное).

Возвышеніе въ степень есть дѣйствіе, посредствомъ котораго находится произведеніе нѣсколькихъ одинаковыхъ сомножителей; такое произведеніе называется степенью, а число одинаковыхъ сомножителей—показателемъ степени. Такъ, возвысить 2 въ четвертую степень значитъ найти произведеніе 2 . 2 . 2 . 2 (оно равно 16); 16 есть четвертая степень двухъ, 4—показатель этой степени. Вторая степень называется иначе квадратомъ, третья—кубомъ.

Первою степенью числа называютъ само это число.

Шестое дѣйствіе—извлеченіе корня—опредѣляется такъ:

Извлеченіе корня есть дѣйствіе (обратное возвышенію въ степень), посредствомъ котораго по данной степени и показателю этой степени находится возвышаемое число. Напримѣръ, извлечь изъ 8 корень третьей степени значитъ найти число, котораго 3-я степень равняется 8; такое число есть 2, потому что 2 . 2 . 2=8; корень второй степени изъ 100 есть 10, потому что 10 . 10=100. Корень второй степени называется иначе квадратнымъ, а корень третьей степени—кубичнымъ.

6. Знаки, употребляемые въ алгебрѣ. 1°. Для обозначенія дѣйствій. Въ алгебрѣ для обозначенія первыхъ четырехъ дѣйствій употребляются тѣ же знаки, какъ

и въ ариѳметикѣ; только знакъ умноженія обыкновенно не пишется, если оба сомножителя или одинъ изъ нихъ выражены буквами; напр., вмѣсто того, чтобы писать $a \times b$ или $a \,.\, b$, обыкновенно пишутъ ab и вмѣсто $3 \,.\, a$ просто $3a$.

Возвышеніе въ степень обозначается помѣщеніемъ показателя степени надъ возвышаемымъ числомъ, съ правой стороны; напр., 2^4 обозначаетъ, что 2 возвышается въ 4-ю степень.

При всякомъ числѣ можно подразумѣвать показателя 1; напр., a все равно, что a^1, потому что первая степень какого-нибудь числа, по опредѣленію, есть само это число.

Извлеченіе корня обозначается знакомъ $\sqrt{}$; подъ его горизонтальной чертой пишутъ то число, изъ котораго надо извлечь корень, а надъ отверстіемъ угла ставятъ показателя корня; напр., $\sqrt[3]{8}$ означаетъ корень 3-й степени изъ 8.

Квадратный корень принято писать безъ показателя, т.-е. такъ: $\sqrt{25}$, $\sqrt{100}$ и т. д.

2°. Для указанія равенства или неравенства чиселъ. Какъ знаки соотношеній между численными величинами употребляются: знакъ равенства $=$ и знакъ неравенства $>$, обращаемый отверстіемъ угла къ бо́льшему числу. Напр., выраженія:

$$5+2=7, \quad 5+2>6; \quad 5+2<10$$

читаются такъ: 5+2 равно 7, 5+2 больше 6; 5+2 меньше 10.

Иногда помѣщаютъ два знака другъ подъ другомъ; напр., выраженія:

$$1)\ a \geqq b, \quad 2)\ a \gtrless b; \quad 3)\ a \pm b$$

означаютъ: 1) a больше или равно b; 2) a больше или меньше b; 3) a плюсъ или минусъ b.

Употребительны еще знаки $\neq$, $\not>$, $\not<$, получаемые перечеркиваніемъ знаковъ равенства или неравенства. Такое перечеркиваніе означаетъ отрицаніе того значенія, которое придается знаку неперечеркнутому. Такъ, знакъ $\neq$ означаетъ: «не равно», знакъ $\not<$ означаетъ «не больше» и т. п.

3⁰. Для указанія порядка дѣйствій. Если желаютъ выразить, что, совершивъ какое-либо дѣйствіе, надо надъ полученнымъ результатомъ произвести снова какое-либо дѣйствіе, то обозначеніе перваго дѣйствія заключаютъ въ скобки. Напр., выраженіе:

$$20-(10+2)$$

означаетъ, что изъ 20 вычитается не 10, а сумма отъ сложенія 10 съ 2; слѣд., при вычисленіи этого выраженія надо сначала сложить 10 и 2 (получимъ 12) и затѣмъ полученную сумму вычесть изъ 20 (получимъ 8).

Когда приходится заключить въ скобки такое выраженіе, въ которомъ есть свои скобки, то новымъ скобкамъ придаютъ какую-нибудь другую форму для отличія ихъ отъ прежнихъ. Напримѣръ, выраженіе:

$$a\{b-[c+(d-e)]\}$$

означаетъ, что изъ d вычитается e, полученная разность прикладывается къ c, полученная сумма вычитается изъ b и на эту разность умножается a.

Скобки такой формы: ( ) обыкновенно назыв. малыми, такой: [ ] — прямыми и такой: { } — фигурными.

7. Нѣкоторыя замѣчанія относительно употребленія скобокъ. 1⁰. Такъ какъ употребленіе скобокъ имѣетъ цѣлью указать, въ какомъ порядкѣ надо производить дѣйствія надъ числами, то скобки отбрасываются во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда и безъ нихъ не можетъ быть въ этомъ отношеніи недоразумѣнія. Напр., скобки не ставятся при обозначеніи послѣдовательныхъ сложеній, вычитаній, умноженій; такъ:

вмѣсто	$[(a+b)+c]+d$	пишутъ	$a+b+c+d$
»	$[(a-b)+c]-d$	»	$a-b+c-d$
»	$[(ab)c]d$	»	$abcd$.

Въ этихъ случаяхъ порядокъ дѣйствій указывается самимъ выраженіемъ (слѣва направо).

2⁰. Горизонтальная черта, употребляемая для обозначенія

дѣленія или для извлеченія корня, замѣняетъ собою скобки; такъ выраженія:

$$\frac{a+b}{c} \text{ и } \sqrt{a^2+b^2}$$

означаютъ то же самое, что и выраженія:

$$\frac{(a+b)}{c} \text{ и } \sqrt{(a^2+b^2)}$$

(если только черта берется достаточной длины).

3⁰. Кромѣ того, чтобы уменьшить число случаевъ, когда надо писать скобки, условились держаться слѣдующаго правила.

Правило. Алгебраическое выраженіе пишутъ безъ скобокъ, если при его вычисленіи дѣйствія должны слѣдовать въ такомъ порядкѣ: сначала возвышеніе въ степень и извлеченіе корня (конечно, если эти дѣйствія указаны), затѣмъ умноженіе и дѣленіе, и, наконецъ, сложеніе и вычитаніе.

Если же нужно указать иную послѣдовательность дѣйствій, или если примѣненіе указаннаго правила возбуждаетъ какія-либо сомнѣнія, то пользуются скобками.

Напр., въ такомъ выраженіи, написанномъ безъ скобокъ:

$$ab^2+c$$

указаны 3 дѣйствія: умноженіе, возвышеніе въ степень и сложеніе. Согласно правилу эти дѣйствія должны быть произведены въ такой послѣдовательности: сначала возвышеніе въ степень, потомъ умноженіе и послѣ сложеніе. Итакъ, надо сначала возвысить въ квадратъ; но что возвысить: только ли число b, или произведеніе ab? Конечно, только число b, такъ какъ если бы требовалось возвысить въ квадратъ произведеніе ab, то сначала надо было бы сдѣлать умноженіе (a на b), а затѣмъ возвышеніе въ квадратъ, т.-е. надо было бы совершить дѣйствія въ порядкѣ иномъ, чѣмъ указано въ правилѣ, и тогда нужно было бы поставить скобки, именно такъ: $(ab)^2$. Послѣ возвышенія b въ квадратъ надо перейти къ умноженію. Но что умножать: a на b^2, или a на сумму b^2+c. Конечно, a на b^2, такъ какъ если бы требовалось умножить a на сумму b^2+c, то сначала надо было бы сдѣлать

сложеніе чиселъ b^2 и c, а затѣмъ уже умноженіе, т.-е. тогда дѣйствія должны были совершаться въ порядкѣ иномъ, чѣмъ указано въ правилѣ, и, слѣд., нужно было бы поставить скобки, а именно, написать такъ: $a(b^2+c)$.

Если дано выраженіе $a:bc$, въ которомъ только два дѣйствія: дѣленіе и умноженіе, то остается невыясненнымъ, какое изъ этихъ дѣйствій должно быть выполнено сначала (такъ какъ въ указанномъ выше правилѣ объ этомъ ничего не говорится); для избѣжанія недоразумѣній въ подобныхъ случаяхъ лучше ставить скобки; если мы напишемъ такъ $a:(bc)$, то сначала надо b умножить на c, а затѣмъ раздѣлить a на произведеніе bc; если же скобки поставимъ такимъ образомъ: $(a:b)c$, то прежде придется раздѣлить a на b, а затѣмъ это частное умножить на c.

Впрочемъ, выраженіе $a:bc$, написанное безъ скобокъ, принято понимать въ смыслѣ $a:(bc)$, т.-е. что надо сдѣлать сначала умноженіе, а потомъ дѣленіе.

ГЛАВА II.

Главнѣйшія свойства первыхъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій.

8. Свойства прямыхъ дѣйствій: сложенія и умноженія. Изъ свойствъ этихъ дѣйствій укажемъ слѣдующія:

1⁰. Сумма не измѣняется отъ перемѣны порядка слагаемыхъ.

Напр., сумма 7+3+2 равна 12; если измѣнимъ какъ бы то ни было порядокъ слагаемыхъ, напр., такъ: 3+2+7, то получимъ все ту же сумму 12.

Свойство это въ примѣненіи къ тремъ слагаемымъ можно выразить такою буквенною формулой (обозначая буквами a, b и c какія-нибудь три числа):

$$a+b+c=a+c+b=b+a+c=b+c+a=\ldots$$

Это свойство носитъ названіе **перемѣстительнаго,** такъ какъ оно состоитъ въ неизмѣняемости суммы отъ перемѣщенія слагаемыхъ.

2⁰. Сумма не измѣнится, если какія-либо слагаемыя мы замѣнимъ ихъ суммою.

Напр., сумма $12+3+7$, равная 22, не измѣнится, если въ ней какія-нибудь слагаемыя, напр., второе и третье, замѣнимъ ихъ суммой: $12+(3+7)=12+10=22$.

Свойство это называется **сочетательнымъ,** такъ какъ оно состоитъ въ томъ, что нѣсколько слагаемыхъ, не измѣняя суммы, мы можемъ *сочетать* (соединять въ одно число).

Замѣтимъ, что заключеніе въ скобки нѣсколькихъ слагаемыхъ, **начиная съ перваго,** нисколько не измѣняетъ смысла выраженія; такъ, $(12+3)+7$ означаетъ совершенно то же, что и $12+3+7$, а именно, что къ 12 прибавляется 3 и затѣмъ къ полученной суммѣ прикладывается 7.

Въ примѣненіи къ тремъ слагаемымъ сочетательное свойство можно выразить такой формулой:

$$a+b+c=a+(b+c).$$

Читая это равенство справа налѣво, т.-е. такъ: $a+(b+c)=$ $=a+b+c$, мы можемъ высказать то же сочетательное свойство въ другой словесной формѣ:

чтобы къ какому-нибудь числу прибавить сумму, достаточно прибавить къ этому числу каждое слагаемое суммы одно за другимъ.

Изъ сочетательнаго свойства слѣдуетъ: *чтобы вычислить сумму нѣсколькихъ слагаемыхъ, можно разбить эти слагаемыя на какія угодно группы, произвести сложеніе въ каждой группѣ отдѣльно и затѣмъ полученныя суммы соединить въ одну.*

3°. Произведеніе не измѣняется отъ перемѣны порядка сомножителей.

Такъ: $2 \cdot \frac{5}{7} \cdot 3=3 \cdot 2 \cdot \frac{5}{7}=\frac{5}{7} \cdot 3 \cdot 2=\dots$

Вообще: $abc=acb=cab=\dots$

Это **перемѣстительное свойство** умноженія доказано въ ариѳметикѣ сначала для цѣлыхъ чиселъ, а затѣмъ и для дробей.

4°. Произведеніе не измѣнится, если какихъ-либо сомножителей мы замѣнимъ ихъ произведеніемъ.

Напр., произведеніе 7 . 2 . 5, равное 70, останется безъ измѣненія, если сомножителей 2 и 5 замѣнимъ ихъ произведеніемъ: 7 . (2 . 5)=7 . 10=70.

Замѣтимъ и тутъ, что выраженія (7 . 2) . 5 и 7 . 2 . 5 означаютъ **одно и то же,** а именно, что 7 умножается на 2 и затѣмъ полученное произведеніе умножается на 5.

Въ примѣненіи къ произведенію трехъ сомножителей **сочетательное** свойство умноженія можно выразить такимъ равенствомъ:

$$abc=a(bc).$$

Читая это равенство справа налѣво, мы можемъ то же сочетательное свойство выразить иначе:

чтобы умножить какое-нибудь число (a) на произведеніе (bc), достаточно умножить это число на перваго сомножителя (получимъ ab), результатъ умножить на второго сомножителя (получимъ abc) и т. д.

Изъ сочетательнаго свойства умноженія слѣдуетъ: чтобы вычислить произведеніе нѣсколькихъ сомножителей, можно разбить этихъ сомножителей на какія угодно группы, произвести умноженіе въ каждой группѣ отдѣльно и полученныя произведенія перемножить.

5^0. **Чтобы умножить сумму на какое-нибудь число, достаточно умножить на это число каждое слагаемое отдѣльно и полученныя произведенія сложить.**

Такъ, чтобы умножить сумму 300+20+5 (т.-е. число 325) на 8, достаточно умножить на 8 отдѣльно 300, 20 и 5 и полученныя числа сложить.

Это свойство произведенія называется **распредѣлительнымъ,** такъ какъ оно состоитъ въ томъ, что дѣйствіе умноженія, производимое надъ суммой, распредѣляется на каждое слагаемое.

Въ примѣненіи къ суммѣ 2-хъ слагаемыхъ это свойство можно выразить такой формулой:

$$(a+b)c=ac+bc.$$

Такъ какъ произведеніе не мѣняется отъ перемѣны порядка сомножителей, то формулу эту можно писать и такъ:

$$c(a+b)=ca+cb.$$

Поэтому распредѣлительное свойство иногда высказываютъ такъ:

чтобы умножить какое-нибудь число на сумму, достаточно умножить это число на каждое слагаемое отдѣльно и полученныя произведенія сложить.

9. Свойства обратныхъ дѣйствій: вычитанія и дѣленія. Изъ свойствъ, принадлежащихъ обратнымъ дѣйствіямъ, т.-е. вычитанію и дѣленію, укажемъ слѣдующія:

1⁰. **Чтобы отнять отъ какого-нибудь числа сумму, достаточно отнять отъ этого числа каждое слагаемое одно за другимъ.**

Такъ: $20-(3+8+2)=20-3-8-2.$

Вообще: $a+(b+c+d)=a-b-c-d.$

Это свойство можно считать очевиднымъ.

2⁰. **Чтобы прибавить къ какому-нибудь числу разность, достаточно прибавить къ этому числу уменьшаемое и вычесть вычитаемое.**

Такъ: $8+(5-3)=8+5-3.$

Вообще: $a+(b-c)=a+b-c.$

Дѣйствительно, если второе слагаемое увеличимъ на c, т.-е. вмѣсто $b-c$ возьмемъ b, то получимъ сумму $a+b$; но отъ увеличенія слагаемаго на c сумма увеличивается также на c; слѣд., искомая сумма должна быть меньше $a+b$ на c, т.-е. она будетъ $a+b-c$

3⁰. **Чтобы отнять отъ какого-нибудь числа разность, достаточно прибавить къ этому числу вычитаемое и затѣмъ отнять уменьшаемое.**

Такъ: $4-(5-2)=4+2-5.$

Вообще: $a-(b-c)=a+c-b.$

Дѣйствительно, если мы увеличимъ уменьшаемое и вычитаемое на c, то разность не измѣнится; но тогда уменьшаемое будетъ $a+c$, а вычитаемое b; слѣд., разность будетъ $a+c-b$.

4^0. **Чтобы раздѣлить какое-нибудь число на произведеніе, достаточно раздѣлить это число на перваго сомножителя, полученный результатъ на второго, потомъ на третьяго и т. д.**

Такъ: $400:(4\ .\ 2\ .\ 5)=[(400:4):2]:5=(100:2):5=50:5=10$.

5^0. **Чтобы раздѣлить произведеніе на какое-нибудь число, достаточно раздѣлить на это число какого-либо одного сомножителя.**

Такъ, чтобы раздѣлить произведеніе $10\ .\ 8$ на 2, достаточно раздѣлить на 2 или 10, или 8; въ первомъ случаѣ получимъ $5\ .\ 8=40$ и во второмъ случаѣ $10\ .\ 4=40$.

10. Примѣненія этихъ свойствъ. Указанныя свойства позволяютъ дѣлать нѣкоторыя простѣйшія преобразованія алгебраическихъ выраженій; приведемъ этому примѣры.

Примѣры.

1) $a+b+a+2+b+a+8=(a+a+a)+(b+b)+(2+8)=$
$=a\ .\ 3+b\ .\ 2+10=3a+2b+10$.

2) $a+(b+a)=a+b+a=(a+a)+b=2a+b$.

3) $a\ .\ (3xxa)\ .\ (4ay)=a\ .\ 3\ .\ x\ .\ x\ .\ a\ .\ 4\ .\ a\ .\ y=(3\ .\ 4)(aaa)(xx)y$
$=12a^3x^2y$.

4) $a^3a^2=(aaa)(aa)=aaaaa=a^5$.

5) $(a+x+1)\ .\ 3=a\ .\ 3+x\ .\ 3+3=3a+3x+3$.

6) $x(ax^2+x)=x(ax^2)+xx=xaxx+xx=a(xxx)+xx=ax^3+x^2$.

7) $m+(a-m)=m+a-m=a+m-m=a$.

8) $p-(q-p)=p+p-q=2p-q$.

9) $\frac{9ab}{3}=\frac{9}{3}ab=3ab$.

ГЛАВА III.

Положительныя и отрицательныя числа.

(Алгебраическія или относительныя числа).

11. Предварительное замѣчаніе. Въ началѣ курса ариѳметики мы разсматривали число только, какъ собраніе единицъ; въ этомъ смыслѣ число представляется всегда цѣлымъ. Мы видѣли тогда, что для этихъ чиселъ два обрат-

ныя дѣйствія—вычитаніе и дѣленіе—не всегда возможны, а именно: первое невозможно, когда вычитаемое больше уменьшаемаго (напр., нельзя вычесть 7 изъ 5), а второе невозможно когда дѣлимое не кратно дѣлителя (напр., невозможно раздѣлить 12 на 5, или 3 на 7). Перейдя затѣмъ въ ариѳметикѣ къ другому понятію о числѣ, какъ о результатѣ измѣренія величинъ, мы должны были расширить область чиселъ, введя понятіе о дробномъ числѣ. Это расширеніе дало намъ возможность выражать числами и такія значенія величинъ, въ которыхъ единица измѣренія не повторяется цѣлое число разъ, или которыя меньше этой единицы. При этомъ, между прочимъ, оказалось, что съ введеніемъ въ ариѳметику дробныхъ чиселъ дѣйствіе дѣленія сдѣлалось возможнымъ и въ тѣхъ случаяхъ, когда дѣлимое не кратно дѣлителя (напр., частное 12 : 5 равно $2\frac{2}{5}$, частное 3 : 7 равно $\frac{3}{7}$ и т. д.). Однако, вычитаніе и для дробныхъ чиселъ осталось невозможнымъ въ томъ случаѣ, когда вычитаемое больше уменьшаемаго.

Теперь, переходя отъ ариѳметики къ алгебрѣ, мы прежде всего займемся дальнѣйшимъ расширеніемъ понятія о числѣ съ цѣлью имѣть возможность выражать посредствомъ чиселъ значенія величинъ особаго рода, о которыхъ мы будемъ говорить сейчасъ. Мы увидимъ при этомъ, что съ этимъ новымъ расширеніемъ понятія о числѣ дѣйствіе вычитанія сдѣлается возможнымъ во всѣхъ случаяхъ.

12. Понятіе о величинахъ, имѣющихъ направленіе. Приведемъ нѣсколько простыхъ задачъ, изъ которыхъ будетъ ясно видно, о какихъ величинахъ мы теперь будемъ говорить.

Задача 1. Извѣстно, что когда курьерскій поѣздъ Николаевской желѣзной дороги (соединяющей Москву съ Петербургомъ) находился на разстояніи 100 верстъ отъ станціи Бологое (эта станція лежитъ приблизительно посрединѣ между Москвой и Петербургомъ), тогда пассажирскій поѣздъ этой дороги былъ на разстояніи 50 верстъ

от Бологова. На какомъ разстояніи находились тогда эти два поѣзда другъ отъ друга?

Легко замѣтить, что въ такомъ видѣ задача эта представляется не вполнѣ опредѣленной: въ ней не сказано, находились ли поѣзда по одну сторону отъ Бологова, напр., въ сторону по направленію къ Петербургу, или же они были по разнымъ сторонамъ отъ Бологова. Если первое, то разстояніе между поѣздами было, очевидно, 100—50, т.-е. 50 верстъ, а если второе, то разстояніе было 100+50, т.-е. 150 верстъ. Значитъ, для того, чтобы эта задача была опредѣленною, не достаточно задать величину разстоянія отъ Бологова, но еще нужно указать, въ какомъ направленіи эти разстоянія надо считать отъ Бологова.

Мы имѣемъ здѣсь примѣръ величины, въ которой, кромѣ ея размѣра, можно разсматривать еще направленіе; это — разстояніе, считаемое по какой-нибудь линіи (напр., по желѣзной дорогѣ) отъ опредѣленнаго на ней мѣста (напр., отъ станціи Бологое). Разстояніе это можно считать и въ одномъ направленіи (напр., къ Москвѣ), и въ другомъ, противоположномъ (напр., къ Петербургу). Обыкновенныя (ариѳметическія) числа не достаточны для выраженія и размѣра, и направленія разстояній. Условимся въ подобныхъ случаяхъ поступать такъ

Назовемъ какое-нибудь одно изъ двухъ направленій Николаевской дороги (напр., направленіе отъ Петербурга къ Москвѣ) положительнымъ, а противоположное направленіе (отъ Москвы къ Петербургу) отрицательнымъ; сообразно этому разстоянія, считаемыя въ положительномъ направленіи, будемъ называть положительными разстояніями, а разстоянія, считаемыя въ отрицательномъ направленіи, будемъ называть отрицательными. Первыя будемъ выражать числами со знакомъ + (или вовсе безъ знака), а вторыя—числами со знакомъ —[1]). Такъ, если поѣздъ находится въ мѣстѣ, отстоящемъ на 100 верстъ отъ Бологова по направленію къ Москвѣ, то мы будемъ говорить, что его разстояніе отъ Бологова равно +100 вер. (или просто 100 вер.); если же поѣздъ находится, положимъ,

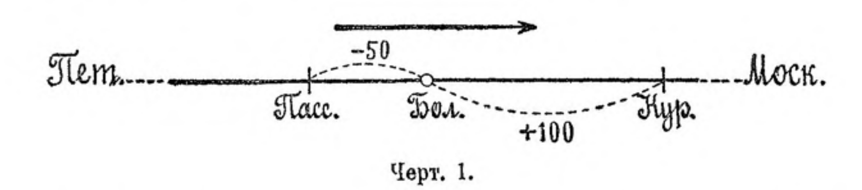
[1]) Можно было бы взять и какіе-нибудь другіе знаки, но знаки + и оказываются, какъ будетъ видно впослѣдствіи, очень удобными.

на 50 вер. отъ Бологова по направленію къ Петербургу, то мы скажемъ, что его разстояніе отъ Бологова равно —50 вер. Здѣсь знаки + и —, конечно, не означаютъ дѣйствій сложенія и вычитанія, а только служатъ условно для обозначенія направленій.

Выразимъ теперь нашу задачу такъ:

Извѣстно, что когда курьерскій поѣздъ Николаевской желѣзной дороги находился отъ Бологова на разстояніи +100 вер. (или просто 100 вер.), тогда пассажирскій поѣздъ этой дороги былъ отъ Бологова на разстояніи —50 вер. Какъ велико было тогда разстояніе между этими поѣздами?

Теперь задача выражена вполнѣ точно, и отвѣтъ на нее получается опредѣленный (см. черт. 1, на которомъ стрѣлка указываетъ положительное направленіе дороги): поѣзда находились на разстояніи 100+50, т.-е. 150 верстъ.



Черт. 1.

Задача 2. Термометръ въ полночь показывалъ 2 градуса, а въ полдень 5 градусовъ. На сколько градусовъ измѣнилась температура отъ полуночи до полудня?

И въ этой задачѣ условія выражены недостаточно полно; надо еще указать, 2 градуса тепла или 2 градуса холода показывалъ термометръ въ полночь, т.-е. вершина ртутнаго столбика въ термометрѣ была въ полночь на 2 дѣленія выше, или на 2 дѣленія ниже той черты, на которой стоитъ 0^0; подобныя же указанія должны быть сдѣланы и относительно температуры въ полдень. Если и въ полночь, и въ полдень термометръ указывалъ тепло, то температура за этотъ промежутокъ времени повысилась отъ 2 до 5 градусовъ, значитъ, она измѣнилась на 3 градуса; если же въ полночь термометръ указывалъ 2 градуса холода (ниже 0^0), а въ полдень 5 градусовъ тепла (выше 0^0), то температура повысилась на 2+5. т.-е. на 7

градусовъ. Могло случиться и такъ, что въ полночь температура была 2° холода и въ полдень 5° тоже холода (тогда температура не повысилась, а понизилась на 3 градуса), или такъ, что въ полночь температура была 2° тепла, а въ полдень 5° холода (тогда температура понизилась на 7 градусовъ).

Въ этой задачѣ тоже рѣчь идетъ о величинѣ, имѣющей направленіе: число градусовъ температуры можно отсчитывать вверхъ отъ нулевой черты термометра и внизъ отъ нея. Принято температуру выше 0° (тепло) считать положительной и обозначать числомъ градусовъ со знакомъ +, а температуру ниже 0° (холодъ) считать отрицательной и обозначать числомъ градусовъ со знакомъ — (не будетъ недоразумѣнія, если первое число брать совсѣмъ безъ знака). Напр., если говорятъ, что термометръ на воздухѣ показываетъ —2°, а въ комнатѣ +12° (или просто 12°), то мы понимаемъ, что въ первомъ случаѣ вершина ртутнаго столбика стоитъ ниже 0° на 2 дѣленія, а во второмъ случаѣ выше 0° на 12 дѣленій.

Выразимъ теперь нашу задачу такъ: термометръ въ полночь показывалъ —2°, а въ полдень +5°. На сколько градусовъ измѣнилась температура отъ полуночи до полудня?

Въ такомъ видѣ задача получаетъ вполнѣ опредѣленный отвѣтъ: температура повысилась на 2+5, т.-е. на 7 градусовъ.

Задача 3. Промежутокъ времени, отдѣлявшій день рожденія Андрея отъ 1-го января (нѣкотораго года), былъ равенъ 63 днямъ, а промежутокъ времени, отдѣлявшій день рожденія Петра отъ того же 1-го января, составлялъ 46 дней. Сколько дней отдѣляло день рожденія Андрея отъ дня рожденія Петра?

Въ такомъ видѣ задача представляется неопредѣленной, такъ какъ неизвѣстно, родился ли Андрей на 63 дня раньше 1-го января, или же на 63 дня послѣ 1-го января; равнымъ образомъ не сказано въ задачѣ, былъ ли день рожденія Петра за 46 дней до 1-го января, или 46 дней позже этого числа. Если Андрей и Петръ оба родились раньше, или оба послѣ 1-го января,

то день рожденія Петра отстоялъ отъ дня рожденія Андрея на 63—46, т.-е. на 17 дней; если Андрей родился раньше 1-го января, а Петръ послѣ этого числа (или наоборотъ), то ихъ дни рожденія раздѣлялись промежуткомъ въ 63+46, т.-е. въ 109 дней.

Можно сказать, что и въ этой задачѣ рѣчь идетъ о величинѣ, имѣющей направленіе, хотя слову «направленіе» здѣсь нельзя придавать буквальнаго значенія. Промежутокъ времени, отдѣлявшій день рожденія Андрея отъ 1-го января, можно понимать въ двухъ противоположныхъ смыслахъ (направленіяхъ): или какъ промежутокъ, слѣдовавшій за 1-мъ января (тогда Андрей родился послѣ 1-го января), или какъ промежутокъ, предшествовавшій 1-му января (тогда Андрей родился до 1-го января). То же самое можно сказать о промежуткѣ времени, отдѣлявшемъ день рожденія Петра отъ 1-го января.

Если условимся промежутки времени, слѣдовавшіе за 1-мъ января, считать положительными и выражать ихъ числами со знакомъ + (или безъ знака), а промежутки времени, предшествовавшіе 1-му января, считать отрицательными и выражать ихъ числами со знакомъ —, то задачу нашу можно высказать вполнѣ точно, напр., такъ: промежутокъ времени, отдѣлявшій день рожденія Андрея отъ 1-го января, былъ равенъ —63 днямъ, а промежутокъ времени, отдѣлявшій день рожденія Петра отъ того же 1-го января, составлялъ +46 дней. Сколько дней раздѣляли дни рожденія Андрея и Петра?

Въ такомъ видѣ задача имѣетъ опредѣленный отвѣтъ; искомый промежутокъ времени равенъ 63+46=109 днямъ.

Кромѣ величинъ, указанныхъ въ предыдущихъ задачахъ (разстояніе, температура, промежутокъ времени), многія другія также имѣютъ «направленіе», т.-е. онѣ могутъ быть разсматриваемы въ двухъ противоположныхъ смыслахъ. Таковы, напр.:

доходъ	въ противоположномъ смыслѣ будетъ		расходъ;
выигрышъ	»	»	проигрышъ;
прибыль	»	»	убытокъ;
имущество	»	»	долгъ и т. п.

Если доходъ, выигрышъ, прибыль, имущество... условимся считать величинами положительными и выражать ихъ числами

со знакомъ + (или безъ знака), то расходъ, проигрышъ, убытокъ, долгъ... надо считать соотвѣтственно величинами того же рода, но отрицательными, и выражать ихъ числами со знакомъ —; тогда можно говорить, что расходъ есть отрицательный доходъ, проигрышъ есть отрицательный выигрышъ и т. д. При такомъ соглашеніи понятны будутъ, напр., слѣдующія словесныя выраженія: купецъ получилъ прибыли: въ январѣ +200 руб., въ февралѣ +150, въ мартѣ —50 руб. (значитъ, въ мартѣ купецъ получилъ убытку 50 руб.); или такія: у старшаго брата имущества было на +50000 руб., у средняго на +30000 руб., у младшаго на —5000 руб. (значитъ, у младшаго брата не было совсѣмъ имущества, а былъ долгъ въ 5000 руб.).

Должно однако замѣтить, что на ряду съ указанными величинами существуетъ очень много другихъ, въ которыхъ нельзя указать «направленія»; напр., нельзя понимать въ двухъ противоположныхъ смыслахъ такія величины, какъ объемъ, площадь, вѣсъ, цѣна и многія другія.

13. Алгебраическія числа. Числа, разсматриваемыя въ ариѳметикѣ, служатъ для выраженія такихъ величинъ, которыя не имѣютъ «направленія», или которыхъ направленіе не разсматривается (когда, напр., интересуются знать только размѣръ какого-нибудь разстоянія, а не направленіе, по которому его надо считать). Числа же, разсматриваемыя въ алгебрѣ, служатъ для выраженія величинъ, имѣющихъ «направленіе», когда, помимо размѣра величины, хотятъ еще указать и ея направленіе. Для этого величину, понимаемую въ какомъ-нибудь одномъ смыслѣ, выражаютъ числомъ съ предшествующимъ ему знакомъ +, а ту же величину, понимаемую въ противоположномъ смыслѣ, выражаютъ числомъ съ предшествующимъ ему знакомъ —.

Число съ предшествующимъ ему знакомъ + (который, впрочемъ, можетъ быть и опускаемъ) наз. *положительнымъ*; число съ предшествующимъ ему знакомъ — наз. *отрицательнымъ*. Такъ, +10, $+{}^1/_2$, +0,3 положительныя числа, а —8, $-{}^5/_7$, —3,25 отрицательныя числа.

Къ числамъ присоединяютъ еще 0 (нуль), не относя его ни къ положительнымъ, ни къ отрицательнымъ. Выраженія +0, —0 и просто 0 считаютъ равносильными.

Числа положительныя, отрицательныя и нуль мы будемъ называть **алгебраическими** числами или **относительными** въ отличіе ихъ отъ чиселъ **ариѳметическихъ** или **обыкновенныхъ**, которыя не имѣютъ передъ собой никакого знака [1]).

Абсолютною величиною алгебраическаго числа называется это число, взятое безъ знака; такъ, абсолютная величина числа —10 есть 10, абсолютная величина числа +5 есть 5; абсолютная величина нуля есть 0.

Два алгебраическихъ числа считаются **равными**, если у нихъ одинаковы абсолютныя величины и знаки; въ противномъ случаѣ числа считаются неравными.

Должно помнить, что знаки + и —, входящіе въ обозначенія алгебраическихъ чиселъ, не представляютъ собою знаковъ сложенія и вычитанія, а служатъ лишь знаками для указанія «направленія» измѣряемыхъ величинъ. Чтобы не могло произойти смѣшенія этихъ знаковъ со знаками сложенія и вычитанія, алгебраическое число вмѣстѣ съ его знакомъ заключаютъ въ скобки, напр., пишутъ такъ: (+7)+(—3); въ такомъ изображеніи знаки, стоящіе внутри скобокъ, суть знаки алгебраическихъ чиселъ, а знакъ +. стоящій между скобками, есть знакъ сложенія.

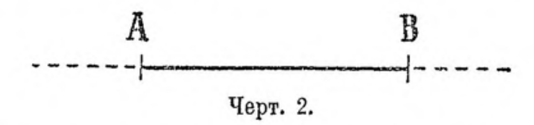
Положительныя числа можно писать и безъ знака +; въ такомъ случаѣ они не будутъ отличаться отъ чиселъ ариѳметическихъ.

14. Изображеніе чиселъ помощью отрѣзковъ прямой. Для яснаго пониманія алгебраическихъ чиселъ полезно, говоря о такихъ числахъ, всегда представлять себѣ въ умѣ какія-нибудь изъ тѣхъ величинъ, для измѣренія которыхъ служатъ эти числа. Всего проще для этой цѣли брать отрѣзки прямой линіи, если условимся, помимо длины этихъ отрѣзковъ, принимать во вниманіе еще и ихъ направленіе.

Отрѣзкомъ прямой (или просто **отрѣзкомъ**) наз. часть какой-нибудь прямой линіи, ограниченная съ обѣихъ сторонъ, напр. (черт. 2), съ одной стороны точкою A, съ другой точкою B. Въ каждомъ отрѣзкѣ мы условимся различать: во-1-хъ,

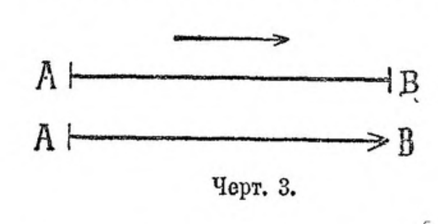
[1]) Должно замѣтить однако, что въ высшей математикѣ терминъ „алгебраическое число“ употребляется въ другомъ значеніи, о которомъ въ элементарной математикѣ говорить не мѣсто.

длину его (которая, конечно, можетъ быть больше и меньше), во-2-хъ, направленіе, которое для даннаго отрѣзка можетъ быть двоякое. Напримѣръ, во взятомъ нами отрѣзкѣ можно различать направленіе или отъ точки A къ точкѣ B (слѣва направо),



Черт. 2.

или, наоборотъ, отъ B къ A (справа налѣво). Если мы разсматриваемъ взятый отрѣзокъ въ направленіи отъ A къ B, то точку A мы будемъ называть началомъ отрѣзка, а точку B его концомъ и будемъ обозначать такой отрѣзокъ такъ: AB, т. е. сначала будемъ писать ту букву, которая обозначаетъ начало отрѣзка; если же за начало отрѣзка мы беремъ точку B, а за конецъ точку A, т. е. если мы разсматриваемъ отрѣзокъ въ направленіи отъ B къ A, то мы его обозначимъ не AB, а BA.



Черт. 3.

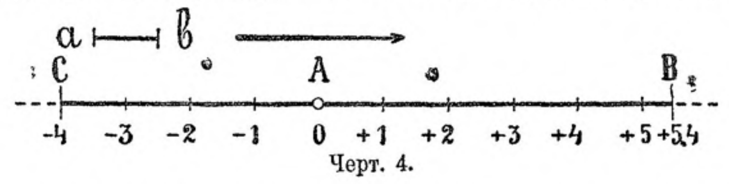
На чертежѣ направленіе, на которое хотятъ обратить вниманіе, иногда изображается стрѣлкой, поставленной или надъ отрѣзкомъ (черт. 3 верхній), или на немъ самомъ, на концѣ его (черт. 3, нижній), или же подъ отрѣзкомъ (черт. 8 и 9).

Отрѣзки прямой, въ которыхъ, помимо ихъ длины, мы обращаемъ вниманіе на направленіе, мы будемъ называть направленными отрѣзками[1]).

Такими отрѣзками мы наглядно можемъ выражать алгебраическія числа слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ какую-нибудь прямую (удобнѣе всего — горизонтальную, черт. 4) и условимся, какое изъ двухъ направленій этой прямой считать положительнымъ. Примемъ, напр., направленіе слѣва направо (указанное стрѣлкою) за положительное; тогда противоположное направленіе—справа налѣво — мы будемъ считать отрицательнымъ. Далѣе, примемъ какую-нибудь небольшую длину ab (изобра-

[1]) Они наз. также „векторами“.

женную на чертежѣ) за единицу длины. Пусть теперь дано какое-нибудь положительное число, напр., $+5,4$. Возьмемъ на нашей прямой произвольную точку A и отложимъ вправо отъ нея 5,4 единицы длины, равныхъ ab. Тогда получимъ отрѣзокъ AB,



Черт. 4.

длина котораго равна 5,4 единицамъ и направленіе положительное. Этотъ отрѣзокъ и выразитъ намъ наглядно число $+5,4$, такъ что мы можемъ писать: $\overline{AB}=5,4$. Здѣсь, помѣщая надъ AB горизонтальную черту, мы хотимъ указать, что разумѣемъ не самый направленный отрѣзокъ AB, а алгебраическое число, измѣряющее этотъ отрѣзокъ, такъ что написанное выше равенство подробно можно высказать такъ: «алгебраическое число, измѣряющее направленный отрѣзокъ AB, есть $+5,4$».

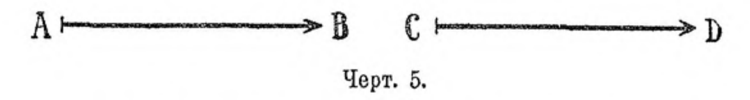
Возьмемъ теперь какое-нибудь отрицательное число, напр. -4. Чтобы изобразить его наглядно, отложимъ отъ той же точки A влѣво 4 единицы длины. Тогда получимъ отрѣзокъ AC, котораго длина равна 4 единицамъ, а направленіе отрицательное; значитъ, этотъ отрѣзокъ выражаетъ число -4, и мы можемъ писать: $\overline{AC}=-4$. Очевидно, что такимъ путемъ мы всякое алгебраическое число можемъ выразить (на самомъ дѣлѣ или только мысленно) направленнымъ отрѣзкомъ. Въ большинствѣ случаевъ нѣтъ надобности въ дѣйствительности откладывать какую-нибудь единицу длины, а достаточно только вообразить, что такое отложеніе сдѣлано.

Можно представить себѣ, что всѣ алгебраическія числа выражены направленными отрѣзками, отложенными на одной и той же прямой (черт. 4) отъ одной и той же ея точки A, принятой за начало отрѣзковъ. Тогда на той части прямой, которая расположена направо отъ A, изобразится рядъ положительныхъ чиселъ: $+1$, $+2$, $+3$..., а на части прямой, расположенной влѣво отъ A, изобразятся отрицательныя части: -1, -2, -3... Прямую эту надо представлять себѣ безконечною въ обѣ стороны (хотя на чертежѣ по необходимости прихо-

дится ограничивать ее и справа, и слѣва). Число нуль выражается на этой прямой не отрѣзкомъ, а одною точкою A. Такую прямую мы условимся называть **числовой прямою.**

Такъ какъ направленіе отрѣзковъ, выражающихъ числа со знакомъ $+$, противоположно направленію отрѣзковъ, выражающихъ числа со знакомъ $-$, то и самые эти знаки принято называть противоположными знаками. Всякія два числа, какъ $+3$, и -3, $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ и т. п., у которыхъ знаки противоположны, а абсолютныя величины одинаковы, мы будемъ называть противоположными числами.

Если два направленные отрѣзка AB и CD (черт. 5) имѣютъ одинаковую длину и одно и то же направленіе, то они считаются



Черт. 5.

равными (подразумѣвается: по величинѣ и по направленію). Если такіе отрѣзки измѣрены одною и тою же единицей длины, то, конечно, въ результатѣ получаются равныя алгебраическія числа, такъ что можно написать: $\overline{AB}=\overline{CD}$.

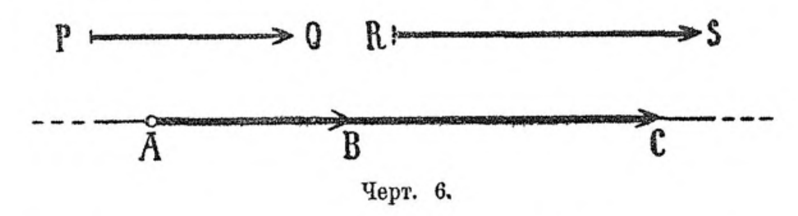
15. Сложеніе направленныхъ отрѣзковъ.

Чтобы сложить два направленныхъ отрѣзка поступимъ такъ: на числовой прямой отъ произвольной ея точки отложимъ отрѣзокъ, равный первому слагаемому отрѣзку; затѣмъ отъ конца отложеннаго отрѣзка отложимъ ни той же прямой другой отрѣзокъ, равный второму слагаемому отрѣзку; тогда отрѣзокъ, у котораго начало есть начало перваго отложеннаго отрѣзка, а конецъ — конецъ второго отложеннаго отрѣзка, принимается за сумму этихъ двухъ отрѣзковъ.

Приложимъ это опредѣленіе суммы къ слѣдующимъ 4-мъ частнымъ случаямъ.

1°. Пусть требуется найти сумму двухъ положительныхъ отрѣзковъ PQ и RS (черт. 6). Для этого возьмемъ произвольную точку A на какой-нибудь прямой и на ней отложимъ отрѣзокъ AB, равный PQ; затѣмъ отъ конца B этого отрѣзка

отложимъ на той же прямой отрѣзокъ BC, равный RS. Полученный послѣ этого отрѣзокъ AC есть сумма отрѣзковъ AB и BC



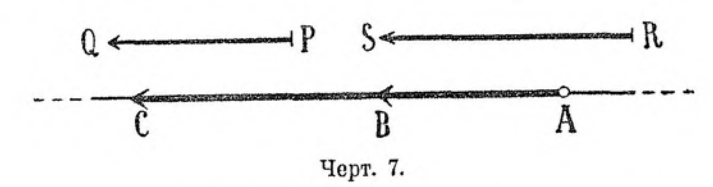
Черт. 6.

и, слѣд., сумма равныхъ имъ отрѣзковъ PQ и RS, такъ что можно писать:

$$AC=AB+BC=PQ+RS.$$

Очевидно, что сумма положительныхъ отрѣзковъ есть также положительный отрѣзокъ.

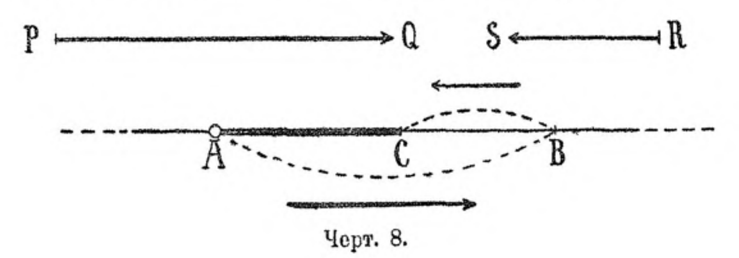
2⁰. Пусть требуется найти сумму $PQ+RS$ двухъ отрицательныхъ отрѣзковъ (черт. 7). Построеніе будетъ такое же, какъ и въ первомъ случаѣ, съ тою разницей, что отрѣзки теперь



Черт. 7.

должны откладываться въ отрицательномъ направленіи. Очевидно, что сумма отрицательныхъ отрѣзковъ представляетъ собою также отрицательный отрѣзокъ.

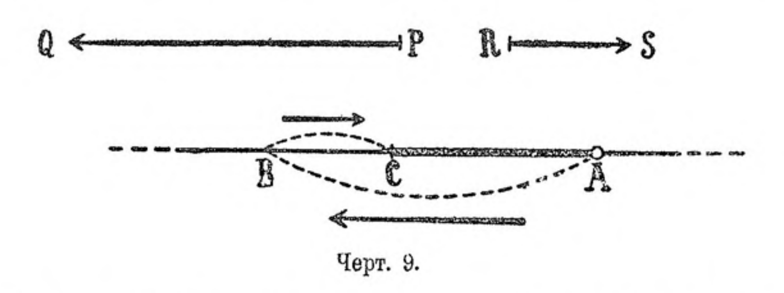
3⁰. Найдемъ сумму отрѣзковъ PQ и RS (черт. 8), изъ которыхъ первый (PQ) положительный, а второй (RS) отрицательный.



Черт. 8.

Отложимъ отъ точки A вправо положительный отрѣзокъ $AB=PQ$ и затѣмъ отъ точки B отложимъ влѣво отрицательный отрѣзокъ $BC=RS$. Получившійся отрѣзокъ AC есть сумма $AB+BC$ и, слѣд., сумма $PQ+RS$. Эта сумма у насъ оказалась положительной, благодаря тому, что длина положительнаго отрѣзка болѣе длины отрицательнаго; если бы первая длина была меньше второй, то сумма, очевидно, оказалась бы отрицательной.

4⁰. Пусть, наконецъ, даны отрѣзки PQ и RS (черт. 9), изъ которыхъ первый отрицательный, а второй положительный.



Черт. 9.

Построивъ $AB=PQ$ и $BC=RS$, получимъ сумму AC. Эта сумма оказалась у насъ отрицательной, благодаря тому, что длина отрицательнаго отрѣзка больше длины положительнаго; если бы первая длина была бы меньше второй, то сумма, очевидно, оказалась бы положительной [1]).

Замѣтимъ, что если бы въ случаѣ 3⁰ или въ случаѣ 4⁰ длина положительнаго отрѣзка была равна длинѣ отрицательнаго, то точка C совпала бы съ точкой A, и тогда сумма обратилась бы въ 0; такимъ образомъ, сумма 2-хъ противоположно направленныхъ отрѣзковъ съ одинаковой абсолютной длиной равна нулю.

Умѣя находить сумму 2-хъ направленныхъ отрѣзковъ, мы легко можемъ получить сумму 3-хъ, 4-хъ и болѣе отрѣзковъ; для этого надо сначала найти сумму первыхъ двухъ слагаемыхъ отрѣзковъ, затѣмъ сумму этой суммы и

---

[1]) Просмотрѣвъ всѣ 4 случая сложенія отрѣзковъ AB и BC, мы видимъ, что, какъ бы ни были расположены на прямой три точки A, B и C, всегда $AB+BC=AC$.

третьяго слагаемаго отрѣзка, далѣе сумму послѣдней суммы и четвертаго отрѣзка и т. д. [1]).

Сумма отрѣзковъ обладаетъ перемѣстительнымъ свойствомъ, т.-е. она не измѣняется отъ перемѣны порядка слагаемыхъ. Предлагаемъ самимъ учащимся убѣдиться въ этомъ, перемѣстивъ слагаемые отрѣзки въ указанныхъ выше 4 случаяхъ нахожденія суммы двухъ отрѣзковъ.

Сумма направленныхъ отрѣзковъ обладаетъ также и сочетательнымъ свойствомъ, т.-е. она не измѣнится, если нѣсколько слагаемыхъ отрѣзковъ мы замѣнимъ ихъ суммою [2]).

16. Сложеніе направленныхъ величинъ вообще. Подобно указанному сложенію направленныхъ отрѣзковъ можно складывать также и другія направленныя величины, напр., прибыль и убытокъ, доходъ и расходъ, выигрышъ и проигрышъ и т. п. Существенная особенность такого сложенія состоитъ въ томъ, что двѣ противоположно направленныя величины, имѣющія одинаковый абсолютный размѣръ, при сложеніи взаимно уничтожаются (даютъ въ суммѣ нуль); напр., 5 рублей прибыли уничтожаются 5-ю рублями убытку, 10 рублей выигрыша уничтожаются 10-ю рублями проигрыша и т. п.

Сложеніе алгебраическихъ чиселъ.

17. Опредѣленіе. Суммою алгебраическихъ чиселъ называется такое число, которое выражаетъ сумму направленныхъ отрѣзковъ (и вообще направленныхъ величинъ), выраженныхъ данными числами.

---

[1]) Если всѣ слагаемые отрѣзки перенесены на одну прямую и расположены такъ, что конецъ B перваго отрѣзка AB принятъ за начало второго отрѣзка BC, конецъ C этого отрѣзка принятъ за начало третьяго CD и т. д., то, какъ бы ни были расположены на прямой точки A, B, C, D, E..., всегда будемъ имѣть:

$$AB+BC+CD+DE=AE.$$

Дѣйствительно, $AB+BC$, какъ мы видѣли, равно AC; точно такъ же $AC+CD=AD$ и $AD+DE=AE$.

[2]) Напр., сумма $AB+BC+CD$, равная, какъ мы знаемъ, всегда отрѣзку AD, не измѣнится, если мы сначала сложимъ BC и CD (получимъ отрѣзокъ BD) и затѣмъ эту сумму приложимъ къ AB $(AB+BD=AD)$. Такимъ образомъ,

$$AB+BC+CD=AB+(BC+CD).$$

Например, сумма: (+8)+(—5)+(—2) есть число, выражающее сумму трехъ направленныхъ отрѣзковъ, изъ которыхъ одинъ измѣряется числомъ +8, другой числомъ —5 и третій числомъ — 2 (предполагается, конечно, что всѣ измѣренія сдѣланы при помощи одной и той же единицы).

Дѣйствіе, посредствомъ котораго находится сумма нѣсколькихъ чиселъ, наз. сложеніемъ.

18. Сложеніе двухъ чиселъ. Для сложенія двухъ алгебраическихъ чиселъ мы дадимъ слѣдующія два правила.

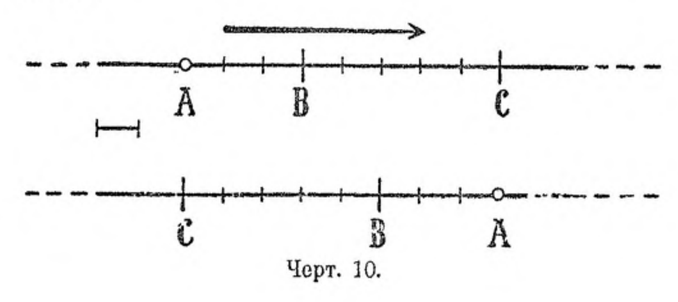
Правило 1-е. Чтобы сложить два алгебраическія числа одинаковыхъ знаковъ, складываютъ ихъ абсолютныя величины и предъ суммою ставятъ тотъ знакъ, какой имѣютъ слагаемыя.

Такъ: (+3)+(+5)=+8 (—3)+(—5)=—8.

Дѣйствительно, сумма двухъ отрѣзковъ прямой: $\overline{AB}=+3$ и $\overline{BC}=+5$ (черт. 10, верхній) есть отрѣзокъ $\overline{AC}=+8$ и сумма двухъ отрѣзковъ $\overline{AB}=-3$ и $\overline{BC}=-5$ (нижній чертежъ) составляетъ отрѣзокъ $\overline{AC}=-8$.

Подобно этому 3 рубля прибыли вмѣстѣ съ 5 рублями прибыли составляютъ 8 руб. прибыли; 3 руб. расхода вмѣстѣ съ 5 руб. расхода составляютъ 8 руб. расхода и т. п.

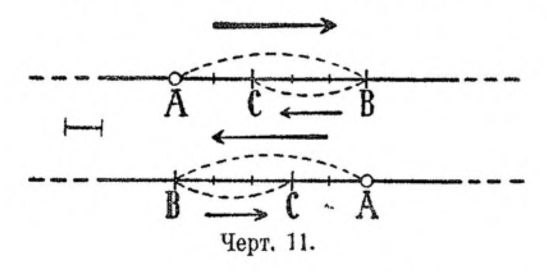
Такъ какъ положительныя числа пишутся и безъ знака, то вмѣсто равенства: (+3)+(+5)=+8 можно написать болѣе простое 3+5=8, что согласуется со сложеніемъ ариѳметическихъ чиселъ.



Черт. 10.

Правило 2-е. Чтобы сложить два алгебраическихъ числа противоположныхъ знаковъ, находятъ разность ихъ абсолютныхъ величинъ и предъ нею ставятъ знакъ того изъ слагаемыхъ чиселъ, у котораго абсолютная величина больше.

Такъ: $(+5)+(-3)=+2$; $(-5)+(+3)=-2$.



Черт. 11.

Дѣйствительно, сложивъ два отрѣзка (черт. 11, верхній), $\overline{AB}=+5$ и $\overline{BC}=-3$, мы получимъ сумму $\overline{AC}=+2$, и, сложивъ (нижній чертежъ) два отрѣзка: $\overline{AB}=-5$ и $\overline{BC}=+3$, найдемъ сумму $\overline{AC}=-2$.

Подобно этому 5 руб. дохода вмѣстѣ съ 3 руб. расхода равносильны 2 руб. дохода; 5 руб. долгу при 3 руб. имущества равносильны 2 руб. долгу и т. п.

Отбросивъ знакъ $+$ передъ положительными числами, мы можемъ написанныя выше равенства переписать короче:

$$5+(-3)=2;\quad (-5)+3=-2.$$

Слѣдствіе. Сумма двухъ противоположныхъ чиселъ равна нулю. Такъ:

$$(+3)+(-3)=0;\quad (-8)+(+8)=0.$$

Напримѣръ, если я въ одной игрѣ выигралъ 3 руб., а въ другой проигралъ 3 руб., то въ результатѣ я ничего не выигралъ и ничего не проигралъ.

Къ указаннымъ правиламъ сложенія надо добавать еще слѣдующее соглашеніе:

Прибавить 0 къ какому-нибудь числу или прибавить къ 0 какое-нибудь число значитъ оставить это число безъ измѣненія.

Такъ: $(+3)+0=+3$; $(-3)+0=-3$; $0+(+5)=+5$;

$$0+(-2)=-2;\quad 0+0=0.$$

19. Сложеніе трехъ и болѣе чиселъ. Сложеніе нѣсколькихъ алгебраическихъ чиселъ, данныхъ въ извѣстной послѣдовательности, производится такъ: сначала находятъ сумму двухъ первыхъ слагаемыхъ, къ ней прибавляютъ третье слагаемое, затѣмъ четвертое и т. д.

Пусть, напр., требуется найти сумму:

$$(+8)+(-5)+(-4)+(+3),$$

которую можно выразить короче такъ:

$$8+(-5)+(-4)+3.$$

Сложимъ два первыя слагаемыя: $8+(-5)=3$; приложимъ третье слагаемое: $3+(-4)=-1$; добавимъ четвертое слагаемое: $(-1)+3=2$.

Впрочемъ такого порядка сложенія нѣтъ надобности всегда придерживаться, какъ это будетъ видно изъ свойствъ суммы, которыя мы сейчасъ укажемъ.

20. Свойства суммы. Сумма чиселъ алгебраическихъ, какъ и сумма чиселъ ариѳметическихъ, обладаетъ свойствами перемѣстительныхъ и сочетательныхъ.

1^0. **Перемѣстительное свойство:** сумма не измѣняется отъ перемѣны порядка слагаемыхъ.

Напримѣръ: $(-4)+(+3)+(-1)+(+5)=+3$;
$(-4)+(-1)+(+5)+(+3)=+3$;
$(+5)+(-1)+(-4)+(+3)=+3$ и т. д.

Если, напр., торговецъ, продавъ 4 предмета, получилъ прибыли на одномъ изъ нихъ 3 руб., на другомъ 5 руб., на третьемъ же предметѣ имѣлъ убытокъ 4 руб. и на четвертомъ также убытокъ 1 руб., то для него безразлично, въ какомъ порядкѣ слѣдовали эти продажи: проданы ли были сначала тѣ предметы, на которыхъ получена прибыль, или сначала тѣ, которые дали убытокъ, или какъ-нибудь иначе; при всякомъ порядкѣ окажется одно и то же, именно: послѣ 4-хъ продажъ торговецъ получилъ прибыли 3 рубля.

Вообще, если a, b, c... означаютъ какія-нибудь алгебраическія числа, то:

$$a+b+c...=a+c+b+...=b+a+c...$$

2^0. **Сочетательное свойство**: сумма не измѣняется, если нѣсколько слагаемыхъ мы замѣнимъ ихъ суммой.

Возьмемъ, напр., такую задачу: торговецъ получилъ прибыли: въ первый день +10 руб., во второй день —3 руб., въ третій день +12 руб.; сколько прибыли получилъ торговецъ за всѣ эти три дня?

Мы можемъ узнать это различными способами; напр., узнаемъ сначала, сколько прибыли получилъ торговецъ за первые два дня, и затѣмъ добавимъ къ этой прибыли ту, которую онъ получилъ на третій день:

$$[(+10)+(-3)]+(+12)=(+7)+(+12)=+19.$$

Но тотъ же результатъ, очевидно, мы получимъ, если узнаемъ сначала, сколько прибыли имѣлъ торговецъ за два послѣдніе дня, и потомъ эту прибыль приложимъ къ той, которую онъ имѣлъ за первый день:

$$(+10)+[(-3)+(+12)]=(+10)+(+9)=+19.$$

Наконецъ, мы можемъ сдѣлать и такъ: узнаемъ сначала, какъ велика прибыль за первый и третій день вмѣстѣ, а потомъ добавимъ ее къ прибыли второго дня:

$$(-3)+[(+10)+(+12)]=(-3)+(+22)=+19.$$

Во всѣхъ случаяхъ мы получаемъ одно и то же число +19.

Вообще, если a, b, c означаютъ какія-нибудь алгебраическія числа, то сочетательное свойство въ примѣненіи къ суммѣ трехъ слагаемыхъ можно выразить такою формулой:

$$a+b+c=a+(b+c).$$

Читая это равенство справа налѣво, мы можемъ высказать сочетательное свойство такъ:

чтобы прибавить сумму къ какому-нибудь числу, достаточно къ этому числу прибавить каждое слагаемое одно за другимъ.

Слѣдствіе. Чтобы вычислить сумму алгебраическихъ чиселъ, можно найти сумму всѣхъ положительныхъ слагаемыхъ, за

тѣмъ сумму всѣхъ отрицательныхъ слагаемыхъ и эти двѣ суммы соединить въ одну.

Напримѣръ, чтобы найти сумму:

$$(-4)+(+3)+(-1)+(+5),$$

мы можемъ сгруппировать слагаемыя такъ:

$$[(+3)+(+5)]+[(-4)+(-1)]=(+8)+(-5)=+3.$$

Полезно замѣтить еще слѣдующее свойство суммы.

3⁰. **Перемѣна знаковъ у слагаемыхъ:** *если у каждаго слагаемаго перемѣнимъ знакъ на противоположный, то и у суммы перемѣнится знакъ на противоположный.*

Такъ:	$(+5)+(+3)=+8;$	$(+5)+(-3)=+2;$
	$(-5)+(-3)=-8;$	$(-5)+(+3)=-2.$

Вычитаніе алгебраическихъ чиселъ.

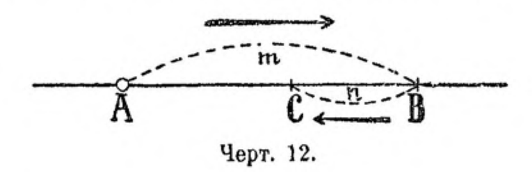
21. Опредѣленіе. Вычитаніе алгебраическихъ чиселъ (какъ и ариѳметическихъ) **есть дѣйствіе** (обратное сложенію), **посредствомъ котораго по данной суммѣ двухъ слагаемыхъ и одному изъ этихъ слагаемыхъ отыскивается другое.**

Такъ, вычесть изъ $+3$ число -2 значитъ найти такое алгебраическое число x, чтобы сумма $(-2)+x$ или —что все равно— сумма $x+(-2)$ равнялась $+3$; такое число есть, и притомъ только одно, именно $+5$, такъ какъ $(+5)+(-2)=+3$, и никакое иное число, сложенное съ -2, не даетъ въ суммѣ $+3$.

22. Вычитаніе бо́льшаго числа изъ меньшаго. Въ ариѳметикѣ вычитаніе невозможно, если вычитаемое превосходитъ уменьшаемое. Въ области алгебраическихъ чиселъ это ограниченіе должно быть отброшено (если ариѳметическія числа будемъ отождествлять съ числами положительными). Пусть, напр., требуется изъ 7 вычесть 10. Это значитъ: найти такое алгебраическое число x, которое, сложенное съ вычитаемымъ 10, даетъ въ суммѣ уменьшаемое 7. Такое число существуетъ, и притомъ только одно, именно отрицательное число -3, такъ какъ, согласно правилу сложенія алгебраическихъ чиселъ, $10+(-3)=+7=7$, и никакое иное число, сложенное съ 10, не можетъ составить числа 7; значитъ: $7-10=-3$. Подобно

этому: $20-30=-10$; $5-7^1/_2=-2^1/_2$; $0-8=-8$; $a-(a+m)=-m$ и т. п. Такимъ образомъ, **разность отъ вычитанія бóльшаго ариѳметическаго числа изъ меньшаго равна избытку бóльшаго числа надъ меньшимъ, взятому со знакомъ —.**

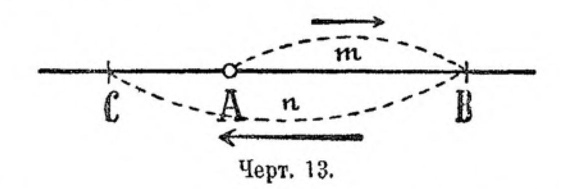
Примѣръ. Пѣшеходъ прошелъ m верстъ отъ точки A до точки B (черт. 12); затѣмъ,



Черт. 12.

повернувъ назадъ, онъ прошелъ еще n верстъ до точки C. Какъ велико разстояніе между A и C?

Искомое разстояніе равно $m-n$ верстъ. Вычислимъ эту разность для слѣдующихъ 3 частныхъ случаевъ. 1) $m=15$, $n=5$; тогда $m-n=15-5=10$. Въ этомъ случаѣ точка C лежитъ вправо отъ A на разстояніи 10 верстъ отъ нея. 2) $m=15$; $n=15$; тогда $m-n=15-15=0$. Въ этомъ случаѣ точка C совпадаетъ съ A, и, слѣд., ея разстояніе отъ A равно нулю. 3) $m=15$, $n=20$; тогда $m-n=15-20=-5$. Въ этомъ случаѣ разстояніе точки C отъ A надо считать по противоположному направленію, т.-е. влѣво отъ A (черт. 13).



Черт. 13.

23. Общее правило вычитанія. Чтобы вычесть какое-нибудь число, достаточно прибавить къ уменьшаемому число, противоположное вычитаемому.

Для вывода этого правила разсмотримъ особо 3 случая: 1) когда вычитаемое положительное число, 2) когда вычитаемое отрицательное число и 3) когда оно есть 0.

1) Пусть отъ какого-нибудь алгебраическаго числа a требуется вычесть положительное число $+3$ (или просто 3); это значитъ: требуется найти число x, которое, сложенное съ $+3$, дастъ a. Такое число равно суммѣ $a+(-3)$, потому что, приложивъ къ этой суммѣ число $+3$, получимъ уменьшаемое a.

Дѣйствительно, согласно сочетательному свойству мы можемъ написать:

$$a+(-3)+(+3)=a+[(-3)+(+3)].$$

Но сумма противоположныхъ чиселъ -3 и $+3$ равна 0; значитъ, мы получимъ въ суммѣ $a+0$, что составляетъ просто a.

Такимъ образомъ: $a-(+3)=a+(-3)$,

и вообще: $a-(+b)=a+(-b)$.

Значитъ, вмѣсто того, чтобы вычитать число $+b$, можно прибавить противоположное число $-b$.

2) Пусть изъ того же числа a требуется вычесть отрицательное число -5; это значитъ: найти число x, которое, сложенное съ -5, дастъ уменьшаемое a. Такое число равно суммѣ $a+(+5)$ потому что, приложивъ къ этой суммѣ вычитаемое -5, получимъ уменьшаемое a:

$$a+(+5)+(-5)=a+[(+5)+(-5)]=a+0=a.$$

Такимъ образомъ: $a-(-5)=a+(+5)$,

и вообще: $a-(-b)=a+(+b)$.

Значитъ, вмѣсто того, чтобы вычитать число $-b$, можно прибавить противоположное число $+b$.

3) Наконецъ, общее правило вычитанія примѣнимо и къ тому случаю, когда вычитаемое есть 0; надо только имѣть въ виду, что число, противоположное нулю, есть тоже число 0.

Такимъ образомъ:

$$a-0=a+0=a.$$

Замѣтимъ, что правило это не противорѣчитъ вычитанію, разсматриваемому въ ариѳметикѣ, а также и вычитанію бо̀льшаго числа изъ меньшаго, указанному въ предыдущемъ параграфѣ; такъ: $10-2=8$ и $10+(-2)=8$,

$10-12=-2$ и $10+(-12)=-2$.

Примѣры. 1) $(+10)-(-2)=(+10)+(+2)=+12$;

2) $(-10)-(+2)=(-10)+(-2)=-12$;

3) $(-10)-(-2)=(-10)+(+2)=-8$.

24. Другое выраженіе правилъ сложенія и вычитанія. Правила сложенія и вычитанія, данныя нами раньше (§§ 18, 23), можно замѣнить другими, болѣе удобными для практическаго примѣненія. Эти правила слѣдующія:

1⁰. **Чтобы прибавить положительное число, достаточно прибавить его абсолютную величину.**

Пусть, напр., требуется къ +7 прибавить +3; согласно 1-му правилу сложенія (§ 18) сумма будетъ +10. Но то же самое число мы получимъ, если къ +7 приложимъ абсолютную величину числа +3, такъ какъ $+7+3=7+3=10$.

Точно такъ же, согласно второму правилу сложенія, сумма $(-7)+(+3)$ равна —4; но ту же сумму мы получимъ, прибавивъ къ —7 число 3, такъ какъ $(-7)+3=-4$.

2⁰. **Чтобы вычесть положительное число, достаточно вычесть его абсолютную величину.**

Такъ, разность $(+7)-(+10)$, согласно общему правилу вычитанія (§ 23), равна суммѣ $(+7)+(-10)$, т.-е. числу —3; но то же число мы получимъ, если изъ +7 вычтемъ абсолютную величину числа +10, такъ какъ $(+7)-10=7-10=-3$. Точно такъ же, согласно общему правилу вычитанія, разность $(-7)-(+3)$ равна суммѣ $(-7)+(-3)$, т.-е. числу —10; но то же число мы получимъ, если изъ —7 вычтемъ 3, такъ какъ $-7-3=-10$.

3⁰. **Чтобы прибавить отрицательное число, достаточно отнять его абсолютную величину.**

Такъ: $(+7)+(-10)=-3$ и $+7-10=7-10=-3$
$(-7)+(-10)=-17$ и $-7-10=-17$.

4⁰. **Чтобы вычесть отрицательное число, достаточно прибавить его абсолютную величину.**

Такъ: $(+5)-(-3)=(+5)+(+3)=+8$ и $5+3=8$,
$(-5)-(-3)=(-5)+(+3)=-2$ и $-5+3=-2$.

25. Формулы двойныхъ знаковъ. Обозначимъ абсолютную величину какого-нибудь алгебраическаго числа

черезъ a; тогда 4 правила, изложенныя въ предыдущемъ параграфѣ, мы можемъ выразить такими краткими формулами:

1) $+(+a)=+a$, 3) $+(-a)=-a$,
2) $-(+a)=-a$, 4) $-(-a)=+a$.

Формулы эти (ихъ можно назвать формулами двойныхъ знаковъ) выражаютъ только то, что раньше мы выразили словесно 4-мя правилами. Но ихъ можно выразить еще иначе такъ: если, заключивъ въ скобки алгебраическое число, поставимъ передъ скобками знакъ $+$, то получимъ выраженіе, равносильное числу, стоящему въ скобкахъ (формулы 1-я и 3-я), если же передъ скобками поставимъ знакъ $-$, то будемъ имѣть выраженіе, равносильное числу, противоположному тому, которое стоитъ внутри скобокъ (формулы 2-я и 4-я).

Такъ: $+(+5)$ равносильно $+5$
$+(-5)$ » -5
$-(+5)$ » -5
$-(-5)$ » $+5$

Вообще, обозначивъ буквою m не абсолютную величину алгебраическаго числа, а само это число, мы можемъ сказать, что выраженіе $+m$ равносильно числу m, а выраженіе $-m$ равносильно числу, противоположному m.

26. Замѣчаніе. Формулы двойныхъ знаковъ, указанные въ предыдущемъ параграфѣ, остаются вѣрными и тогда, когда въ нихъ на мѣсто буквы a подставимъ какое-нибудь алгебраическое число. Возьмемъ, напр., формулу 4-ю: $-(-a)=+a$ и подставимъ въ нее на мѣсто a число -2. Тогда получимъ такое равенство:

$$-[-(-2)]=+(-2).$$

Такъ какъ выраженіе $-(-2)$ равносильно $+2$, то лѣвая часть этого равенства есть то же самое, что $-(+2)$, а это выраженіе даетъ -2, но и правая часть равенства даетъ -2; значитъ, равенство это вѣрно. Подобнымъ же образомъ можно провѣрить и всѣ другія формулы.

27. Алгебраическая сумма. Разность всякихъ двухъ чиселъ можетъ быть представлена въ видѣ суммы. Напримѣръ, разность $7-3$ можетъ быть написана такъ: $7+(-3)$, или такъ: $(+7)+(-3)$; разность $(+2)-(-3)$ можетъ быть написана такъ: $(+2)+(+3)$.

Подобно этому, **всякое выраженіе, представляющее собою рядъ послѣдовательныхъ сложеній и вычитаній, можетъ быть представлено въ видѣ суммы.** Напримѣръ, выраженіе

$$20-5+3-7$$

можетъ быть написано такъ:

$$20+(-5)+3+(-7), \text{ или } (+20)+(-5)+(+3)+(-7).$$

Сумма, въ которой слагаемыя могутъ быть числами положительными, отрицательными и равными нулю, называется алгебраическою суммою въ отличіе отъ ариѳметической, въ которой слагаемыя всегда числа положительныя.

Такъ какъ алгебраическая сумма представляетъ собою сумму алгебраическихъ чиселъ, то она обладаетъ всѣми свойствами, указанными нами для суммы алгебраическихъ чиселъ (§ 20).

28. Сравненіе алгебраическихъ чиселъ по величинѣ. Опредѣленіе: **число a считается бо́льшимъ числа b тогда, когда разность $a-b$ положительное число; число a считается меньшимъ числа b тогда, когда разность $a-b$ отрицательное число.**

Опредѣленіе это находится въ согласіи съ нашимъ понятіемъ о бо́льшемъ и меньшемъ въ примѣненіи къ ариѳметическимъ числамъ. Мы говоримъ, напр., что 10 больше 7, или что 7 меньше 10, разумѣя при этомъ, что число 10 включаетъ въ себѣ, какъ часть, число 7 и что, слѣд., отъ 10 можно отдѣлить 7, при чемъ останется еще нѣкоторое число, тогда какъ отъ 7 нельзя отдѣлить 10; но это, другими словами, означаетъ, что разность 10—7 есть положительное число, тогда какъ разность 7—10 есть отрицательное число.

Изъ даннаго опредѣленія можно вывести слѣдующія **слѣдствія:**

1) Всякое положительное число больше всякаго отрицательнаго, потому что разность между первымъ и вторымъ всегда положительна; такъ, $+3>-5$, потому что разность $(+3)-(-5)$, равная суммѣ $3+5$, есть число положительное.

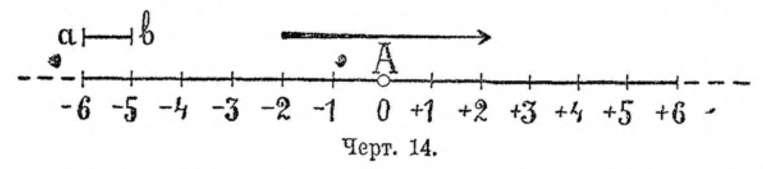
2) Всякое положительное число больше

нуля по той же причинѣ; напримѣръ, $+2>0$, такъ какъ $(+2)-0=+2$.

3) Всякое отрицательное число меньше нуля, потому что разность между первымъ и вторымъ всегда отрицательна; напр., $-3<0$, такъ какъ $(-3)-0=-3$.

4) Изъ двухъ отрицательныхъ чиселъ то больше, у котораго абсолютная величина меньше; напримѣръ, -7 больше -9, такъ какъ разность $(-7)-(-9)$, равная $(-7)+9=9-7$, есть число положительное.

Для яснаго представленія сравнительной величины алгебраическихъ чиселъ всего лучше обратиться къ наглядному изображенію ихъ помощью направленныхъ отрѣзковъ прямой, какъ это было нами указано раньше (§ 14). Выбравъ произвольную единицу длины *ab* (черт. 14), вообразимъ, что на неограниченной



Черт. 14.

прямой вправо отъ какой-нибудь ея точки *A*, принятой за начало, отложены отрѣзки, изображающіе положительныя числа $+1$, $+2$, $+3$, $+4$..., а влѣво отъ той же точки отложены отрѣзки, изображающіе отрицательныя числа -1, -2, -3, -4... Тогда, двигаясь по этой прямой слѣва направо (какъ указываетъ стрѣлка на чертежѣ), мы будемъ постоянно переходить отъ чиселъ меньшихъ къ бо́льшимъ, а двигаясь въ обратномъ направленіи—справа налѣво—будемъ постоянно переходить отъ чиселъ бо́льшихъ къ меньшимъ.

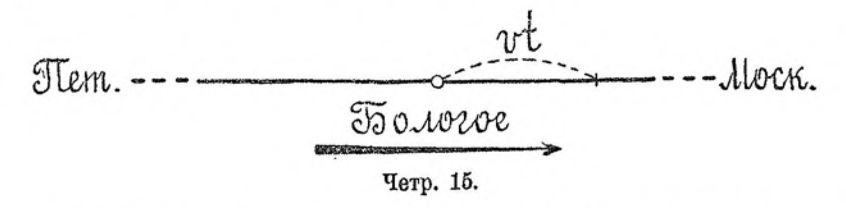
Умноженіе алгебраическихъ чиселъ.

29. Задача на умноженіе алгебраическихъ чиселъ. Въ полдень поѣздъ Николаевской желѣзной дороги (соединяющей Петербургъ съ Москвою) прослѣдовалъ черезъ станцію Бологое (расположенную приблизительно посрединѣ между Петербургомъ и Москвою). Опредѣлить мѣсто, въ которомъ находился этотъ поѣздъ въ мо-

ментъ времени, отстоящій отъ полудня (того же дня) на t часовъ, если извѣстно, что поѣздъ двигался со скоростью v верстъ въ часъ (предполагается для простоты, что поѣздъ двигался безостановочно).

Положимъ, что въ этой задачѣ буквы t и v означаютъ какія-нибудь ариѳметическія числа (пусть, напр., скорость v поѣзда была 40 верстъ въ часъ, а моментъ времени, въ который требуется опредѣлить мѣстонахожденіе поѣзда, отстоялъ отъ полудня на 3 часа). Тогда въ отвѣтъ на вопросъ задачи мы только можемъ сказать, что въ указанный моментъ времени поѣздъ находился на такомъ разстояніи отъ Бологова, какое онъ можетъ пройти въ t часовъ, т.-е. на разстояніи, равномъ vt верстъ. Но мы не можемъ сказать, нужно ли это разстояніе считать отъ Бологова по направленію къ Москвѣ, или по направленію къ Петербургу, такъ какъ, во-1-хъ, въ задачѣ не указано, въ какомъ направленіи двигался поѣздъ: отъ Петербурга ли къ Москвѣ, или отъ Москвы къ Петербургу; и, во-2-хъ, мы не знаемъ, идетъ ли рѣчь о моментѣ времени, который былъ позже полудня на t часовъ, или же о томъ моментѣ, который былъ раньше полудня на t часовъ. Такимъ образомъ, задача наша, чтобы быть вполнѣ опредѣленной, должна распасться на слѣдующія 4 отдѣльныя задачи.

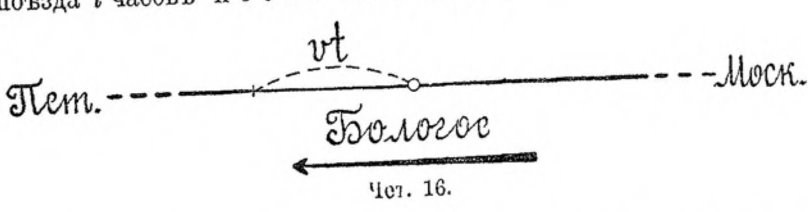
1) Въ полдень поѣздъ, двигавшійся отъ Петербурга къ Москвѣ со скоростью v верстъ въ часъ, проходилъ черезъ станцію Бологое. Опредѣлить мѣстонахожденіе этого поѣзда t часовъ послѣ полудня.



Черт. 15.

Тогда отвѣтъ будетъ таковъ: въ указанный моментъ времени поѣздъ находился на разстояніи vt верстъ отъ Бологова по направленію къ Москвѣ (черт. 15).

2) Въ полдень поѣздъ, двигавшійся о т ъ М о с к в ы к ъ П е т е р б у р г у со скоростью v верстъ въ часъ, прослѣдовалъ черезъ станцію Бологое. Опредѣлить мѣстонахожденіе этого поѣзда t часовъ п о с л ѣ п о л у д н я.



Чет. 16.

Отвѣтъ будетъ: на разстояніи vt верстъ отъ Бологова по направленію къ Петербургу (черт. 16).

3) Въ полдень поѣздъ, двигавшійся о т ъ П е т е р б у р г а к ъ М о с к в ѣ со скоростью v верстъ въ часъ, проходилъ черезъ станцію Бологое. Опредѣлить мѣстонахожденіе этого поѣзда t часовъ д о п о л у д н я.

vt

Пет. Моск.

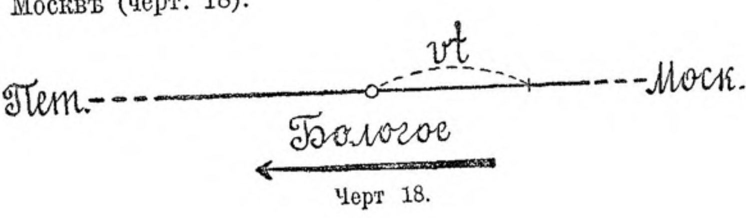
Бологое

Черт. 17.

Отвѣтъ: на разстояніи vt верстъ отъ Бологова по направленію къ Петербургу (черт. 17).

4) Въ полдень поѣздъ, двигавшійся о т ъ М о с к в ы к ъ П е т е р б у р г у со скоростью v верстъ въ часъ, проходилъ черезъ станцію Бологое. Опредѣлить мѣстонахожденіе этого поѣзда t часовъ д о п о л у д н я.

Отвѣтъ: на разстояніи vt верстъ отъ Бологова по направленію къ Москвѣ (черт. 18).



Черт 18.

Введеніе въ алгебру отрицательныхъ чиселъ и правилъ дѣйствій надъ ними позволяетъ эти 4 отдѣльныя задачи выразить одною общею задачею и дать для нея одно общее рѣшеніе. Для этого предварительно условимся, во-1-хъ, какое изъ двухъ возможныхъ направленій скорости поѣзда (отъ Петербурга къ Москвѣ, или наоборотъ) считать за положительное и какое за отрицательное; и, во-2-хъ, какой промежутокъ времени, слѣдующій за полуднемъ или предшествующій ему, считать положительнымъ и какой отрицательнымъ. Условимся, напр., скорость поѣзда при движеніи его отъ Петербурга къ Москвѣ считать положительной, а скорость при обратномъ движеніи, отъ Москвы къ Петербургу—считать отрицательной; такимъ образомъ мы будемъ, напр., говорить: поѣздъ двигался со скоростью +40 верстъ въ часъ, или поѣздъ двигался со скоростью —35 верстъ въ часъ, разумѣя при этомъ, что въ первомъ случаѣ поѣздъ шелъ отъ Петербурга къ Москвѣ со скоростью 40 верстъ въ часъ, а во второмъ случаѣ онъ шелъ отъ Москвы къ Петербургу со скоростью 35 верстъ въ часъ. Далѣе условимся считать положительными всѣ тѣ промежутки времени, которые слѣдуютъ за полуднемъ, и отрицательными тѣ, которые предшествуютъ полудню; напр., мы будемъ говорить, что моментъ времени, въ который требуется опредѣлить мѣстонахожденіе поѣзда, отстоитъ отъ полудня на +4 часа, или моментъ этотъ отстоитъ отъ полудня на —3 часа, разумѣя при этомъ, что въ первомъ случаѣ моментъ времени надо считать позднѣе полудня на 4 часа, а во второмъ случаѣ его надо брать раньше полудня на 3 часа.

Допустимъ теперь, что въ задачѣ нашей буквы t и v будутъ означать не числа ариѳметическія, какъ мы прежде предполагали, а числа алгебраическія; напр., t можетъ означать въ задачѣ и +4, и —3; v можетъ означать и +40, и —35, и другія алгебраическія числа. Тогда мы можемъ сказать, что задача наша включаетъ въ себѣ всѣ 4 частные случая, указанные выше, и точнымъ отвѣтомъ на нее будетъ слѣдующій общій отвѣтъ: въ указанный моментъ времени поѣздъ находился на разстояніи отъ Бологова, равномъ vt верстъ.

если только подъ произведеніемъ vt алгебраическихъ чиселъ v и t условимся разумѣть произведеніе ихъ абсолютныхъ величинъ, взятое со знакомъ $+$ въ томъ случаѣ, когда оба сомножителя числа положительныя или оба—числа отрицательныя, и со знакомъ — въ томъ случаѣ, когда одинъ сомножитель число положительное, а другой—отрицательное. При этомъ условіи нашъ общій отвѣтъ (указанный выше) будетъ годенъ для всѣхъ частныхъ случаевъ. Дѣйствительно:

1) Пусть буквы v и t означаютъ положительныя числа, напр., $v=+40$ и $t=+3$. Эти заданія означаютъ, что поѣздъ шелъ по направленію отъ Петербурга къ Москвѣ со скоростью 40 верстъ въ часъ, и что требуется опредѣлить мѣстонахожденіе поѣзда въ моментъ времени, бывшій 3 часа послѣ полудня. Въ этомъ случаѣ искомое мѣсто лежитъ, какъ мы видѣли, на 120 верстъ отъ Бологова по направленію къ Москвѣ (см. черт. 15). Значитъ, искомое разстояніе равно $+120$ вер. Но, согласно нашему условію, и произведеніе vt въ этомъ случаѣ даетъ: $(+40)(+3)=+120$. Слѣд., можно сказать, что искомое разстояніе равно произведенію vt верстъ.

2) Пусть v отрицательное число, напр., -40, а t положительное число, напр. $+3$. Эти заданія надо понимать въ томъ смыслѣ, что поѣздъ шелъ отъ Москвы къ Петербургу, и надо опредѣлить его мѣсто въ моментъ, бывшій 3 часа послѣ полудня. Мы видѣли, что тогда оно лежитъ на 120 верстъ отъ Бологова, по направленію къ Петербургу (см. черт. 16), т.-е. искомое разстояніе равно -120 вер. Но и произведеніе vt въ этомъ случаѣ даетъ: $(-40)(+3)=$ $=-120$; значитъ, опять также можно сказать, что искомое разстояніе равно vt вер.

3) Пусть v положительное число, напр. $+40$, а t отрицательное число, напр. -3. Эти заданія означаютъ, что поѣздъ шелъ отъ Петербурга къ Москвѣ, и требуется опредѣлить его мѣсто въ моментъ, бывшій 3 часа до полудня. Это мѣсто находится на 120 верстъ отъ Бологова по направленію къ Петербургу (см. черт. 17); значитъ, искомое разстояніе равно -120 вер. Но и

произведеніе vt въ этомъ случаѣ даетъ: $(+40)(-3)=-120$; слѣдовательно, можно сказать, что искомое разстояніе равно vt верстъ.

4) Пусть, наконецъ, и v, и t означаютъ отрицательныя числа, напр., $v=-40$, $t=-3$. Эти заданія означаютъ, что поѣздъ шелъ по направленію отъ Москвы къ Петербургу, и что моментъ времени, въ который требуется опредѣлить мѣстонахожденіе поѣзда, былъ за 3 часа до полудня. Въ этомъ случаѣ, какъ мы видѣли, искомое мѣсто лежитъ на разстояніи 120 верстъ отъ Бологова, по направленію къ Москвѣ (см. черт. 18), т.-е. искомое разстояніе равно $+120$ вер. Но и произведеніе vt въ этомъ случаѣ даетъ: $(-40)(-3)=+120$; значитъ, и теперь можно сказать, что искомое разстояніе равно vt верстъ.

30. Опредѣленіе произведенія двухъ алгебраическихъ чиселъ. Произведеніемъ двухъ алгебраическихъ чиселъ наз. произведеніе ихъ абсолютныхъ величинъ, взятое со знакомъ + въ томъ случаѣ, когда перемножаемыя числа имѣютъ одинаковые знаки, и со знакомъ — въ томъ случаѣ, когда они противоположныхъ знаковъ.

Часть этого опредѣленія, касающаяся знаковъ, носитъ названіе **правила знаковъ;** его обыкновенно выражаютъ такъ. при умноженіи плюсъ на плюсъ и минусъ на минусъ даютъ плюсъ, а плюсъ на минусъ и минусъ на плюсъ даютъ минусъ; или короче: при умноженіи двухъ чиселъ одинаковые знаки даютъ +, разные знаки даютъ —.

Примѣры. $(+10)(+2)=+20$; вообще: $(+a)(+b)=+ab$;
$(-10)(+2)=-20$; $(-a)(+b)=-ab$;
$(+10)(-2)=-20$; $(+a)(-b)=-ab$;
$(-10)(-2)=+20$. $(-a)(-b)=+ab$.

31. Замѣчаніе. Изъ даннаго опредѣленія видно, что отъ умноженія на положительное число знакъ множимаго не измѣняется, а отъ умноженія на отрицательное число онъ перемѣняется на противоположный.

32. Обобщеніе формулъ умноженія. Формулы: $(+a)(+b)=+ab$, $(-a)(+b)=-ab$, $(+a)(-b)=-ab$,

$(-a)(-b)=+ab$, которыми выражается опредѣленіе произведенія алгебраическихъ чиселъ, остаются вѣрными и тогда, когда подъ буквами a и b будемъ подразумѣвать числа алгебраическія. Въ этомъ легко убѣдиться повѣркою. Возьмемъ, напр., послѣднее равенство: $(-a)(-b)=$ $=+ab$ и посмотримъ, во что оно обратится, если въ него на мѣсто a подставимъ число —5 и на мѣсто b число —2:

$$[-(-5)][-(-2)]=+(-5)(-2).$$

Такъ какъ выраженія: —(—5) и —(—2) равносильны соотвѣтственно такимъ: +5 и +2, то лѣвая часть равенства представляетъ собою произведеніе (+5)(+2), что равно +10. Въ правой части равенства произведеніе (—5)(—2) равно +10, а выраженіе +(+10) равносильно +10. Такимъ образомъ, обѣ части равенства даютъ одно и то же число +10, и, значитъ, оно вѣрно. Подобнымъ образомъ можемъ провѣрить и всѣ другія равенства.

33. Случай, когда какой-нибудь сомножитель равенъ нулю. Опредѣленіе произведенія алгебраическихъ чиселъ примѣняется и въ томъ случаѣ, когда какой-нибудь сомножитель равенъ нулю; надо только помнить, что абсолютная величина числа 0 есть 0 и что выраженія +0, —0 и просто 0 равносильны. Такимъ образомъ, $(+2)\,.\,0=+(2.0)=0$; $(-2)\,.\,0=$ $=-(2\,.\,0)=-0=0$; $0\,.\,(+2)=+(0\,.\,2)=+0=0$ и пр.

Мы видимъ такимъ образомъ, что когда какой-нибудь сомножитель равенъ 0, то и произведеніе равно нулю. Если еще примемъ во вниманіе, что когда ни одинъ изъ сомножителей не равенъ 0, то произведеніе не можетъ равняться 0 (такъ какъ въ этомъ случаѣ абсолютная величина произведенія не равна 0), то мы можемъ высказать такое свойство произведенія, которое неоднократно понадобится намъ впослѣдствіи:

для того, чтобы произведеніе равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы какой-нибудь сомножитель равнялся нулю.

34. Опредѣленіе произведенія 3-хъ и болѣе сомножителей. Произведеніемъ 3-хъ и болѣе данныхъ алгебраическихъ чиселъ, взятыхъ въ опредѣленномъ порядкѣ, называется (какъ

и въ ариѳметикѣ) **число, которое получится, если сначала умножимъ первое данное число на второе, потомъ полученное произведеніе умножимъ на третье данное число и т. д.** Напримѣръ, произведеніе слѣдующихъ 6 чиселъ:

$$(+2)(-1)(+3)(-10)(-4)(-1)$$

получится, если мы произведемъ умноженія въ такомъ порядкѣ:

$$(+2)(-1)=-2;\quad (-2)(+3)=-6;\quad (-6)(-10)=+60;$$
$$(+60)(-4)=-240;\quad (-240)(-1)=+240.$$

35. Знакъ произведенія. Если перемножаются только одни положительныя числа, то, конечно, знакъ окончательнаго произведенія долженъ быть $+$. Но когда всѣ или нѣкоторые сомножители числа отрицательныя (при чемъ ни одинъ изъ остальныхъ сомножителей не есть 0), то **произведеніе окажется со знакомъ $+$ въ томъ случаѣ, когда число отрицательныхъ сомножителей четное, и со знакомъ — въ томъ случаѣ, когда это число нечетное.** Такъ, произведенія:

$$(+2)(-1)(+3)(-10)=+60$$

и

$$(+2)(-1)(+3)(-10)(-4)(-1)=+240$$

оказались оба со знакомъ $+$ вслѣдствіе того, что въ нихъ число отрицательныхъ сомножителей четное (въ первомъ 2, во второмъ 4); тогда какъ произведенія:

$$(+2)(-1)=-2,\quad (+2)(-1)(+3)=-6,$$
$$(+2)(-1)(+3)(-10)(-4)=-240$$

оказались со знакомъ — вслѣдствіе того, что въ каждомъ изъ нихъ отрицательные сомножители входятъ въ нечетномъ числѣ.

Чтобы убѣдиться въ общности этого свойства, примемъ во вниманіе, что, каково бы ни было алгебраическое число a, произведеніе $(+1)\,a$ всегда равно a; напр, $(+1)\ (+3)=+3$ и $(+1)\ (-3)=-3$. Замѣтивъ это, возьмемъ произведеніе:

$abcd..$ или, что все равно: $(+1)\ abcd...$,

гдѣ буквы a, b, c, d... означаютъ какія-нибудь алгебраическія числа, положительныя или отрицательныя. Тогда отъ умноженія $+1$ послѣдовательно на a, b, c.. знакъ $+$ перемѣнится столько разъ, сколько встрѣтится отрицательныхъ множителей; значитъ, если этихъ множителей четное число, то знакъ $+$ перемѣнится четное число разъ, а если ихъ нечетное число,

то и знакъ + перемѣнится нечетное число разъ. Но знак +, измѣнившись четное число разъ, остается +, а измѣнившись нечетное число разъ, онъ дѣлается—. Отсюда выводится указанное выше свойство.

36. Свойства произведенія. Эти свойства тѣ же, какія принадлежатъ и произведенію ариѳметическихъ чиселъ (§ 8), а именно:

1°. **Перемѣстительное свойство:** произведеніе не измѣняется отъ перемѣны порядка сомножителей.

Для двухъ сомножителей это слѣдуетъ непосредственно изъ опредѣленія произведенія алгебраическихъ чиселъ и перемѣстительнаго свойства произведенія ариѳметическихъ чиселъ. Такъ, принявъ во вниманіе, что если a и b означаютъ какія-нибудь ариѳметическія числа, то $ab=ba$, мы будемъ имѣть согласно опредѣленію умноженія алгебраическихъ чиселъ;

$$(+a)(+b)=+ab \quad \text{и} \quad (+b)(+a)=+ba=+ab$$
$$(-a)(+b)=-ab \quad \text{и} \quad (+b)(-a)=-ba=-ab$$
$$(+a)(-b)=-ab \quad \text{и} \quad (-b)(+a)=-ba=-ab$$
$$(-a)(-b)=+ab \quad \text{и} \quad (-b)(-a)=+ba=+ab$$

Точно такъ же: $(\pm a) \,.\, 0=0$ и $0 \,.\, (\pm a)=0$.

Возьмемъ теперь произведеніе, состоящее болѣе, чѣмъ изъ 2-хъ сомножителей, напр., такое:

$$(-a)(-b)(-c)(+d)\ldots$$

Изъ опредѣленія произведенія алгебраическихъ чиселъ слѣдуетъ, что абсолютная величина даннаго произведенія равна $abcd$; знакъ же окажется + или —, смотря по тому, въ четномъ числѣ, или въ нечетномъ, входятъ въ произведеніе отрицательные сомножители. Если мы переставимъ сомножителей какъ-нибудь, напр., такъ:

$$(-c)(+d)(-b)(+a)\ldots,$$

то получимъ новое произведеніе, у котораго абсолютная величина равна $cdba\ldots$ и знакъ будетъ + или —, смотря по тому, въ четномъ числѣ, или въ нечетномъ, входятъ въ это новое произведеніе отрицательные сомножители. Такъ какъ $cdba\ldots=abcd\ldots$ (по перемѣстительному свойству произведенія ариѳметическихъ чиселъ), и число отрицательныхъ сомножителей отъ перемѣщенія

ихъ, очевидно, не могло измѣниться, то у обоихъ произведеній абсолютная величина будетъ одна и та же и знаки одинаковы; слѣдовательно:

$$(+a)(-b)(-c)(+d)...=(-c)(+d)(-b)(+a)...$$

Равенство это остается въ силѣ и тогда, когда въ числѣ сомножителей есть равные нулю, такъ какъ въ этомъ случаѣ всѣ произведенія окажутся нулями.

2°. **Сочетательное свойство:** произведеніе не измѣнится, если какихъ-либо сомножителей мы замѣнимъ ихъ произведеніемъ.

Напримѣръ, вычисляя произведеніе (—5)(+3)(—2), мы можемъ сомножителей (+3) и (—2) замѣнить ихъ произведеніемъ —6. Дѣйствительно, примѣняя перемѣстительное свойство, мы можемъ написать:

$$(-5)(+3)(-2)=(+3)(-2)(-5)=(-6)(-5)=$$
$$=(-5)(-6)=(-5)[(+3)(-2)].$$

Въ примѣненіи къ произведенію трехъ алгебраическихъ чиселъ abc мы можемъ сочетательное свойство выразить такою формулой:

$$abc=a(bc).$$

Читая это равенство справа налѣво, мы можемъ то же свойство высказать другими словами: чтобы умножить какое-нибудь число на произведеніе, достаточно умножить это число на перваго сомножителя, полученное произведеніе умножить на второго сомножителя и т. д.

Слѣдствіе. Чтобы вычислить произведеніе нѣсколькихъ сомножителей, можно разбить ихъ на какія угодно группы, произвести умноженіе въ каждой группѣ отдѣльно и полученныя произведенія перемножить.

3°. **Распредѣлительное свойство:** чтобы умножить алгебраическую сумму на алгебраическое число, достаточно умножить на это число каждое слагаемое отдѣльно и полученныя произведенія сложить.

Ограничимся повѣркою этого свойства на частныхъ примѣрахъ.

Примѣръ 1. $[(-2)+9+(-3)].(+7)$.

Если вычислимъ сначала сумму, а потомъ сдѣлаемъ умноженіе, то найдемъ:

$$(+4)(+7)=+28.$$

Умножимъ теперь каждое слагаемое отдѣльно на $+7$ и сложимъ результаты:

$$(-2)(+7)=-14;\quad (+9)(+7)=+63;\quad (-3)(+7)=-21;$$
$$-14+63-21=+63-35=+28.$$

Мы получили то же самое число $+28$.

Примѣръ 2. $[8+(-2)+(-3)](-10)$.

Вычисливъ сумму и умноживъ ее на -10, находимъ $(+3)(-10)=-30$. Произведя умноженіе каждаго слагаемаго отдѣльно, получимъ то же самое число -30:

$$8(-10)=-80;\ (-2)(-10)=+20;\ (-3)(-10)=+30;$$
$$-80+20+30=-30.$$

37. Доказательство распредѣлительнаго свойства. Требуется доказать, что каковы бы ни были алгебраическія числа a, b, c и m всегда:

$$(a+b+c)m=am+bm+cm.$$

Разсмотримъ особо слѣдующіе 3 случая:

1°, m есть положительное цѣлое число, напр., $m=+3$ или проще: $m=3$. Умножить какое-нибудь число на 3 значитъ повторить это число слагаемымъ 3 раза; поэтому:

$$(a+b+c).\ 3=(a+b+c)+(a+b+c)+(a+b+c).$$

Чтобы прибавить сумму, достаточно прибавить каждое слагаемое одно за другимъ; поэтому написанное равенство можно переписать такъ:

$$(a+b+c).3=a+b+c+a+b+c+a+b+c.$$

Въ правой части этого равенства сгруппируемъ слагаемыя такъ:

$$(a+b+c).3=(a+a+a)+(b+b+b)+(c+c+c)=a\,3+b.3+c.3.$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что распредѣлительное свойство въ этомъ случаѣ дѣйствительно имѣетъ мѣсто.

2°, m есть положительная дробь, напр., $m=+\frac{7}{5}$ или проще: $m=\frac{7}{5}$. Умножить какое-нибудь число на $\frac{7}{5}$ значитъ найти $\frac{7}{5}$ этого числа, для чего достаточно найти сначала $\frac{1}{5}$ часть числа а затѣмъ эту часть по-

множить на 7. Но $\frac{1}{5}$ отъ $a+b+c$ есть $\frac{a}{5}+\frac{b}{5}+\frac{c}{5}$, такъ какъ, умноживъ послѣднюю сумму на цѣлое число 5 (согласно распредѣлительному свойству доказанному для m цѣлаго), мы получимъ $a+b+c$:

$$\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{5}+\frac{c}{5}\right).5=\frac{a}{5}.5+\frac{b}{5}.5+\frac{c}{5}.5=a+b+c.$$

Если же $\frac{1}{5}$ отъ $a+b+c$ есть $\frac{a}{5}+\frac{b}{5}+\frac{c}{5}$, то $\frac{7}{5}$ отъ $a+b+c$ равнь $\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{5}+\frac{c}{5}\right).7$, что, согласно доказанному въ 1-мъ случаѣ, составляетъ $\frac{a}{5}.7+\frac{b}{5}.7+\frac{c}{5}.7$. Выраженіе $\frac{a}{5}.7$ представляетъ собою пятую часть a повторенную слагаемымъ 7 разъ; значитъ, оно составляетъ $\frac{7}{5}$ числа a и потому его можно замѣнить произведеніемъ $a.\frac{7}{5}$. То же самое можно сказать о выраженіяхъ $\frac{b}{5}.7$ и $\frac{c}{5}.7$. Поэтому мы можемъ написать:

$$\left(a+b+c\right).\frac{7}{5}=\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{5}+\frac{c}{5}\right).7=a.\frac{7}{5}+b.\frac{7}{5}+c.\frac{7}{5}$$

Такимъ образомъ распредѣлительное свойство и для этого случая доказано.

3°, m есть отрицательное число, напр., $m=-7$. Умножить какое-нибудь число на -7 значитъ умножить это число на 7 и результатъ взять съ противоположнымъ знакомъ. Умноживъ $a+b+c$ на 7, получимъ, по доказанному $a.7+b.7+c.7$. Чтобы эту сумму взять съ противоположнымъ знакомъ, достаточно перемѣнить знакъ у каждаго слагаемаго суммы (§ 20, 3°). Но $-(a.7)=a.(-7)$, $-(b.7)=b.(-7)$ и $-(c.7)=c.(-7)$; поэтому:

$$(a+b+c).(-7)=a.(-7)+b.(-7)+c.(-7).$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что каково бы ни было алгебраическое число m, всегда

$$(a+b+c)m=am+bm+cm$$

Дѣленіе алгебраическихъ чиселъ.

38. Опредѣленіе. Дѣленіе алгебраическихъ чиселъ опредѣляется такъ же, какъ и дѣленіе ариѳметическихъ чиселъ, а именно: **дѣленіе есть дѣйствіе** (обратное умноженію), **посредствомъ котораго по данному произведенію двухъ сомножителей и одному изъ этихъ сомножителей отыскивается другой.** Такъ, раздѣлить $+10$ на -2 значитъ найти такое число x, чтобы произведеніе $(-2)x$ или — все равно — произведеніе $x(-2)$ равнялось $+10$; такое число есть, и притомъ

только одно, именно —5, такъ какъ произведенie числа —5 на —2 равно +10, а произведенie какого-нибудь числа, отличнаго отъ —5, на —2 не можетъ составить +10.

39. Случаи, когда какое-нибудь данное число равно нулю. Такихъ случаевъ можетъ быть т р и, а именно.

1) **Если дѣлимое равно 0, а дѣлитель не равенъ 0, то частное должно быть 0.**

Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлить 0 на какое-нибудь число a значитъ найти такое число, которое, умноженное на a, даетъ въ произведенiи 0. Такое число есть, и только одно, именно 0; значитъ, $0 : a = 0$.

2) **Если дѣлимое равно 0 и дѣлитель равенъ 0, то частное можетъ равняться любому числу,**

потому что всякое число, умноженное на 0, даетъ въ произведенiи 0; слѣд., частное 0 : 0 равно всякому числу.

3) **Если дѣлимое не равно 0, а дѣлитель равенъ нулю, то частное не существуетъ,**

потому что, какое бы число мы не предположили въ частномъ, оно, умноженное на 0, даетъ въ произведенiи 0, а не какое-либо другое число; значитъ, частное $a . 0$ невозможно, если a не равно 0.

Такимъ образомъ, **если дѣлитель равенъ 0,** то дѣленiе или невозможно (если дѣлимое не равно 0), или есть дѣйствiе неопредѣленное (если дѣлимое равно 0); поэтому с л у ч а й э т о т ъ м ы в о о б щ е б у д е м ъ и с к л ю ч а т ь.

40. Правило дѣленiя. Чтобы раздѣлить одно алгебраическое число на другое, дѣлятъ ихъ абсолютныя величины и результатъ берутъ со знакомъ +, когда дѣлимое и дѣлитель имѣютъ одинаковые знаки, и со знакомъ —, когда у дѣлимаго и дѣлителя знаки разные.

Такъ: $(+10) : (+2) = +5$, потому что $(+2)(+5) = +10$.

$(-10) : (-2) = +5$, » » $(-2)(+5) = -10$

$(-10) : (+2) = -5$, » » $(+2)(-5) = -10$.

$(+10) : (-2) = -5$, » » $(-2)(-5) = +10$.

Такимъ образомъ, правило знаковъ при дѣленiи остается то же самое, что и при умноженiи.

41. Другое правило дѣленія. Можно указать болѣе простое правило дѣленія, если предварительно условиться въ значеніи термина «обратное» число.

Числомъ, обратнымъ данному алгебраическому числу a, называется такое алгебраическое число, которое получается отъ дѣленія $+1$ на a; другими словами, такое число, которое, умноженное на a, даетъ въ произведеніи $+1$. Такимъ образомъ:

числу $+3$ соотвѣтствуетъ обратное число $(+1):(+3)=+\frac{1}{3}$,
» -3 » » » $(+1):(-3)=-\frac{1}{3}$,
» $+\frac{5}{8}$ » » » $(+1):(+\frac{5}{8})=+\frac{8}{5}$,
» $-\frac{5}{8}$ » » » $(+1):(-\frac{5}{8})=-\frac{8}{5}$.

Такъ какъ дѣленіе на нуль невозможно, то число 0 не имѣетъ себѣ обратнаго числа; всякому другому алгебраическому числу соотвѣтствуетъ свое обратное число (и только одно).

Теперь мы можемъ высказать другое правило дѣленія такъ: **чтобы раздѣлить одно число на другое, достаточно дѣлимое умножить на число, обратное дѣлителю.** Въ этомъ легко убѣдиться повѣркою; напр., $(-10):(+5)=-2$ и $(-10).(+\frac{1}{5})=-\frac{10}{5}=-2$, и т. п.

42. Нѣкоторыя свойства дѣленія. 1°. **Чтобы раздѣлить какое-нибудь число на произведеніе, достаточно раздѣлить это число на перваго сомножителя, полученное частное раздѣлить на второго сомножителя, это частное — на третьяго сомножителя и т. д.**

Такъ: $(-40):[(+5)(-2)]=[(-40):(+5)]:(-2)=$
$=(-8):(-2)=+4.$

Вообще: $a:(bc)=(a:b):c$

(здѣсь буквы: a, b и c означаютъ какія угодно алгебраическія числа, лишь бы только числа b и c не были равны 0).

Чтобы убѣдиться въ вѣрности этого равенства, умножимъ предполагаемое частное на дѣлителя bc; если послѣ умноженія получимъ дѣлимое a, то это будетъ значить, что предполагаемое частное вѣрно. Вмѣсто того, чтобы умножить на bc, мы можемъ умножить на cb. Чтобы умножить какое-нибудь число

на cb, можно умножить это число на c и затѣмъ результатъ умножить на b. Умноживъ предполагаемое частное $(a:b):c$ на c, получимъ (по опредѣленію дѣленія) число $a:b$; умноживъ это число на b, получимъ дѣлимое a. Слѣд., предполагаемое частное вѣрно.

2^0. **Чтобы раздѣлить произведеніе на какое-нибудь число, достаточно раздѣлить на это число одного изъ сомножителей.**

Такъ:
$$[(-20)(+15)]:(-5)=[(-20):(-5)](+15)=$$
$$=(+4)(+15)=+60,$$
или
$$[(-20)(+15)]:(-5)=(-20)[(+15):(-5)]=$$
$$=(-20)(-3)=+60.$$

Вообще:
$$(ab):c=(a:c)b,$$
или
$$(ab):c=a(b:c)$$
(здѣсь буквы a, b и c означаютъ какія угодно алгебраическія числа, лишь бы только c не было равно 0).

Чтобы убѣдиться въ вѣрности этихъ равенствъ, умножимъ каждое изъ этихъ предполагаемыхъ частныхъ на дѣлителя c; если послѣ умноженія получимъ дѣлимое ab, то заключимъ, что равенства вѣрны. Оба предполагаемыя частныя представляютъ собой произведеніе. Чтобы умножить произведеніе, достаточно умножить одного изъ сомножителей. Умноживъ на c въ первомъ предполагаемомъ частномъ сомножителя $(a:c)$, а во второмъ предполагаемомъ частномъ сомножителя $(b:c)$, мы получимъ въ окончательномъ результатѣ дѣлимое ab; значитъ, оба равенства вѣрны.

ГЛАВА IV.

Раздѣленіе алгебраическихъ выраженій.

43. Предварительныя замѣчанія. 1^0. Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ предполагать (если не сдѣлано особыхъ оговорокъ), что буквы, входящія въ алгебраическія выраженія, означаютъ числа алгебраическія, какъ положительныя, такъ и отрицательныя; буквы могутъ также

означать и число 0, кромѣ случая, когда онѣ входятъ въ выраженіе въ качествѣ дѣлителя: дѣленіе на 0 мы вообще исключаемъ (§ 39).

2⁰. Если случится, что въ какомъ-либо произведеніи есть нѣсколько сомножителей, выраженныхъ цыфрами, или нѣкоторые буквенные сомножители повторяются, что такія произведенія можно упростить, пользуясь сочетательнымъ свойствомъ произведенія (§ 36, 2⁰). Возьмемъ, напр., произведеніе: $a3ab a(-2) cb$. Сгруппируемъ его сомножителей такъ: къ первой группѣ отнесемъ всѣхъ сомножителей, выраженныхъ цыфрами, ко второй группѣ—всѣхъ сомножителей, обозначенныхъ буквою a, къ третьей—всѣхъ сомножителей, обозначенныхъ буквою b, и т. д. Тогда мы получимъ выраженіе: $[3.(-2)](aaa)(bb)c$, которое можно написать проще такъ: $-6a^3b^2c$.

Въ дальнѣйшемъ мы всегда будемъ предполагать, что произведенія приведены къ такому упрощенному виду.

44. Раздѣленіе алгебраическихъ выраженій.

Алгебраическое выраженіе наз. раціональнымъ относительно какой-нибудь буквы, входящей въ это выраженіе, если буква эта не стоитъ подъ знакомъ извлеченія корня; въ противномъ случаѣ выраженіе наз. ирраціональнымъ.

Напр., выраженіе $3ab+2\sqrt{x}$ есть раціональное относительно a и b и ирраціональное относительно x.

Въ началѣ курса алгебры мы будемъ говорить только о такихъ алгебраическихъ выраженіяхъ, которыя раціональны относительно всѣхъ входящихъ въ нихъ буквъ (такія выраженія наз. просто раціональными, безъ добавленія: «относительно всѣхъ буквъ»).

Алгебраическое выраженіе наз. цѣлымъ относительно какой-нибудь буквы, если эта буква не входитъ въ него дѣлителемъ или частью дѣлителя; въ противномъ случаѣ выраженіе наз. дробнымъ.

Напр., выраженіе $x^2+\frac{2x}{a-1}$ есть цѣлое относительно x, но дробное относительно a.

Въ началѣ курса алгебры мы будемъ говорить бо́льшею частью только о такихъ алгебраическихъ выраженіяхъ, которыя

можно назвать цѣлыми относительно в с ѣ х ъ буквъ, входящихъ въ нихъ (ихъ просто называютъ ц ѣ л ы м и, безъ добавленія: «относительно всѣхъ буквъ»).

Алгебраическое выраженіе, представляющее собою произведеніе нѣсколькихъ сомножителей, наз. о д н о ч л е н о м ъ.

Напр., выраженія: $-6a^3b^2c, +0,5xy^3$, $2m^3$ и т. п. суть одночлены.

Одночленомъ принято называть также и всякое отдѣльно взятое число, выраженное буквою или цыфрами, напр.: $a, x, -3$.

Число всѣхъ буквенныхъ сомножителей, составляющихъ одночленъ, наз. его **измѣреніемъ**; такъ, одночленъ $3a^2bc$, который представляетъ собою произведеніе $3aabc$, есть одночленъ четвертаго измѣренія, одночленъ $10x^3$—третьяго измѣренія.

45. Коэффиціентъ. Выраженный цыфрами сомножитель, стоящій впереди одночлена, наз. **коэффиціентомъ** его. Такъ, въ одночленѣ $-6a^3b^2c$ число -6 есть коэффиціентъ этого одночлена [1]).

Цѣлый положительный коэффиціентъ означаетъ, сколько разъ повторяется слагаемымъ то буквенное выраженіе, передъ которымъ онъ стоитъ. Напр., $3ab=(ab) \cdot 3=ab+ab+ab$.

Дробный положительный коэффиціентъ означаетъ, какая дробь берется отъ буквеннаго выраженія, къ которому онъ относится. Такъ, въ выраженіи $\frac{5}{4}x^2$ коэффиціентъ означаетъ, что отъ x^2 берется $\frac{5}{4}$, потому что $\frac{5}{4}x^2=x^2 \cdot \frac{5}{4}$, а умножить на $\frac{5}{4}$ значитъ взять $\frac{5}{4}$ отъ множимаго.

Отрицательный коэффиціентъ означаетъ, что буквенное выраженіе, передъ которымъ онъ стоитъ, умножается на абсолютную величину этого коэффиціента и результатъ берется съ противоположнымъ знакомъ.

Замѣчанія. 1°. При одночленѣ, не имѣющемъ коэффиціента, можно подразумѣвать коэффиціентъ $+1$ или -1, смотря

[1]) Если нѣкоторымъ буквамъ одночлена придаютъ особое значеніе, отличая ихъ отъ остальныхъ, то коэффиціентъ можетъ быть и б у к в е н н ы й. Напримѣръ, если въ одночленѣ $2Ax^3$ мы почему либо буквѣ x придаемъ особое значеніе, то можно сказать, что $2A$ есть коэффиціентъ при x^3.

по знаку, который стоитъ (или подразумѣвается) передъ одночленомъ; такъ, $+ab$ (или ab) все равно, что $+1ab$, и $-ab$ все равно, что $(-1)\ ab$.

2⁰. Не должно думать, что одночленъ, передъ которымъ стоитъ знакъ —, представляетъ собою всегда отрицательное число, а одночленъ со знакомъ + есть всегда число положительное. Напримѣръ, при $a=-3$ и $b=+4$ одночленъ $+2ab$ даетъ отрицательное число: $(+2)(-3)(+4)=-24$, тогда какъ при тѣхъ же значеніяхъ буквъ одночленъ $-2ab$ даетъ число положительное: $(-2)(-3)(+4)=+24$.

46. Многочленъ. Алгебраическое выраженіе, составленное изъ нѣсколькихъ другихъ алгебраическихъ выраженій, соединенныхъ между собою знаками + или —, наз. **многочленомъ.** Таково, напр., выраженіе:

$$ab-a^2+3b^2-bc+\frac{a-b}{2}.$$

Отдѣльныя выраженія, отъ соединенія которыхъ знаками + или — составился многочленъ, наз. членами его. Члены многочлена разсматриваются вмѣстѣ съ тѣми знаками, которые стоятъ передъ ними; напр., говорятъ: членъ $-a^2$, членъ $+3b^2$, и т. п. Передъ первымъ членомъ, если передъ нимъ не поставлено никакого знака (какъ въ приведенномъ примѣрѣ), можно подразумѣвать знакъ +.

Многочленъ, состоящій изъ двухъ членовъ, наз. двучленомъ (или биномомъ), изъ трехъ членовъ — трехчленомъ (или триномомъ) и т. д.

Многочленъ наз. раціональнымъ, если всѣ его члены раціональные, и цѣлымъ, если всѣ его члены цѣлые.

Цѣлый многочленъ наз. однороднымъ, если всѣ его члены суть одночлены, имѣющіе одинаковое измѣреніе. Напримѣръ, выраженіе $2ab^2+a^3-5abc$ есть однородный многочленъ третьяго измѣренія.

47. Главнѣйшія свойства многочлена. Всякій многочленъ можно разсматривать, какъ

алгебраическую сумму его членовъ. Напримѣръ, многочленъ:

$$2a^2-ab+b^2-\tfrac{1}{2}a+b$$

можно представить въ видѣ такой суммы:

$$(+2a^2)+(-ab)+(+b^2)+(-\tfrac{1}{2}a)+(+b),$$

такъ какъ при всякихъ численныхъ значеніяхъ буквъ, выраженіе $+2a^2$ равносильно выраженію $2a^2$, выраженіе $+(-ab)$ равносильно выраженію $-ab$, и т. д. (§ 25).

Вслѣдствіе этого всѣ свойства суммы алгебраическихъ чиселъ (§ 20), принадлежатъ также и многочлену. Эти свойства слѣдующія:

1^0. **Перемѣстительное свойство.** Численная величина многочлена не зависитъ отъ порядка его членовъ.

Положимъ, напр., мы находимъ численную величину многочлена:

$$2a^2-ab+b^2-\tfrac{1}{2}a+b$$

при $a=4$ и $b=-3$. Для этого предварительно вычислимъ каждый членъ отдѣльно:

$$2a^2=2(4\,.\,4)=32;\quad -ab=-4\,.\,(-3)=+12;$$
$$+b^2=+(-3)(-3)=+9;\ -\tfrac{1}{2}a=-\tfrac{1}{2}\,.\,4=-2.$$

Теперь сложимъ всѣ полученныя числа или въ томъ порядкѣ, въ какомъ написаны члены многочлена:

$$32+(+12)+(+9)+(-2)+(-3)=32+12+9-2-3=48,$$

или въ какомъ-нибудь иномъ порядкѣ; всегда получимъ одно и то же число 48.

2^2. **Сочетательное свойство.** Численная величина многочлена не измѣнится, если какіе-либо его члены мы замѣнимъ ихъ алгебраической суммой.

Такъ, если въ данномъ выше многочленѣ мы замѣнимъ члены: $-ab$, $+b^2$ и $-\frac{1}{2}a$ ихъ алгебраическою суммою, т.-е. возьмемъ этотъ многочленъ въ такомъ видѣ:

$$2a^2+(-ab+b^2-\tfrac{1}{2}a)+b,$$

то при $a=4$ и $b=-3$ получимъ:

$$32+(12+9-2)-3=32+19-3=48,$$

т.-е. получимъ то же самое число 48, какое получили прежде.

3^3. Перемѣна знаковъ передъ членами многочлена. Если передъ каждымъ членомъ многочлена перемѣнимъ знакъ на противоположный, то получимъ новый многочленъ, численная величина котораго противоположна численной величинѣ перваго многочлена.

Напр., численная величина многочлена $2a^2-ab+b^2-\frac{1}{2}a+b$ при $a=4$ и $b=-3$ равна, какъ мы видѣли, 48; перемѣнивъ передъ всѣми членами знаки на противоположные, мы получимъ новый многочленъ:

$$-2a^2+ab-b^2+\tfrac{1}{2}a-b,$$

численная величина котораго при тѣхъ же значеніяхъ буквъ составляетъ не 48, а —48:

$$-32+(-12)-9+2-(-3)=-32-12-9+2+3=-48.$$

ГЛАВА V.

Приведеніе подобныхъ членовъ.

48. Подобные члены. Члены многочлена, отличающіеся только коэффиціентами, или же не отличающіеся ничѣмъ, наз. подобными. Напримѣръ, въ такомъ многочленѣ:

$$\underline{4a^2b^3}-\underline{\underline{3ab}}+\underline{0,5a^2b^3}+3a^2c+\underline{\underline{8ab}}$$

первый членъ подобенъ третьему, потому что эти члены отличаются только коэффиціентами (у перваго члена коэффиціентъ +4, а у третьяго +0,5); второй членъ подобенъ пятому по той же причинѣ (коэффиціентъ у второго члена —3, а у пятаго +8). Членъ $+3a^2c$ не имѣетъ себѣ подобныхъ, потому что онъ отличается отъ остальныхъ членовъ буквами и показателями при нихъ.

49. Приведеніе подобныхъ членовъ. Когда въ многочленѣ встрѣчаются подобные члены [1]), то его можно

---

[1]) Чтобы легче было находить подобные члены, полезно члены многочлена всегда писать такъ, чтобы буквенные множители, входящіе въ составъ этихъ членовъ, были расположены въ алфавитномъ порядкѣ; напр., членъ $+3b^2a^3$ лучше писать такъ: $+3a^3b^2$

упростить, соединяя всѣ подобные между собою члены въ одинъ. Такое соединеніе наз. **приведеніемъ подобныхъ членовъ.**

Положимъ, напр., что въ какомъ-нибудь многочленѣ имѣются такіе подобные члены: $+3a$, $-2a$, $-a$, $+5\frac{1}{2}a$ Будутъ ли эти члены слѣдовать одинъ за другимъ, или они будутъ раздѣляться какими-нибудь другими членами, мы всегда можемъ, основываясь на сочетательномъ свойствѣ многочлена, замѣнить всѣ эти члены ихъ алгебраическою суммою $+3a-2a-a+5\frac{1}{2}a$. Но

$$+3a-2a-a+5\tfrac{1}{2}a=(+3-2-1+5\tfrac{1}{2})a,$$

такъ какъ, согласно распредѣлительному свойству умноженія (§ 36, 3°), чтобы умножить алгебраическую сумму $+3-2-1+5\frac{1}{2}$ на число a, достаточно умножить на a каждое слагаемое этой суммы отдѣльно. Сумма $+3-2-1+5\frac{1}{2}$ равна $+5\frac{1}{2}$, поэтому:

$$+3a-2a-a+5\tfrac{1}{2}a=+5\tfrac{1}{2}a.$$

Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ слѣдующему выводу: **нѣсколько подобныхъ чиселъ многочлена можно замѣнить однимъ подобнымъ имъ членомъ, у котораго коэффиціентъ равенъ алгебраической суммѣ коэффиціентовъ этихъ членовъ.**

Примѣры.

1) $a+\underline{5mx}-\underline{2mx}+\underline{7mx}-\underline{8mx}=a+(5-2+7-8)mx=a+2mx;$

2) $\underline{4ax}+b^2-\underline{7ax}-\underline{3ax}+\underline{2ax}=(4-7-3+2)ax+b^2=-4ax+b^2=$
$=b^2-4ax.$

3) $\underline{4a^2b^3}-\underline{\underline{3ab}}+\underline{0{,}5a^2b^3}+3a^2c+\underline{\underline{8ab}}=(4+0{,}5)a^2b^3+(-3+8)ab+$
$+3a^2c=4{,}5a^2b^3+5ab+3a^2c.$

ОТДѢЛЪ II.

Первыя четыре алгебраическія дѣйствія.

50. Общее замѣчаніе. Всѣ алгебраическія дѣйствія представляютъ собою преобразованія одного алгебраическаго выраженія въ другое, тождественное первому. Такъ, сложеніе многочленовъ есть преобразованіе суммы многочленовъ въ одинъ многочленъ (или одночленъ), тождественный съ суммою данныхъ многочленовъ; умноженіе одночленовъ есть преобразованіе произведенія одночленовъ въ новый одночленъ, тождественный съ этимъ произведеніемъ, и т п.

ГЛАВА I.

Алгебраическое сложеніе и вычитаніе.

51. Сложеніе одночленовъ. Пусть требуется сложить одночлены: $3a$, $-5b$, $+0{,}2a$, $-7b$ и c. Ихъ сумма выразится такъ:

$$3a+(-5b)+(+0{,}2a)+(-7b)+c.$$

Но выраженія: $+(-5b)$, $+(+0{,}2a)$, $+(-7b)$, при всякихъ значеніяхъ буквъ a и b равносильны (§ 25) соотвѣтственно выраженіямъ: $-5b$, $+0{,}2a$, $-7b$; поэтому сумму данныхъ одночленовъ можно переписать проще такъ:

$$\underline{3a}-\underline{\underline{5b}}+\underline{0{,}2a}-\underline{\underline{7b}}+c,$$

что, послѣ приведенія подобныхъ членовъ, даетъ: $3{,}2a-12b+c$.

Правило. Чтобы сложить нѣсколько одночленовъ, пишутъ ихъ одинъ за другимъ съ ихъ знаками и дѣлаютъ приведеніе подобныхъ членовъ, если они окажутся.

52. Сложеніе многочленовъ. Пусть требуется къ какому-нибудь числу A приложить многочленъ $a—b+c—d$:

$$A+(a-b+c-d).$$

Многочленъ $a—b+c—d$ представляетъ собою сумму алгебраическихъ чиселъ: $a+(-b)+c+(-d)$; но чтобы прибавить сумму, достаточно прибавить каждое слагаемое одно за другимъ (§ 20,2°); поэтому: $A+(a-b+c-d)=A+a+(-b)+c+(-d)$,

что, согласно формуламъ двойныхъ знаковъ (§ 25), можно переписать такъ: $A+(a-b+c-d)=A+a-b+c-d$.

Правило. Чтобы прибавить многочленъ къ какому-нибудь числу, приписываютъ къ этому числу всѣ члены многочлена одинъ за другимъ съ ихъ знаками (при чемъ предъ тѣмъ членомъ, при которомъ не стоитъ никакого знака, должно подразумѣвать знакъ $+$) **и дѣлаютъ приведеніе подобныхъ членовъ, если они окажутся.**

Примѣръ. $(3a^2-5ab+b^2)+(4ab-b^2+7a^2)$.

То, что мы обозначили сейчасъ буквой A, дано теперь въ видѣ многочлена $3a^2-5ab+b^2$. Примѣняя указанное правило сложенія, найдемъ:

$$(3a^2-5ab+b^2)+(4ab-b^2+7a^2)=(3a^2-5ab+b^2)+4ab-b^2+7a.$$

Въ полученномъ результатѣ скобки могутъ быть отброшены, потому что отъ этого смыслъ выраженія не измѣнится:

$$3a^2-5ab+b^2+4ab-b^2+7a^2.$$

Приведя въ этомъ многочленѣ подобные члены, получимъ окончательно:

$$10a^2-ab.$$

Замѣчаніе. Если данные многочлены содержатъ *подобные члены*, то полезно писать слагаемыя одно подъ другимъ такъ, чтобы подобные члены стояли подъ подобными; напр.,

$$+\begin{cases} 3ax^2-\frac{1}{2}a^2x+2a^3 \\ -5ax^2+7a^2x-a^3 \\ \frac{3}{4}ax^2-2a^2x+0{,}3a^3 \end{cases}$$

$$\overline{-1\tfrac{1}{4}ax^2+4\tfrac{1}{2}a^2x+1{,}3a^3}$$

53. Вычитаніе одночленовъ. Пусть требуется изъ одночлена $10ax^2$ вычесть одночленъ $-3a^2x$:

$$10a^2x-(-3a^2x).$$

Для этого, согласно общему правилу вычитанія (§ 23), до-достаточно къ уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому. Число, противоположное одночлену $-3a^2x$, есть $3a^2x$; значитъ:

$$10a^2x-(-3a^2x)=10a^2x+3a^2x,$$

что, послѣ приведенія подобныхъ членовъ, даетъ $13a^2x$.

Правило. Чтобы вычесть одночленъ, приписываютъ къ уменьшаемому этотъ одночленъ съ противоположнымъ знакомъ и дѣлаютъ приведеніе подобныхъ членовъ, если они окажутся.

54. Вычитаніе многочленовъ. Пусть требуется изъ какого-нибудь числа A вычесть многочленъ $a-b+c$:

$$A-(a-b+c).$$

Для этого достаточно прибавить къ A число, противоположное числу $a-b+c$. Такое число есть (§ 47,3⁰) $-a+b-c$. Слѣдов.,

$$A-(a-b+c)=A+(-a+b-c).$$

Примѣняя теперь правило сложенія многочленовъ, получимъ:

$$A-(a-b+c)=A-a+b-c.$$

Правило. Чтобы вычесть многочленъ, приписываютъ къ уменьшаемому всѣ члены вычитаемаго съ противоположными знаками и дѣлаютъ приведеніе подобныхъ членовъ, если они окажутся.

Замѣчаніе. Когда въ многочленахъ есть подобные члены, то вычитаемый многочленъ полезно писать подъ уменьшаемымъ, перемѣняя у вычитаемаго многочлена знаки на обратные; напр., вычитаніе;

$$(7a^2-2ab+b^2)-(5a^2-2b^2+4ab)$$

всего удобнѣе располагать такъ:

$$\begin{array}{r} 7a^2-2ab+\ b^2 \\ \underline{\overset{-}{+}5a^2\overset{-}{+}4ab\overset{+}{-}2b^2} \\ 2a^2-6ab+3b^2. \end{array}$$

(въ вычитаемомъ многочленѣ верхніе знаки поставлены тѣ, какіе были даны, *а внизу они перемѣнены* на обратные).

55. Раскрытіе скобокъ, передъ которыми стоитъ знакъ + или —. Пусть требуется раскрыть скобки въ выраженіи:

$$2a+(a-3b+c)-(2a-b+2c).$$

Это надо понимать такъ, что требуется надъ многочленами, стоящими внутри скобокъ, произвести тѣ дѣйствія, которыя указываются знаками передъ скобками. Произведя эти дѣйствія по правиламъ сложенія и вычитанія, получимъ:

$$2a+a-3b+c-2a+b-2c=a-2b-c.$$

Изъ правилъ сложенія и вычитанія многочленовъ слѣдуетъ, что, раскрывая скобки, передъ которыми стоитъ +, мы не должны измѣнять знаковъ внутри скобокъ, а раскрывая скобки, передъ которыми стоитъ знакъ —, мы должны передъ всѣми членами, стоящими внутри скобокъ, измѣнить знаки на противоположные.

Пусть еще требуется раскрыть скобки въ выраженіи:

$$10p-[3p+(5p-10)-4].$$

Для этого раскроемъ сначала внутреннія скобки, а затѣмъ внѣшнія:

$$10p-[3p+5p-10-4]=10p-3p-5p+10+4=2p+14.$$

Можно поступать и въ обратномъ порядкѣ, т.-е. сначала раскрыть внѣшнія скобки, а потомъ внутреннія. Раскрывая внѣшнія скобки, мы должны принимать многочленъ, стоящій во внутреннихъ скобкахъ, за одночленъ и поэтому не должны измѣнять знаковъ внутри этихъ скобокъ:

$$10p-[3p+(5p-10)-4]=10p-3p-(5p-10)+4=$$
$$=10p-3p-5p+10+4=2p+14.$$

56. Заключеніе въ скобки. Для преобразованія многочлена часто бываетъ полезно заключить въ скобки совокупность нѣкоторыхъ его членовъ, при чемъ передъ скобками иногда желательно поставить +, т.-е. изобразить многочленъ въ видѣ суммы, а иногда —, т.-е. изобразить многочленъ въ видѣ разности. Пусть, напр., въ многочленѣ $a+b-c$ мы желаемъ за-

ключить въ скобки два послѣдние члена, поставивъ передъ скобками знакъ $+$. Тогда пишемъ такъ:

$$a+b-c=a+(b-c),$$

т.-е. внутри скобокъ оставляемъ тѣ же знаки, какіе были въ данномъ многочленѣ. Что такое преобразованіе вѣрно, убѣдимся, если раскроемъ скобки по правилу сложенія; тогда получимъ снова данный многочленъ.

Пусть въ томъ же многочленѣ $a+b-c$ требуется заключить въ скобки два послѣдніе члена, поставивъ передъ скобками знакъ минусъ. Тогда напишемъ такъ:

$$a+b-c=a-(-b+c)=a-(c-b).$$

т.-е. внутри скобокъ передъ всѣми членами перемѣняемъ знаки на противоположные. Что такое преобразованіе вѣрно, убѣдимся, если раскроемъ скобки по правилу вычитанія; тогда получимъ снова данный многочленъ.

ГЛАВА II.

Алгебраическое умноженіе.

57. Предварительное замѣчаніе. Такъ какъ показатель степени означаетъ, сколько разъ возвышаемое число надо повторить сомножителемъ, то онъ долженъ быть числомъ цѣлымъ и положительнымъ; возвышаемое же число можетъ быть какое угодно: цѣлое и дробное, положительное и отрицательное, и даже нуль.

58. Умноженіе степеней одного и того же числа. Пусть надо умножить a^4 на a^3; другими словами, требуется умножить a^4 на произведеніе трехъ сомножителей: aaa. Но чтобы умножить на произведеніе, достаточно умножить на перваго сомножителя, полученный результатъ на второго сомножителя и т. д. (§ 36, 2°); поэтому:

$$a^4a^3=a^4(aaa)=aaaaaaa=a^{4+3}=a^7.$$

Вообще $$a^ma^n=a^m\overbrace{(aaa\ldots a)}^{n\text{ разъ}}=\overbrace{aaa\ldots a}^{m\text{ разъ}}.\overbrace{aaa\ldots a}^{n\text{ разъ}}=a^{m+n}.$$

Правило. При умноженіи степеней одного и того же числа показатели ихъ складываются.

Примѣры. 1) $aa^6=a^{1+6}=a^7$, 2) $m^{10}m^3=m^{10+3}=m^{13}$,
3) $x^{2n}x^{3n}=x^{2n+3n}=x^{5n}$,
4) $p^{r-2}p^{r+2}=p^{(r-2)+(r+2)}=p^{r-2+r+2}=p^{2r}$.

59. Умноженіе одночленовъ. Пусть дано умножить $+3a^2b^3c$ на $-5a^3b^4d^2$. Такъ какъ одночленъ $-5a^3b^4d^2$ представляетъ собою произведеніе 4-хъ сомножителей: $-5 \cdot a^3 \cdot b^4 \cdot d^2$, то для умноженія одночлена $+3a^2b^3c$ на $-5a^3b^4d^2$ достаточно умножить множимое на перваго сомножителя -5, результатъ умножить на второго сомножителя a^3 и т. д Значитъ:

$$(+3a^2b^3c)(-5a^3b^4d^2)=(+3a^2b^3c)(-5)a^3b^4d^2=(+3)a^2b^3c(-5)a^3b^4d^2.$$

Въ послѣднемъ произведеніи соединимъ сомножителей въ такія группы (§ 36, 2°).

$$[(+3)(-5)](a^2a^3)(b^3b^4)cd^2=-15a^5b^7cd^2.$$

Слѣд $\quad (+3a^2b^3c)(-5a^3b^4d^2)=-15a^5b^7cd^2.$

Правило. Чтобы перемножить одночлены, перемножаютъ ихъ коэффиціенты, складываютъ показателей одинаковыхъ буквъ, а тѣ буквы, которыя входятъ только въ одного сомножителя, переносятъ въ произведеніе съ ихъ показателями.

Замѣчаніе. При умноженіи коеффиціентовъ надо, конечно, руководиться правиломъ знаковъ, т.-е. что при умноженіи двухъ чиселъ одинаковые знаки даютъ +, а разные —.

Примѣры. 1) $(0,7a^3xy^2)(3a^4x^2)=2,1a^7x^3y^2$.
2) $(\frac{1}{2}mz^3)^2=(\frac{1}{2}mz^3)(\frac{1}{2}mz^3)=\frac{1}{4}m^2z^6$,
3) $(1,2a^rm^{n-1})(\frac{3}{4}am)=0,9a^{r+1}m^n$,
4) $(-3,5x^2y)(\frac{2}{3}x^3)=-\frac{21}{3}x^5y$,
5) $(4a^nb^3)(-7ab^n)=-28a^{n+1}b^{n+3}$

60. Умноженіе многочлена на одночленъ и обратно. Пусть дано умножить многочленъ $a+b-c$ на одночленъ m:

$$(a+b-c)m$$

Всякій многочленъ, какъ мы видѣли (§ 47), представляетъ

собою сумму алгебраическихъ чиселъ. Но чтобы умножить сумму алгебраическихъ чиселъ, достаточно умножить каждое слагаемое отдѣльно и результаты сложить; поэтому:

$$(a+b-c)m=[a+b+(-c)]m=am+bm+(-c)m.$$

Но $(-c)m=-cm$ и $+(-cm)=-cm$, значитъ

$$\mathbf{(a+b-c)m=am+bm-cm.}$$

Правило Чтобы умножить многочленъ на одночленъ, умножаютъ на этотъ одночленъ каждый членъ многочлена и полученныя произведенія складываютъ.

Такъ какъ произведеніе не измѣняется отъ перемѣны мѣстъ сомножителей, *то это правило примѣнимо также и къ умноженію одночлена на многочленъ.*

Примѣръ. Пусть требуется произвести умноженіе.

$$(3x^3-2ax^2+5a^2x-1)(-4a^2x^3).$$

Производимъ дѣйствія въ такомъ порядкѣ.

$$(3x^3)(-4a^2x^3)=-12a^2x^6,\quad (-2ax^2)(-4a^2x^3)=+8a^3x^5,$$
$$(+5a^2x)(-4a^2x^3)=-20a^4x^4,\quad (-1)(-4a^2x^3)=+4a^2x^3.$$

Искомое произведеніе будетъ.

$$-12a^2x^6+8a^3x^5-20a^4x^4+4a^2x^3.$$

Примѣры.

1) $(a^2-ab+b^2)3a=a^2(3a)-(ab)(3a)+b^2(3a)=3a^3-3a^2b+3ab^2$,
2) $(7x^3+\frac{3}{4}ax-0,3)(2,1a^2x)=(7x^3)(2,1a^2x)+(\frac{3}{4}ax)(2,1a^2x)-$
$-(0,3)(2,1a^2x)=14,7a^2x^4+1,575a^3x^2-0,63a^2x$.
3) $(5x^{n-1}-3x^{n-2}+1)(-2x)=-10x^n+6x^{n-1}-2x$.

61 Умноженіе многочлена на многочленъ.

Пусть дано умножить:

$$(a+b-c)(d-e)$$

Разсматривая множимое, какъ одночленъ, мы можемъ сдѣлать умноженіе по правилу умноженія одночлена на многочленъ:

$$(a+b-c)(d-e)=(a+b-c)d-(a+b-c)e.$$

Разсматривая теперь выраженіе $a+b-c$, какъ многочленъ, можемъ вторично примѣнить правило умноженія многочлена на одночленъ:

$$(a+b-c)(d-e)=ad+bd-cd-(ae+be-ce).$$

Наконецъ, раскрывъ скобки по правилу вычитанія, получимъ:

$$\boldsymbol{(a+b-c)\ (d-e)=ad+bd-cd-ae-be+ce.}$$

Правило. Чтобы умножить многочленъ на многочленъ, умножаютъ каждый членъ множимаго на каждый членъ множителя и полученныя произведенія складываютъ.

Конечно при умноженіи членовъ надо держаться правила знаковъ, по которому одинаковые знаки даютъ $+$, а разные $-$.

Примѣръ. $(a^2-5ab+b^2-3)(a^3-3ab^2+b^3)$.

Умножимъ сначала всѣ члены множимаго на 1-й членъ множителя:

$$(a^2-5ab+b^2-3)a^3=a^5-5a^4b+a^3b^2-3a^3.$$

Затѣмъ умножимъ всѣ члены множимаго на 2-й членъ множителя:

$$(a^2-5ab+b^2-3)(-3ab^2)=-3a^3b^2+15a^2b^3-3ab^4+9ab^2.$$

Далѣе умножимъ всѣ члены множимаго на 3-й членъ множителя:

$$(a^2-5ab+b^2-3)(+b^3)=a^2b^3-5ab^4+b^5-3b^3.$$

Наконецъ, сложимъ полученныя произведенія и сдѣлаемъ приведеніе подобныхъ членовъ; окончательный результатъ будетъ:

$$a^5-5a^4b-2a^3b^2-3a^3+16a^2b^3-8ab^4+9ab^2+b^5-3b^3.$$

Замѣчаніе. Чтобы при умноженіи многочленовъ не пропустить ни одного произведенія, полезно всегда держаться одного какого-нибудь порядка умноженія; напр., какъ это мы сейчасъ дѣлали, умножить спачала всѣ члены множимаго на 1-й членъ множителя, затѣмъ всѣ члены множимаго на 2-й членъ множителя и т. д.

Примѣры: 1) $(a-b)(m-n-p)=am-bm-an+bn-ap+bp$;

2) $(x^2-y^2)(x+y)=x^3-xy^2+x^2y-y^3$;

3) $(3an+2n^2-4a^2)(n^2-5an)=$
$=3an^3+2n^4-4a^2n^2-15a^2n^2-10an^3+20a^3n=$
$=-7an^3+2n^4-19a^2n^2+20a^3n$;

4) $(2a^2-3)^2=(2a^2-3)(2a^2-3)=(2a^2)^2-3(2a^2)-$
$-(2a^2)3+9=4a^4-6a^2-6a^2+9=4a^4-12a^2+9$.

ГЛАВА III.

Умноженіе расположенныхъ многочленовъ.

62. Опредѣленіе. Расположить многочленъ по степенямъ какой-нибудь одной буквы значитъ, если возможно, написать его члены въ такомъ порядкѣ, чтобы показатели этой буквы увеличивались или уменьшались отъ перваго члена къ послѣднему.

Такъ, многочленъ $1+2x+3x^2-x^3-\frac{1}{2}x^4$ расположенъ по возрастающимъ степенямъ буквы x. Тотъ же многочленъ будетъ расположенъ по убывающимъ степенямъ буквы x, если члены его напишемъ въ обратномъ порядкѣ:

$$-\tfrac{1}{2}x^4-x^3+3x^2+2x+1.$$

Буква, по которой расположенъ многочленъ, наз. главной его буквой. Когда члены многочлена содержатъ нѣсколько буквъ и ни одной изъ нихъ не приписывается какого-либо особеннаго значенія, то безразлично, какую изъ нихъ считать за главную.

Членъ, содержащій главную букву съ наибольшимъ показателемъ, наз. высшимъ членомъ многочлена; членъ, содержащій главную букву съ наименьшимъ показателемъ, или не содержащій ея вовсе, наз. низшимъ членомъ многочлена.

Чтобы расположить такой многочленъ, въ которомъ есть нѣсколько членовъ съ одинаковыми показателями главной буквы, надо заключить эти члены въ скобки и вынести за скобку общимъ множителемъ главную букву съ ея показателемъ. Напр:

$$2ax^3-4a^2x^2-\tfrac{1}{2}ax^2-8a^3x+1=$$
$$=2ax^3-(4a^2x^2+\tfrac{1}{2}ax^2)-8a^3x+1=$$
$$=2ax^3-(4a^2+\tfrac{1}{2}a)x^2-8a^3x+1$$

Здѣсь двучленъ $-(4a^2+\frac{1}{2}a)$ должно разсматривать, какъ коэффиціентъ при x^2.

63. Умноженіе расположенныхъ многочленовъ всего удобнѣе производить такъ, какъ будетъ указано на слѣдующихъ примѣрахъ.

Примѣръ 1. Умножить $3x-5+7x^2-x^3$ на $2-8x^2+x$.

$$\begin{array}{rl}
-x^3+7x^2+3x-5 & \\
-8x^2+x+2 & \\
\hline
8x^5-56x^4-24x^3+40x^2 \;\ldots\ldots & \text{произведеніе множимаго на } -8x^2 \\
-x^5+7x^3+3x^2-5x \;\ldots & \text{произведеніе множимаго на } +x. \\
-2x^3+14x^2+6x-10 & \text{произведеніе множимаго на } +2. \\
\hline
8x^5-57x^4-19x^3+57x^2+x-10 & \text{полное произведеніе.}
\end{array}$$

1⁰. Расположивъ оба многочлена по убывающимъ степенямъ одной и той же буквы, пишутъ множителя подъ множимымъ и подъ множителемъ проводятъ черту. Умножаютъ всѣ члены множимаго на 1-й членъ множителя (на $-8x^2$) и полученное частное произведеніе пишутъ подъ чертою. Умножаютъ затѣмъ всѣ члены множимаго на 2-й членъ множителя (на $+x$) и полученное второе частное произведеніе пишутъ подъ первымъ частнымъ произведеніемъ такъ, чтобы подобные члены стояли подъ подобными. Такъ же поступаютъ при умноженіи всѣхъ членовъ множимаго на слѣдующіе члены множителя. Подъ послѣднимъ частнымъ произведеніемъ проводятъ черту; подъ этою чертою пишутъ полное произведеніе, складывая всѣ частныя произведенія.

2⁰. Можно также оба многочлена расположить по возрастающимъ степенямъ главной буквы и затѣмъ производить умноженіе въ томъ порядкѣ, какъ было указано:

$$\begin{array}{rl}
-5+3x+7x^2-x^3 & \\
2+x-8x^2 & \\
\hline
-10+6x+14x^2-2x^3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{произведеніе на } 2. \\
-5x+3x^2+7x^3-x^4 \;\ldots\ldots\ldots & \text{произведеніе на } +x. \\
+40x^2-24x^3-56x^4+8x^5 \;\ldots\ldots & \text{произведеніе на } -8x^2. \\
\hline
-10+x+57x^2-19x^3-57x^4+8x^5 \;\ldots\ldots & \text{полное произведеніе.}
\end{array}$$

Удобство этихъ пріемовъ, очевидно, состоитъ въ томъ, что при этомъ подобные члены располагаются другъ подъ другомъ и, слѣдовательно, ихъ не нужно отыскивать.

Примѣръ 2. Умножить a^3+5a-3 на a^2+2a-1.

Въ этихъ многочленахъ недостаетъ нѣкоторыхъ промежуточныхъ членовъ; въ такихъ случаяхъ на мѣстахъ этихъ членовъ полезно оставлять пустыя пространства для болѣе удобнаго подписыванія подобныхъ членовъ:

$$\begin{array}{l} a^3 \;\text{»}\; +5a-3 \\ \quad a^2+2a-1 \\ \hline a^5 \qquad +5a^3-3a^2 \\ \quad +2a^4 \qquad +10a^2-6a \\ \qquad -a^3 \qquad -5a+3 \\ \hline a^5+2a^4+4a^3+7a^2-11a+3. \end{array}$$

64. Высшій и низшій члены произведенія.

Изъ разсмотрѣнія примѣровъ умноженія расположенныхъ многочленовъ слѣдуетъ:

высшій членъ произведенія равенъ произведенію высшихъ члена множимаго на высшій членъ множителя;

низшій членъ произведенія равенъ произведенію низшаго члена множимаго на низшій членъ множителя.

Остальные члены произведенія могутъ получиться отъ соединенія нѣсколькихъ подобныхъ членовъ въ одинъ. Можетъ даже случиться, что въ произведеніи, послѣ приведенія въ немъ подобныхъ членовъ, всѣ члены уничтожатся кромѣ высшаго и низшаго.

Примѣръ.

$$\begin{array}{l} x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4 \\ \qquad x-a \\ \hline x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x \\ \quad -ax^4-a^2x^3-a^3x^2-a^4x-a^5 \\ \hline x^5 \;\;\text{»}\;\;\text{»}\;\;\text{»}\;\;\text{»}\; -a^5=x^5-a^5. \end{array}$$

65. Число членовъ произведенія.

Пусть во множимомъ 5, а во множителѣ 3 члена. Умноживъ каждый членъ множимаго на 1-й членъ множителя, мы получимъ 5 членовъ произведенія, умноживъ каждый членъ множимаго на 2-й членъ

множителя, получимъ еще 5 членовъ произведенія, и т. д.; значитъ, всѣхъ членовъ произведенія будетъ 5 . 3, т.-е. 15. Вообще, **число членовъ произведенія, до соединенія въ немъ подобныхъ членовъ, равно произведенію числа членовъ множимаго на число членовъ множителя.**

Такъ какъ высшій и низшій члены произведенія не могутъ имѣть подобныхъ членовъ, а всѣ прочіе могутъ уничтожиться, то **наименьшее число членовъ произведенія, послѣ приведенія въ немъ подобныхъ членовъ, равно 2.**

ГЛАВА IV.

Нѣкоторыя формулы умноженія двучленовъ.

66. Полезно обратить особое вниманіе на слѣдующіе 5 случаевъ умноженія двучленовъ и запомнить окончательныя формулы.

I. **Произведеніе суммы двухъ чиселъ на ихъ разность равно разности квадратовъ тѣхъ же чиселъ;** т.-е.

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2.$$

Дѣйствительно: $(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$.

Напр., $25 \cdot 15=(20+5)(20-5)=20^2-5^2=400-25=375$.

II. **Квадратъ суммы двухъ чиселъ равенъ квадрату перваго числа, плюсъ удвоенное произведеніе перваго числа на второе, плюсъ квадратъ второго числа;** т.-е.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Дѣйствительно: $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+\underline{ab}+\underline{ab}+b^2=$
$=a^2+2ab+b^2$.

Напр., $67^2=(60+7)^2=60^2+2 \cdot 60 \cdot 7+7^2=3600+840+49=4489$.

III. **Квадратъ разности двухъ чиселъ равенъ квадрату перваго числа, минусъ удвоенное произведеніе перваго числа на второе, плюсъ квадратъ второго числа;** т.-е.

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Дѣйствительно: $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-\underline{ab}-\underline{ab}+b^2=$
$=a^2-2ab+b^2$.

Напр., $19^2=(20-1)^2=20^2-2 \cdot 20 \cdot 1+1^2=400-40+1=361$.

IV. **Кубъ суммы двухъ чиселъ равенъ кубу перваго числа, плюсъ утроенное произведенie квадрата перваго числа на второе, плюсъ утроенное произведенie перваго числа на квадратъ второго, плюсъ кубъ второго числа;** т.-е.

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Дѣйствительно: $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=$
$=a^3+\underline{2a^2b}+\underline{\underline{ab^2}}+\underline{a^2b}+\underline{\underline{2ab^2}}+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$

V. **Кубъ разности двухъ чиселъ равенъ кубу перваго числа, минусъ утроенное произведенie квадрата перваго числа на второе, плюсъ утроенное произведенie перваго числа на квадратъ второго, минусъ кубъ второго числа;** т.-е.

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Дѣйствительно: $(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=$
$=a^3-\underline{2a^2b}+\underline{\underline{ab^2}}-\underline{a^2b}+\underline{\underline{2ab^2}}-b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$

Замѣчанie. Формулы III и V могутъ быть получены соотвѣтственно изъ формулъ II и IV (и наоборотъ), если въ послѣднихъ формулахъ замѣнимъ b на $-b$. Дѣйствительно:

$$[a+(-b)]^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2=a^2+(-2ab)+b^2=a^2-2ab+b^2;$$
$$[a+(-b)]^3=a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3=a^3+(-3a^2b)+$$
$$+3ab^2+(-b^3)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Условившись всякiй двучленъ разсматривать, какъ с у м м у, мы можемъ 4 указанныя формулы свести къ слѣдующимъ двумъ:

Квадратъ двучлена равенъ квадрату перваго члена, плюсъ удвоенное произведенie перваго члена на второй, плюсъ квадратъ второго члена.

Кубъ двучлена равенъ кубу перваго члена плюсъ утроенное произведенie квадрата перваго члена на второй, плюсъ утроенное произведенie перваго члена на квадратъ второго, плюсъ кубъ второго члена.

67. Примѣненiя. При помощи формулъ предыдущаго параграфа можно иногда производить умноженie многочленовъ проще, чѣмъ обыкновеннымъ путемъ, какъ это видно изъ слѣдующихъ примѣровъ.

Примѣры.

1) $(4a^3-1)^2=(4a^3)^2-2(4a^3) \,.\, 1+1^2=16a^6-8a^3+1$;

2) $(x+y)(y-x)=(y+x)(y-x)=y^2-x^2$;

3) $\left(\frac{1}{3}x^{2m-1}y^3+\frac{3}{4}x^{m-1}y\right)^2=\left(\frac{1}{3}x^{2m-1}y^3\right)^2+2\left(\frac{1}{3}x^{2m-1}y^3\right)\left(\frac{3}{4}x^{m+1}y\right)+$
$+\left(\frac{3}{4}x^{m+1}y\right)^2=\frac{1}{9}x^{4m-2}y^6+\frac{1}{2}x^{3m}y^4+\frac{9}{16}x^{2m+2}y^2$;

4) $(x+y+1)(x-y+1)=[(x+1)+y][(x+1)-y]=(x+1)^2-y^2=$
$=x^2+2x+1-y^2$;

5) $(a-b+c)(a+b-c)=[a-(b-c)][a+(b-c)]=a^2-(b-c)^2=$
$=a^2-(b^2-2bc+c^2)=a^2-b^2+2bc-c^2$;

6) $(2a+1)^3=(2a)^3+3(2a)^2 1+3(2a)1^2+1^3=8a^3+12a^2+6a+1$;

7) $(1-3x^2)^3=1^3-3 \,.\, 1^2 \,.\, 3x^2+3 \,.\, 1 \,.\, (3x^2)^2-(3x^2)^3=1-9x^2+$
$+27x^4-27x^6$.

ГЛАВА V.

Алгебраическое дѣленіе.

68. Дѣленіе степеней одного и того же числа.

Разсмотримъ особо слѣдующіе три случая:

1⁰. *Показатель дѣлимаго больше показателя дѣлителя.* Пусть, напр., дано раздѣлить $a^8 : a^3$. Такъ какъ дѣлимое a^8 должно равняться произведенію дѣлителя a^5 на частное, то, принявъ во вниманіе правило умноженія степеней (§ 58), мы найдемъ, что это частное должно содержать въ себѣ букву a съ показателемъ, равнымъ разности показателей дѣлимаго и дѣлителя. Дѣйствительно, если допустимъ, что искомое частное есть a^{8-5}, т.-е. a^3, то дѣлимое a^8 будетъ произведеніемъ дѣлителя a^5 на это частное. Итакъ,

$$a^8 : a^5=a^{5-8}=a^3.$$

Вообще: $a^m : a^n=a^{m-n}$, если $m>n$.

Правило. При дѣленіи степеней одного и того же числа показатель дѣлителя вычитается изъ показателя дѣлимаго.

2⁰. *Показатель дѣлимаго равенъ показателю дѣлителя.* Въ этомъ случаѣ частное должно равняться 1; напр., $a^5 : a^5 = 1$, потому что $a^5 = a^5 . 1$.

Условимся производить вычитаніе показателей и въ этомъ случаѣ; тогда получимъ въ частномъ букву съ *нулевымъ* показателемъ: $a^5 : a^5 = a^{5-5} = a^0$. Этотъ показатель не имѣетъ того значенія, какое мы придавали показателямъ раньше, такъ какъ повторить число сомножителемъ 0 разъ нельзя.

Условимся подъ видомъ a^0 разумѣть частное отъ дѣленія одинаковыхъ степеней числа a, и такъ какъ это частное равно 1, то мы должны принять, что $a^0 = 1$. При этомъ соглашеніи высказанное выше правило мы можемъ примѣнять и въ разсматриваемомъ случаѣ.

3⁰. *Показатель дѣлимаго меньше показателя дѣлителя,* напр., $a^2 : a^5$. Въ этомъ случаѣ, очевидно, частное не можетъ равняться никакой степени a, ни съ положительнымъ, ни съ нулевымъ показателемъ.

Условимся производить вычитаніе показателей и въ этомъ случаѣ; тогда мы получимъ въ частномъ букву съ *отрицательнымъ* показателемъ; напр., $a^2 : a^5 = a^{-3}$. Этотъ показатель не имѣетъ того значенія, которое придается положительнымъ показателямъ, такъ какъ нельзя повторить число сомножителемъ —2 раза, —3 раза и т. д. Тѣмъ не менѣе мы будемъ употреблять степени съ отрицательными показаелями, условившись понимать ихъ въ такомъ смыслѣ.

Степень съ цѣлымъ отрицательнымъ показателемъ означаетъ частное отъ дѣленія тепеней этого числа въ томъ случаѣ, :огда показатель дѣлителя превосходитъ ·оказателя дѣлимаго на столько единицъ, колько ихъ находится въ абсолютной еличинѣ отрицательнаго показателя.

Такъ, напр., мы будемъ понимать, что выраженіе a^{-3} означаетъ частное $a : a^4$, или $a^2 : a^5$, или $a^3 : a^6$, вообще такое частное $^m : a^{m+3}$, которое получается въ томъ случаѣ, когда показатель ѣлителя больше показателя дѣлимаго на 3 единицы.

При такомъ соглашеніи приведенное выше правило можетъ быть примѣняемо и въ этомъ случаѣ; оно является, такимъ образомъ, общимъ правиломъ дѣленія степеней одного и того же числа.

Замѣчаніе. Букву съ нулевымъ показателемъ, какъ равную единицѣ, мы можемъ приписать ко всякому выраженію въ видѣ множителя или дѣлителя; напр., располагая многочленъ $3x-4x^2+7+2x^3$ по степенямъ буквы x, мы можемъ членъ $+7$ разсматривать, какъ $+7x^0$ и писать: $2x^3-4x^2+$ $+3x+7x^0$.

69. Дѣленіе одночленовъ. Пусть дано раздѣлить $12a^7b^5c^2d^3$ на $-4a^4b^3d^3$. Предположимъ, что искомое частное есть какой-нибудь одночленъ. По опредѣленію дѣленія одночленъ этотъ, умноженный на дѣлителя, долженъ составить дѣлимое. Но при умноженіи одночленовъ коэффиціенты ихъ перемножаются, показатели одинаковыхъ буквъ складываются, а тѣ буквы, которыя входятъ только въ одного сомножителя, переносятся въ произведеніе съ ихъ показателями (§ 59). Отсюда слѣдуетъ, что: 1) у искомаго частнаго коэффиціентъ долженъ быть 12 : (—4), т.-е. —3; 2) показатели у буквъ a и b получатся вычитаніемъ изъ показателей дѣлимаго показателей тѣхъ же буквъ дѣлителя; 3) буква c должна перейти въ частное со своимъ показателемъ; 4) буква d совсѣмъ не должна войти въ частное, или войдетъ въ него съ показателемъ 0 и 5) никакихъ иныхъ буквъ не можетъ быть въ частномъ. Такимъ образомъ:

$$12a^7b^5c^2d^3 \,.\, -4a^4b^3d^3 = -3a^3b^2c^2d^0 = -3a^3b^2c^2.$$

Что найденное частное вѣрно, можно убѣдиться повѣркой: умноживъ $-3a^3b^2c^2$ на $-4a^4b^3d^3$, получимъ дѣлимое.

Правило. Чтобы раздѣлить одночленъ на одночленъ, дѣлятъ коэффиціентъ дѣлимаго на коэффиціентъ дѣлителя, вычитаютъ изъ показателей буквъ дѣлимаго показателей тѣхъ же буквъ дѣлителя и переносятъ въ частное, безъ измѣненія показателей, тѣ буквы дѣлимаго, которыхъ нѣтъ въ дѣлителѣ.

Примѣры.

1) $3m^3n^4x : 4m^2nx = \frac{3}{4}mn^3x^0 = \frac{3}{4}mn^3$,

2) $-ax^ny^m : \frac{3}{4}axy^2 = -\frac{4}{3}a^0x^{n-1}y^{m-2} = -\frac{4}{3}x^{n-1}y^{m-2}$,

3) $-0{,}6a^3(x+y)^4 : -2{,}5a(x+y)^2 = 0{,}24a^2(x+y)^2$.

70. Невозможное дѣленіе. Когда частное отъ дѣленія одночленовъ не можетъ быть выражено одночленомъ, то говорятъ, что дѣленіе *невозможно*. Это бываетъ въ двухъ случаяхъ:

1) когда въ дѣлителѣ есть буквы, какихъ нѣтъ въ дѣлимомъ;

2) когда показатель какой-нибудь буквы дѣлителя больше показателя той же буквы въ дѣлимомъ.

Пусть, напр., дано раздѣлить $4a^2b$ на $2ac$ Всякій одночленъ, умноженный на $2ac$, даетъ въ произведеніи такой одночленъ, который содержитъ букву c; но въ нашемъ дѣлимомъ нѣтъ этой буквы; значитъ, частное не можетъ быть выражено одночленомъ.

Также невозможно дѣленіе $10a^3b^2 : 5ab^3$, потому что частное $2a^2b^{-1}$, которое получается въ этомъ случаѣ согласно правилу дѣленія одночленовъ, содержитъ букву съ отрицательнымъ показателемъ и слѣд., представляетъ собою дробное выраженіе: $2a^2 \cdot \frac{1}{b}$.

71. Дѣленіе многочлена на одночленъ. Пусть требуется раздѣлить многочленъ $a+b-c$ на одночленъ m. Искомое частное можно выразить такъ:

$$(a+b-c) : m = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}$$

Чтобы убѣдиться въ вѣрности этого равенства, умножимъ предполагаемое частное на дѣлителя m. Если въ произведеніи получимъ дѣлимое, то частное вѣрно. Примѣняя правило умноженія многочлена на одночленъ, получимъ:

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}\right)m = \frac{a}{m} \cdot m + \frac{b}{m} \cdot m - \frac{c}{m} \cdot m = a+b-c.$$

Значитъ, предполагаемое частное вѣрно.

Правило. Чтобы раздѣлить многочленъ на одночленъ, дѣлятъ на этотъ одночленъ каждый членъ дѣлимаго и полученныя частныя складываютъ.

Примѣры. 1) $(20a^3x^2-8a^2x^3-ax^4+3a^3x^3):4ax^2=$
$=5a^2-2ax-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}a^2x$;

2) $(14m^p-21m^{p-1}):-7m^2=-2m^{p-2}+3m^{p-3}$;

3) $\left(\frac{1}{2}x^3y^3-0,3x^2y^4+1\right):2x^2y^2=$
$=\frac{1}{4}xy-0,15y^2+\frac{1}{2x^2y^2}$.

72. Дѣленіе одночлена на многочленъ. Частное отъ дѣленія одночлена на многочленъ не можетъ быть выражено ни одночленомъ, ни многочленомъ. Дѣйствительно, если предположимъ, что частное $a:(b+c-d)$ равно какому-нибудь одночлену или многочлену, то произведеніе этого частнаго на многочленъ $b+c-d$ дало бы тоже многочленъ (§ 65), а не одночленъ a, какъ требуется дѣленіемъ.

73. Дѣленіе многочлена на многочленъ. Частное отъ дѣленія многочлена на многочленъ можетъ быть выражено въ видѣ цѣлаго алгебраическаго выраженія лишь въ рѣдкихъ случаяхъ. Въ этомъ мы убѣдимся, когда разсмотримъ на примѣрѣ, какъ можно находить это частное.

Примѣръ 1. $(5x^2-19x^3+17x+6x^4-4):(1-5x+3x^2)$.

Напишемъ оба многочлена по убывающимъ степенямъ буквы x и расположимъ дѣйствіе такъ, какъ оно располагается при дѣленіи цѣлыхъ чиселъ:

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{6x^4}-9x^3+5x^2+17x-4 & \mathbf{3x^2}-5x+1 \\ \underline{\pm 6x^4 \mp 10x^3 \pm 2x^2} & 2x^2-3x-4 \\ \text{1-й остатокъ » } -\mathbf{9x^3}+3x^2+17x-4 & \\ \underline{\mp 9x^3 \pm 15x^2 \mp 3x} & \\ \text{2-й остатокъ » } -\mathbf{12x^2}+20x-4 & \\ \underline{\mp 12x^2 \pm 20x \mp 4} & \\ \text{3-й остатокъ... } 0 & \end{array}$$

Предположимъ, что искомое частное равно какому-нибудь многочлену, и что члены этого многочлена расположены тоже по убывающимъ степенямъ буквы x. Чтобы найти этотъ многочленъ, разсуждаемъ такъ.

Дѣлимое должно равняться произведенію дѣлителя на частное. Изъ умноженія расположенныхъ многочленовъ извѣстно (§ 64), что высшій членъ произведенія получается отъ умноженія высшаго члена множимаго на высшій членъ множителя. Въ дѣлимомъ высшій членъ есть первый, въ дѣлителѣ и частномъ высшіе члены тоже первые. Значитъ, для 1-го члена частнаго мы можемъ взять такой одночленъ, который, будучи умноженъ на 1-ый членъ дѣлителя, образуетъ 1-й членъ дѣлимаго; поэтому: чтобы найти первый членъ частнаго, достаточно раздѣлить первый членъ дѣлимаго на первый членъ дѣлителя. Раздѣливъ, находимъ первый членъ частнаго $2x^2$. Пишемъ его подъ чертою.

Умножимъ всѣ члены дѣлителя на первый членъ частнаго и полученное произведеніе вычтемъ изъ дѣлимаго. Для этого напишемъ его подъ дѣлимымъ такъ, чтобы подобные члены стояли подъ подобными, и у всѣхъ членовъ вычитаемаго перемѣнимъ знаки на обратные. Получимъ послѣ вычитанія первый остатокъ. Если бы этотъ остатокъ оказался равнымъ нулю, то это значило бы, что въ частномъ никакихъ другихъ членовъ, кромѣ найденнаго перваго, нѣтъ, т.-е. что частное есть одночленъ. Если же, какъ въ нашемъ примѣрѣ, первый остатокъ не есть нуль, то будемъ разсуждать такъ:

Дѣлимое можно разсматривать, какъ сумму произведеній дѣлителя на каждый членъ частнаго. Мы вычли изъ дѣлимаго произведеніе дѣлителя на 1-й членъ частнаго; слѣдов., въ 1-мъ остаткѣ заключается произведеніе дѣлителя на 2-й, на 3-й... и т. д. члены частнаго. Высшій членъ въ остаткѣ есть 1-й; высшій членъ дѣлителя тоже 1-й; высшій членъ въ частномъ (не считая 1-го) есть 2-й членъ. Значитъ, для 2-го члена частнаго мы можемъ принять такой одночленъ, который, будучи умноженъ на 1-й членъ дѣлителя, образуетъ 1-й членъ остатка; поэтому: чтобы

найти 2-й членъ частнаго, достаточно раздѣлить первый членъ перваго остатка на первый членъ дѣлителя. Раздѣливъ, находимъ второй членъ частнаго $-3x$. Пишемъ его подъ чертою.

Умножимъ на 2-й членъ частнаго дѣлителя и полученное произведенiе вычтемъ изъ 1-го остатка. Получимъ второй остатокъ. Если этотъ остатокъ равенъ нулю, то дѣленiе окончено; если же, какъ въ нашемъ примѣрѣ, 2-й остатокъ не равенъ нулю, то будемъ разсуждать такъ:

Второй остатокъ есть сумма произведенiй дѣлителя на 3-й, на 4-й... и т. д. члены частнаго. Такъ какъ изъ этихъ членовъ частнаго высшiй есть 3-й, то, подобно предыдущему, 3-й членъ частнаго найдемъ, если первый членъ 2-го остатка раздѣлимъ на первый членъ дѣлителя. Раздѣливъ, находимъ -4. Умноживъ на -4 дѣлителя и вычтя произведенiе изъ остатка, получаемъ 3-й остатокъ. Въ нашемъ примѣрѣ этотъ остатокъ оказался нулемъ; это показываетъ, что въ частномъ другихъ членовъ, кромѣ найденныхъ, не можетъ быть. Если бы 3-й остатокъ былъ не 0, то, подобно предыдущему, надо было бы дѣлить 1-й членъ этого остатка на 1-й членъ дѣлителя; отъ этого получился бы 4-й членъ частнаго, и т. д.

Подобнымъ же образомъ можно выполнить дѣленiе, расположивъ оба многочлена по возрастающимъ степенямъ главной буквы:

$$
\begin{array}{l|l}
-4+17x+5x^2-19x^3+6x^4 & 1-5x+3x^2 \\
\mp 4 \pm 20x \mp 12x^2 & \overline{-4-3x+2x^2} \\
\hline
\quad -3x+17x^2-19x^3 & \\
\quad \mp 3x \pm 15x^2 \mp 9x^3 & \\
\hline
\qquad 2x^2-10x^3+6x^4 & \\
\qquad \pm 2x^2 \pm 10x^3 \mp 6x^4 & \\
\hline
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

При такомъ расположенiи первые члены въ дѣлимомъ, дѣлителѣ, частномъ и остаткахъ будутъ низшiе. Такъ какъ низшiй членъ произведенiя (дѣлимаго) долженъ равняться

произведенію низшаго члена множимаго (дѣлителя) на низшій членъ множителя (частнаго), то ходъ разсужденій и порядокъ дѣйствія остаются тѣ же самые, какъ и въ томъ случаѣ, когда дѣлимое и дѣлитель расположены по убывающимъ степенямъ главной буквы.

Вотъ еще нѣкоторые примѣры дѣленія многочленовъ:

Примѣръ 2.

$$\begin{array}{r|l} 28x^4-13cx^3-26c^2x^2+15c^3x & 7x^2+2cx-5c^2 \\ \hline \text{»}\ \pm 8cx^3\mp 20c^2x^2 \quad & 4x^2-3cx \\ \hline -21cx^3-6c^2x^2+15c^3x & \\ \text{»}\ \mp 6c^2x^2\pm 15c^3x & \\ \hline 0 \qquad\qquad & \end{array}$$

Мы здѣсь не писали произведеній 1-го члена дѣлителя на 1-й, 2-й и т. д. члены частнаго, потому что эти произведенія всегда равны тѣмъ членамъ, подъ которыми они подписываются, и при вычитаніи всегда сокращаются. Обыкновенно такъ и дѣлаютъ.

Примѣръ 3.

$$\begin{array}{l|l} -\frac{5}{2}+\frac{47}{12}x-3x^2+x^3 & -3+2x \\ \hline \text{»}\ -\frac{5}{3}x & \frac{5}{6}-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}x^2 \\ \hline \quad \frac{9}{4}x-3x^2\ldots & \\ \quad \text{»}\ +\frac{3}{2}x^2 & \\ \hline \qquad -\frac{3}{2}x^2+x^3 & \\ \qquad \text{»}\ -x^3 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Подписывая вычитаемыя, мы можемъ писать ихъ прямо съ обратными знаками, какъ это мы дѣлали въ этомъ примѣрѣ. Къ остатку нѣтъ надобности сносить всѣ члены дѣлимаго.

Примѣръ 4.

$$\begin{array}{l|l}
x^5-a^5 & x-a \\
\text{»}\ +ax^4 & x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4 \\
\hline
ax^4-a^5 & \\
\text{»}\ +a^2x^3 & \\
\hline
a^2x^3-a^5 & \\
\text{»}\ +a^3x^2 & \\
\hline
a^3x^2-a^5 & \\
\text{»}\ +a^4x & \\
\hline
a^4x-a^5 & \\
\text{»}\ +a^5 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Подобнымъ образомъ можемъ убѣдиться, что разности: x^3-a^3, x^4-a^4, x^6-a^6... (и вообще x^m-a^m) дѣлятся безъ остатка на разность $x-a$, т.-е. **разность одинаковыхъ степеней двухъ чиселъ дѣлится безъ остатка на разность этихъ чиселъ.**

Примѣръ 5.

$$\begin{array}{l|l}
x^3+Ax^2+Bx+C & x-a \\
\text{»}\ +ax^2 & x^2+(a+A)x+(a^2+Aa+B) \\
\hline
(a+A)x^2+Bx & \\
\text{»}\ \ +(a^2+Aa)x & \\
\hline
(a^2+Aa+B)x+C & \\
\text{»}\ \ +(a^3+Aa^2+Ba) & \\
\hline
a^3+Aa^2+Ba+C &
\end{array}$$

Примѣръ 6.

$$(-23a^3b^2+12a+20a^4b^3+12a^2b^2-10a^2b-9ab):(4ab-3).$$

Особенность этого примѣра состоитъ въ томъ, что по какой бы буквѣ мы ни располагали, въ дѣлимомъ встрѣчаются члены съ одинаковыми показателями главной буквы. Такіе члены соединяютъ въ одинъ, вынося главную букву за скобку. Расположимъ, напр., по буквѣ a и затѣмъ произведемъ дѣленіе такъ, какъ было объяснено;

$$\begin{array}{l|l}
20b^3a^4-23b^2a^3+(12b^2-10b)a^2+(12-9b)a & 4ba-3 \\
\text{»}\ +15b^2a^3 & 5b^2a^3-2ba^2+(3b-4)a \\
\hline
-8b^2a^3+(12b^2-10b)a^2 & \\
\text{»}\ \ -6ba^2 & \\
\hline
(12b^2-16b)a^2+(12-9b)a & \\
\text{»}\ \ +(9b-12)a & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

74. Признаки невозможности дѣленія многочлена на многочленъ. Когда частное отъ дѣленія многочлена на многочленъ не можетъ быть выражено цѣлымъ многочленомъ (или одночленомъ), то дѣленіе называютъ невозможнымъ. Вотъ признаки невозможнаго дѣленія:

1) **Если показатель главной буквы въ высшемъ членѣ дѣлимаго меньше показателя той же буквы въ высшемъ членѣ дѣлителя, то дѣленіе невозможно,** потому что тогда нельзя получить высшаго члена частнаго въ цѣломъ видѣ.

2) **Если показатель главной буквы въ низшемъ членѣ дѣлимаго меньше показателя той же буквы въ низшемъ членѣ дѣлителя, то дѣленіе невозможно,** потому что тогда нельзя получить низшаго члена частнаго въ цѣломъ видѣ.

3) Если показатели главной буквы въ высшемъ и низшемъ членахъ дѣлимаго не меньше соотвѣтственно показателей этой буквы въ высшемъ и низшемъ членахъ дѣлителя, то еще нельзя сказать, чтобы дѣленіе было возможно. Въ этомъ случаѣ, чтобы судить о возможности дѣленія, надо приступить къ выполненію самаго дѣйствія и продолжать его до тѣхъ поръ, пока окончательно не убѣдимся въ возможности или невозможности получить цѣлое частное. При этомъ надо различить два случая:

I. Когда многочлены расположены по убывающимъ степенямъ главной буквы, то продолжаютъ дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока или въ остаткѣ не получится 0 (тогда дѣленіе возможно), или пока не дойдутъ до такого послѣдняго остатка, первый членъ котораго содержитъ главную букву съ показателемъ, меньшимъ, чѣмъ первый членъ дѣлителя (тогда дѣленіе невозможно).

II. Когда многочлены расположены по возрастающимъ степенямъ главной буквы, то сколько бы ни продолжать дѣленія, нельзя получить такого остатка, у котораго первый членъ содержалъ бы главную букву съ показателемъ, меньшимъ, чѣмъ у перваго члена дѣлителя, потому что при такомъ расположеніи показатели главной буквы въ первыхъ членахъ остатковъ идутъ, увеличиваясь (см. стран. 76). Въ этомъ случаѣ поступаютъ такъ: предположивъ, что цѣлое частное возможно, вычисляютъ заранѣе послѣдній членъ его, дѣля высшій

членъ дѣлимаго (т.-е. послѣдній) на **высшій** членъ дѣлителя (на послѣдній). Найдя высшій членъ частнаго, продолжаютъ дѣленіе до тѣхъ поръ, пока въ частномъ не получится члена, у котораго показатель главной буквы равенъ показателю вычисленнаго члена. Если при этомъ получится остатокъ, то дѣленіе невозможно, потому что цѣлое частное не должно содержать членовъ выше того, который получается отъ дѣленія высшаго члена дѣлимаго на высшій членъ дѣлителя.

Примѣръ 1. $(3x^2+5x-8):(2x^3-4)$.

Дѣленіе невозможно, потому что $3x^2$ не дѣлится на $2x^3$.

Примѣръ 2. $(b^4+5b^3-3b^2+2b):(b^3-2b^2)$.

Дѣленіе невозможно потому, что $2b$ не дѣлится на $2b^2$.

Примѣръ 3.

$$\begin{array}{r|l} 10a^4-2a^3 \quad » \quad +3a+4 & 2a^2-1 \\ \cline{2-2} » \quad +5a^2 & 5a^2-a+\frac{5}{2} \\ \hline -2a^3+5a^2+3a\ldots & \\ » \quad -a & \\ \hline 5a^2+2a+4 & \\ » \quad +\frac{5}{2} & \\ \hline 2a+6\frac{1}{2} & \end{array}$$

Дѣленіе невозможно, потому что мы дошли до такого остатка, у котораго первый членъ не дѣлится на первый членъ дѣлителя.

Примѣръ 4.

$$\begin{array}{r|l} 4+3a \quad » \quad -2a^3+10a^4 & -1+2a^2 \\ \cline{2-2} » \quad +8a^2 & -4-3a-8a^2 \\ \hline 3a+8a^2-2a^3 & \\ » \quad +6a^3 & \\ \hline 8a^2+4a^3+10a^4 & \\ » \quad +16a^4 & \\ \hline 4a^3+26a^4 & \end{array}$$

Дѣленіе невозможно, потому что, продолжая дѣйствіе, мы

получили бы въ частномъ членъ $-4a^3$, тогда какъ послѣднiй членъ цѣлаго частнаго, если бы оно могло существовать, долженъ быть $5a^2$.

75. Зависимость между дѣлимымъ, дѣлителемъ и остаткомъ. Пусть дѣлимое будетъ какой-нибудь многочленъ N, дѣлитель P, частное Q и остатокъ R. Легко убѣдиться, что между этими многочленами существуетъ такая же зависимость, какъ и при ариѳметическомъ дѣленiи, т.-е. дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное, плюсъ остатокъ. Дѣйствительно, изъ процесса дѣленiя видно, что остатокъ R получается отъ вычитанiя изъ многочлена N всѣхъ членовъ произведенiя PQ. Значитъ: $N-PQ=R$, откуда согласно опредѣленiю вычитанiя слѣдуетъ: $N=PQ+R$.

Этою зависимостью пользуются, когда хотятъ сдѣлать повѣрку дѣленiя многочленовъ; съ этою цѣлью умножаютъ частное на дѣлителя и прибавляютъ къ произведенiю остатокъ, если онъ есть; при правильномъ выполненiи дѣйствiя въ результатѣ должно получиться дѣлимое.

Примѣръ. Повѣримъ правильность дѣленiя въ примѣрѣ 4-мъ предыдущаго параграфа.

$$
\begin{array}{rrr}
-4-3a-8a^2 & & \\
-1+2a^2 & & \\
\hline
+4+3a+8a^3 & & \\
 & -8a^2 & -6a^3-16a^4 \\
\hline
4+3a & & -6a^3-16a^4 \\
 & & +4a^3+26a^4 \\
\hline
4+3a & & -2a^3+10a^4
\end{array}
$$

Замѣчанiе. Раздѣливъ обѣ части равенства: $N=PQ+R$ на Q, получимъ:

$$\frac{N}{Q}=P+\frac{R}{Q}.$$

Этимъ соотношенiемъ иногда пользуются для преобразованiя

дробнаго частнаго Такъ, сдѣлавъ дѣленіе, указанное выше въ примѣрѣ 3-мъ, можемъ написать

$$\frac{10a^4-2a^3+3a+4}{2a^2-1}=5a^2-a+\frac{5}{2}+\frac{2a+6\frac{1}{2}}{2a^2-1}.$$

ГЛАВА VI.

Дѣлимость многочлена, цѣлаго относительно x, на разность $x-a$.

76. Теорема I. Многочленъ, цѣлый относительно x и расположенный по убывающимъ степенямъ этой буквы:

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+K$$

при дѣленіи на разность $x-a$ дастъ въ остаткѣ число, равное значенію дѣлимаго при $x=a$, т.-е. число, равное

$$Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+\ldots+K$$

Док. Разсмотримъ самый процессъ дѣленія многочлена, о которомъ говорится, на разность $x-a$.

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+K \;\big|\; x-a$$

$$\text{»} \; +Aax^{m-1} \qquad Ax^{m-1}+(Aa+B)x^{m-2}+(Aa^2+Ba+C)x^{m-3}+\ldots$$

1 ост $=(Aa+B)x^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+K$

$$\text{»} \; +(Aa^2+Ba)x^{m-2}$$

2 ост. $=(Aa^2+Ba+C)x^{m-2}+Dx^{m-3}+\ldots+K$

$$\text{»} \; +(Aa^3+Ba^2+Ca)x^{m-3}$$

3 ост $=(Aa^3+Ba^2+Ca+D)x^{m-3}+\ldots+K$

. . . . .

Изъ разсмотрѣнія остатковъ легко замѣтить, что 4-й остатокъ долженъ быть: $(Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E)\,x^{m-4}+\ldots+K$, 5-й остатокъ окажется. $Aa^5+Ba^4+Ca^3+Da^2+Ea+F)\,x^{m-5}+\ldots+K$, и т. д. Очевидно, что m-ый остатокъ, содержа въ первомъ своемъ членѣ букву x съ показателемъ $m-m$, равнымъ O, долженъ быть послѣднимъ, этотъ остатокъ, какъ видно изъ процесса дѣленія, долженъ быть:

$$m\text{-ый остатокъ} = (Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+Da^{m-3}+\ldots+K)\,x^{m-m}=$$
$$=Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+Da^{m-3}+\ldots+K$$

(такъ какъ $x^{m-m}=x^0=1$)

Примѣръ. Многочленъ x^5-3x^2+5x-1 при дѣленіи на $x-2$ дастъ остатокъ, равный $2^5-3.\,2^2+5.2-1=29$.

Слѣдствіе 1-е. Такъ какъ сумму $x+a$ можно разсматривать, какъ разность $x-(-a)$, то, примѣняя къ этой разности доказанную теорему найдемъ:

Многочленъ $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+..+K$ при дѣленіи на $x+a$ дастъ въ остаткѣ число, равное значенію дѣлимаго при $x=-a$, т.-е. число равное $A(-a)^m+B(-a)^{m-1}+C(-a)^{m-2}+...+K$.

Примѣръ. Многочленъ x^5-3x^2+5x-1 при дѣленіи на $x+2$ даетъ остатокъ $(-2)^5-3(-2)^2+5(-2)-1=-55$.

Слѣдствіе 2-е. Для того, чтобы многочленъ $Ax^m+Bx^{m-2}+Cx^{m-2}+$ $+..+K$ дѣлился на разность $x-a$, необходимо и достаточно, чтобы при $x=a$ онъ обращался въ 0.

Это необходимо, такъ какъ если указанный многочленъ дѣлится на $x-a$, то остатокъ отъ дѣленія долженъ равняться 0, а этотъ остатокъ есть то значеніе дѣлимаго, которое онъ принимаетъ при $x=a$. Это достаточно, такъ какъ если многочленъ обращается въ 0 при $x=a$, то это значитъ, что остатокъ отъ дѣленія этого многочлена на $x-a$ равенъ 0.

Примѣръ. Многочленъ x^3-4x^2+9 дѣлится на $x-3$, потому что остатокъ отъ дѣленія равенъ $3^3-4.3^2+9=0$.

Слѣдствіе 3-е. Для того, чтобы многочленъ $Ax^m+Bx^{m-1}+.+K$ дѣлился на сумму $x+a$, необходимо и достаточно, чтобы при $x=-a$ онъ обращался въ 0.

Это объясняется такъ же, какъ и слѣдствіе 2-е.

Примѣръ. Многочленъ $2x^2+x-45$ дѣлится на $x+5$, такъ какъ остатокъ равенъ $2(-5)^2+(-5)-45=0$

77. Теорема 2. Если многочленъ $Ax^m+Bx^{m-1}+.+K$ дѣлится на $x-a$ и на $x-b$, при чемъ $a\neq b$, то онъ дѣлится на произведеніе $(x-a)(x-b)$

Док. Обозначимъ для краткости дѣлимое буквою P_x и частное отъ дѣленія P_x на $x-a$ буквою Q_x. Тогда будемъ имѣть

$$P_x=(x-a)Q_x$$

Вставимъ въ это тождество на мѣсто x число b. Тогда лѣвая его часть обратится въ 0, такъ какъ по условію многочленъ P_x дѣлится на $x-b$; правая же часть равенства будетъ $(b-a)Q_b$, если черезъ Q_b обозначимъ значеніе Q_x при $x=b$, слѣд., мы будемъ имѣть

$$0=(b-a)Q_b$$

Для того, чтобы произведеніе равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ сомножителей равнялся нулю. Сомножитель $b-a\neq 0$,

такъ какъ по условію $b \neq a$, слѣд. $Q_b = 0$. Но если $Q_b = 0$, то Q'_x дѣлится на $x-b$. Обозначивъ частное отъ этого дѣленія черезъ Q'_x, будемъ имѣть

$$Q_x = (x-b)Q'_x, \text{ и, слѣд., } P_x = (x-a)(x-b)Q'_x$$

Отсюда видно, что P_x дѣлится на произведеніе $(x-a)(x-b)$.

Примѣръ. Многочленъ $x^3+2x^2-13x+10$ обращается въ 0 при $x=1$ и при $x=2$, слѣд., онъ дѣлится и на $x-1$, и на $x-2$; въ такомъ случаѣ онъ дѣлится на $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$.

Замѣчаніе. Подобнымъ же образомъ можно доказать, что если многочленъ $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+K$ дѣлится на $x-a$, на $x-b$, на $x-c$ и т. д., то онъ раздѣлится на произведеніе $(x-a)(x-b)(x-c)$.

78. Дѣлимость нѣкоторыхъ двучленовъ. Слѣдуетъ обратить особое вниманіе на слѣдующіе случаи дѣлимости двучленовъ:

1) **Разность одинаковыхъ степеней двухъ чиселъ дѣлится на разность тѣхъ же чиселъ,** такъ какъ x^m-a^m при дѣленіи на $x-a$ даетъ остатокъ $a^m-a^m=0$.

2) **Сумма одинаковыхъ степеней двухъ чиселъ не дѣлится на разность тѣхъ же чиселъ,** такъ какъ x^m+a^m при $x=a$ даетъ остатокъ $a^m+a^m=2a^m$, что при $a \neq 0$ не равно 0.

3) **Разность одинаковыхъ четныхъ степеней двухъ чиселъ дѣлится, а нечетныхъ не дѣлится на сумму этихъ чиселъ,** такъ какъ x^m-a^m при $x=-a$ даетъ $(-a)^m-a^m$, что при m четномъ равно нулю, а при m нечетномъ равно $-2a^m$.

4) **Сумма одинаковыхъ нечетныхъ степеней двухъ чиселъ дѣлится, а четныхъ не дѣлится на сумму этихъ чиселъ,** такъ какъ x^m+a^m при $x=-a$ даетъ $(-a)^m+a^m$, что при m нечетномъ равно нулю, а при m четномъ равно $2a^m$.

Замѣчанія. 1°. Мы видимъ, что разность x^m-a^m при m четномъ дѣлится и на $x-a$, и на $x+a$; слѣд., согласно теоремѣ 2-й, эта разность при m четномъ дѣлится на произведеніе $(x-a)(x+a)$, т.-е. на x^2-a^2. Такъ, $x^4-a^4=(x^2-a^2)(x^2+a^2)$, $x^6-a^6=(x^2-a^2)(x^4+a^2x^2+a^4)$, и т. п.

2°. Полезно имѣть въ виду слѣдующее простое соображеніе, посредствомъ котораго легко возстановить въ памяти указанные четыре случая дѣлимости. Пусть, напр., мы желаемъ вспомнить, когда x^m+a^m дѣлится на $x+a$. Для этого разсуждаемъ такъ. x^1+a^1 дѣлится на $x+a$, а x^2+a^2 не дѣлится на $x+a$, значитъ, сумма нечетныхъ степеней дѣлится, а сумма четныхъ не дѣлится на $x+a$. Подобнымъ же образомъ легко можемъ вспомнить дѣлимость или недѣлимость и въ остальныхъ изъ указанныхъ случаевъ.

79. Частныя, получаемыя при дѣленіи указанныхъ двучленовъ. Изъ разсмотрѣнія процесса дѣленія:

$$
\begin{array}{lll}
 & x^m-a^m & \mid x-a \\
 & \pm ax^{m-1} & x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ .\ \ .\ +a^{m-1} \\
\text{1-й ост.} & ax^{m-1}-a^m & \\
 & \pm a^2x^{m-2} & \\
\text{2-й ост...} & a^2x^{m-2}-a^m & \\
 & \pm a^3x^{m-3} & \\
\text{3-й ост....} & a^3x^{m-3}-a^m & \\
 & .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . & \\
m-1\ \text{ост} & .\ a^{m-1}x-a^m & \\
m\text{-й ост.}\ .\ .\ . & a^m-a^m=0 &
\end{array}
$$

замѣчаемъ, что многочленъ, получившійся в частномъ, содержитъ m членовъ; сумма показателей въ каждомъ членѣ при a и x есть число постоянное, равное $m-1$; показатели x идутъ, уменьшаясь на 1 отъ $m-1$ до 0, показатели a идутъ, увеличиваясь на 1 отъ 0 до $m-1$; коэффиціенты у всѣхъ членовъ равны 1; знаки всѣ $+$.

Чтобы получить частное отъ дѣленія x^m-a^m на $x+a$ при m четномъ, достаточно въ полученномъ выше частномъ замѣнить a на $-a$. То же самое можно сказать о частномъ $(x^m+a^m):(x+a)$ при m нечетномъ. Такимъ образомъ:

1) $x^m-a^m=(x-a)\ (x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ .\ \ .\ +a^{m-1})$,

2) $x^m-a^m=(x+a)\ (x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ .\ \ .\ -a^{m-1})$

(при m четномъ),

3 $x^m+a^m=(x+a)\ (x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ .\ .\ .\ +a^{m-1})$

(при m нечетномъ).

ГЛАВА VII.

Разложеніе многочленовъ на множителей.

80. Укажемъ нѣкоторые простѣйшіе случаи, когда многочленъ можетъ быть разложенъ на цѣлыхъ множителей.

I. Если всѣ члены многочлена содержатъ общаго множителя, то его можно вывести за скобку, такъ какъ

$$am+bm-cm=(a+b-c)m.$$

Примѣры. 1) $16a^2b^3x-4a^3b^2x^2=4a^2b^2x(4b-ax)$,

2) $x^{n+1}-2x^n+3x^{n-1}=x^{n-1}(x^2-2x+3)$;

3) $4m(a-1)-3n(a-1)=(a-1)(4m-3n)$.

II. Если данный двучленъ представляетъ собою квадратъ одного числа безъ квадрата другого числа, то его можно замѣнить произведеніемъ суммы этихъ чиселъ на ихъ разность, такъ какъ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Примѣры. 1) $m^4-n^4=(m^2)^2-(n^2)^2=(m^2+n^2)(m^2-n^2)=$
$=(m^2+n^2)(m+n)(m-n)$;
2) $25x^2-4=(5x)^2-2^2=(5x+2)(5x-2)$;
3) $y^2-1=y^2-1^2=(y+1)(y-1)$;
4) $x^2-(x-1)^2=[x+(x-1)][x-(x-1)]=$
$=(x+x-1)(x-x+1)=2x-1$;
5) $(x+y^2)-(x-y)^2=(x+y+x-y)(x+y-x+y)=$
$=2x\quad 2y=4xy$.

III. Если данный трехчленъ представляетъ собою сумму квадратовъ двухъ чиселъ, увеличенную или уменьшенную удвоеннымъ произведеніемъ этихъ чиселъ, то его можно замѣнить квадратомъ суммы или разности этихъ чиселъ, такъ какъ

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=(b-a)^2.$$

Примѣры. 1) $a^2+2a+1=a^2+2a\,.\,1+1^2=(a+1)^2$;
2) $x^4+4-4x^2=(x^2)^2+2^2-2(2x^2)=(x^2-2)^2=$
$=(2-x^2)^2$;
3) $-x+25x^2+0{,}01=(5x)^2+(0{,}1)^2-2(5x\,.\,0{,}1)=$
$=(5x-0{,}1)^2=(0{,}1-5x)^2$;
4) $(a+x)^2+2(a+x)+1=[(a+x)+1]^2=$
$=(a+x+1)^2$,
5) $4x^n-x^{2n}-4=-(x^{2n}+4-4x^n)=-(x^n-2)^2=$
$=-(2-x^n)^2$.

IV. Иногда многочленъ, состоящій изъ 4 или болѣе членовъ, можно привести къ виду a^2-b^2 или $a^2\pm 2ab+b^2$, разбивъ его предварительно на подходящія части.

Примѣры. 1) $m^2+n^2-2mn-p^2=(m^2+n^2-2mn)-p^2=$
$=(m-n)^2-p^2=(m-n+p)(m-n-p)$;
2) $x^2-y^2+6y-9=x^2-(y^2-6y+9)=x^2-(y-3)^2=$
$=[x+(y-3)][x-(y-3)]=(x+y-3)(x-y+3)$;
3) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=$
$=(a^2+b^2+2ab)+c^2+(2ac+2bc)=$
$=(a+b)^2+c^2+2(a+b)c=(a+b+c)^2$.

V. Иногда члены многочлена можно соединять въ нѣсколько группъ, изъ которыхъ каждая разлагается на множителей; если въ числѣ этихъ множителей окажутся общіе, то ихъ можно вынести за скобки.

Примѣры. 1) $ac+ad+bc+bd=(ac+ad)+(bc+bd)=$
$=a(c+d)+b(c+d)=(c+d)(a+b)$;
2) $12-4x-3x^2+x^3=(12-4x)-(3x^2-x^3)=$
$=4(3-x)-x^2(3-x)=(3-x)(4-x^2)=$
$=(3-x)(2+x)(2-x)$.

VI. Иногда бываетъ полезно ввести вспомогательные члены, или какой-нибудь членъ разложить на два члена.

Примѣры. 1) $a^3-b^3=a^3-a^2b+a^2b-b^3=a^2(a-b)+b(a^2-b^2)=$
$=a^2(a-b)+b(a+b)(a-b)=(a-b)[a^2+b(a+b)]=$
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
2) $a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b+b^3=a^2(a+b)-b(a^2-b^2)=$
$a^2(a+b)-b(a+b)(a-b)=(a+b)[a^2-b(a-b)]=$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.
3) $2x^2+3xy+y^2=2x^2+2xy+xy+y^2=$
$=2x(x+y)+y(x+y)=(x+y)(2x+y)$.

Разложенія разности и суммы двухъ кубовъ, указанныя въ примѣрахъ 1-мъ и 2-мъ, полезно запомнить:

$$a^3-b^3=(a-b)\ (a^2+ab+b^2),$$
$$a^3+b^3=(a+b)\ (a^2-ab+b^2).$$

Въ вѣрности этихъ формулъ легко также убѣдиться непосредственнымъ умноженіемъ многочленовъ, стоящихъ въ правой части равенства.

ГЛАВА VIII.

Алгебраическія дроби.

81. Опредѣленіе. Алгебраической дробью называется частное отъ дѣленія двухъ алгебраическихъ выраженій въ томъ случаѣ, когда дѣленіе только указано. Такъ, $a : b$, $\frac{a+b}{c-d}$, $\frac{2x^2-x+5}{x+2}$ и тому подобныя выраженія суть алгебраическія дроби. Въ такихъ выраженіяхъ дѣлимое называется числителемъ, дѣлитель — знаменателемъ, а то и другое — членами дроби.

Замѣтимъ, что алгебраическая дробь отличается существенно отъ ариѳметической тѣмъ, что члены ариѳметической дроби всегда числа цѣлыя положительныя, тогда какъ члены алгебраической дроби могутъ быть числами какими угодно, лишь бы только знаменатель не равнялся нулю (такъ какъ дѣленіе на 0 невозможно). Напримѣръ, $\frac{3}{4}$ есть ариѳметическая дробь, а выраженіе $\frac{\frac{2}{5}}{-3}$ представляетъ собою частный случай алгебраической дроби. Несмотря однако на это различіе, съ дробями алгебраическими, какъ мы сейчасъ увидимъ, можно поступать по тѣмъ же правиламъ, какія указаны въ ариѳметикѣ для дробей ариѳметическихъ.

82. Основное свойство дроби. Величина дроби не измѣнится, если оба ея члена умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число, не равное нулю.

Пусть имѣемъ дробь $\frac{a}{b}$ и какое-нибудь положительное или отрицательное число m. Требуется доказать, что $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$.

Обозначимъ частное отъ дѣленія a на b черезъ q, а частное отъ дѣленія am на bm черезъ q', т.-е. положимъ, что

$$\frac{a}{b}=q \ [1], \qquad \frac{am}{bm}=q' \ [2].$$

Докажемъ, что $q=q'$. По опредѣленію дѣленія изъ равенствъ [1] и [2] выводимъ:

$$a=bq \quad [3], \quad am=bmq' \quad [4].$$

Умножимъ обѣ части равенства [3] на m (отчего, конечно, равенство не нарушится):

$$am=bqm \; [5].$$

Сравнивая равенства [5] и [4], находимъ, что оба произведенія: bqm и bmq' равны одному и тому же числу am; поэтому они равны между собою:

$$bqm=bmq'.$$

Раздѣлимъ обѣ части этого равенства на bm (что возможно сдѣлать, такъ какъ числа b и m не нули); равенство отъ этого не нарушится:

$$\frac{bqm}{bm}=\frac{bmq'}{bm}, \text{ т.-е. } q=q' \text{ и, слѣд., } \frac{a}{b}=\frac{am}{bm}.$$

Переходя въ этомъ равенствѣ отъ правой части къ лѣвой, видимъ, что величина дроби не измѣняется о т ъ д ѣ л е н і я ея членовъ на одно и то же число, не равное нулю.

Оговорка: «не равное нулю» должна быть сдѣлана нами потому, что отъ умноженія членовъ дроби $\frac{a}{b}$ на 0 мы получили бы частное $\frac{0}{0}$, которое равняется любому числу (§ 39,2°), а отъ дѣленія на 0 получили бы невозможное выраженіе $\frac{a:0}{b:0}$ (§ 39, 3°).

83. Приведеніе членовъ дроби къ цѣлому виду. Умножая оба члена дроби на выбранное надлежащимъ образомъ число или алгебраическое выраженіе, мы всегда можемъ преобразовать данную дробь такъ, что числитель и знаменатель ея будутъ ц ѣ л ы м и алгебраическими выраженіями.

Примѣры.

1) $\dfrac{\frac{3}{4}a}{b}=\dfrac{3a}{4b}$ (оба члена умножены на 4);

2) $\dfrac{7a}{2\frac{3}{5}b}=\dfrac{35a}{13b}$ (на 5),

3) $\dfrac{\frac{2}{3}a}{\frac{7}{8}b}=\dfrac{16a}{21b}$ (на 24);

4) $\dfrac{2a+\frac{5}{6}}{1-a}=\dfrac{12a+5}{6-6a}$ (на 6);

5) $\dfrac{ax-1}{1-\frac{1}{x}}=\dfrac{ax^2-x}{x-1}$ (на x).

84. Перемѣна знаковъ у членовъ дроби.

1°. Перемѣна знаковъ передъ обоими членами дроби (передъ числителемъ и передъ знаменателемъ) не измѣняетъ величины дроби.

Напримѣръ, $\dfrac{-8}{-4}=2$ и $\dfrac{8}{4}=2$; $\dfrac{-10}{+2}=-5$ и $\dfrac{+10}{-2}=-5$.

2°. Перемѣна знака передъ какимъ-нибудь однимъ членомъ дроби равносильна перемѣнѣ знака передъ самою дробью; такъ, если у дроби $\frac{a}{b}$ перемѣнимъ знакъ передъ числителемъ или передъ знаменателемъ, то получимъ:

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b},\ \frac{a}{-b}=-\frac{a}{b},$$

потому что при дѣленіи минусъ на плюсъ и плюсъ на минусъ даютъ минусъ.

Этими двумя свойствами дроби иногда пользуются для нѣкотораго преобразованія ея; напр.,

$$\frac{-3x}{a-b}=\frac{3x}{b-a},\ \frac{1-a}{2-b}=\frac{a-1}{b-2}.$$

$$\frac{m^2-n^2}{n-m}=\frac{m^2-n^2}{-(m-n)}=-\frac{m^2-n^2}{m-n}=-(m+n).$$

85. Сокращенiе дроби. Если числитель и знаменатель имѣютъ общаго множителя, не равнаго нулю, то на него можно сократить дробь (потому что величина дроби не измѣняется отъ дѣленiя обоихъ ея членовъ на одно и то же число, не равное нулю).

Разсмотримъ отдѣльно слѣдующiе два случая сокращенiя дробей.

1-й случай: числитель и знаменатель— одночлены.

Примѣры. 1) $\frac{12a^2x^3}{15ax^2y}=\frac{4ax}{5y}$ (сокращено на $3ax^2$),

2) $\frac{54a^nb^{n-3}}{72ab^{n-1}}=\frac{3a^{n-1}}{4b^2}$ (сокращено на $18ab^{n-3}$).

Правило. Чтобы сократить дробь, у которой числитель и знаменатель одночлены съ цѣлыми коэффицiентами, предварительно находятъ общаго наибольшаго дѣлителя коэффицiентовъ, приписываютъ къ нему множителями всѣ буквы, которыя входятъ одновременно въ числителя и знаменателя дроби, беря каждую изъ этихъ буквъ съ наименьшимъ показателемъ, съ какимъ она входитъ въ члены дроби; составивъ такое произведенiе *), дѣлятъ на него оба члена дроби.

2-й случай: числитель или знаменатель— многочлены.

Примѣры.

1) $$\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}=\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{(x^2-1)^2}=\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-1)}=$$

$$=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x+1};$$

2) $$\frac{n-m}{m^2-n^2}=\frac{-(m-n)}{(m+n)(m-n)}=\frac{-1}{m+n}=-\frac{1}{m+n}.$$

---

*) По аналогiи съ цѣлыми числами это произведенiе можно назвать общимъ наибольшимъ дѣлителемъ числителя и знаменателя дроби.

Правило. Чтобы сократить дробь съ многочленнымъ числителемъ или знаменателемъ, предварительно разлагаютъ многочлены на множителей и затѣмъ сокращаютъ на общихъ множителей, если такіе окажутся*).

86. Приведеніе дробей къ одинаковому знаменателю. Умножая оба члена каждой дроби на выбранное надлежащимъ образомъ число или алгебраическое выраженіе, мы можемъ сдѣлать знаменателей всѣхъ данныхъ дробей одинаковыми. При этомъ могутъ представиться тѣ же 3 случая, какъ и для дробей ариѳметическихъ, а именно:

1-й случай: знаменатели, всѣ или нѣкоторые, имѣютъ общихъ множителей.

Чтобы найти въ этомъ случаѣ простѣйшаго общаго знаменателя, составляютъ произведеніе изъ всѣхъ различныхъ множителей, на которые разлагаются знаменатели, беря каждаго множителя съ наибольшимъ показателемъ, съ какимъ онъ входитъ въ составъ знаменателей **).

Найдя такое произведеніе, слѣдуетъ затѣмъ выписать для каждой дроби **дополнительныхъ множителей** (не достающихъ въ ея знаменателѣ для полученія общаго знаменателя) и на нихъ умножить оба члена каждой дроби.

Примѣръ 1-й. $\frac{az}{15x^2y^3}, \frac{y^2}{12x^3z^2}, \frac{az}{18xy^2}$

Такъ какъ $15x^2y^3 = 3 \cdot 5x^2y^3$, $12x^3z^2 = 2^2 \cdot 3x^3z^2$ и $18xy^2 = 2 \cdot 3^2xy^2$, то различные множители, входящіе въ составъ знаменателей,

---

*) Обращаемъ вниманіе учащихся на ошибку, которую иногда дѣлаютъ при сокращеніи дробей: нельзя сокращать часть числителя съ частью знаменателя. Напримѣръ, было бы вообще ошибочно сократить дробь $\frac{am+b}{cm+d}$ такъ: $\frac{a+b}{c+d}$.

**) Такое произведеніе, по аналогіи съ цѣлыми числами, можно назвать наименьшимъ кратнымъ всѣхъ знаменателей.

суть 2, 3, 5, x, y и z. Взявъ каждаго изъ этихъ сомножителей съ наибольшимъ показателемъ, получимъ $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5x^3y^3z^2=180x^3y^3z^2$. Это и будетъ общій знаменатель. Дополнительные множители будутъ: для 1-й дроби: $12xz^2$, для 2-й: $15y^3$ для 3-й: $10x^2z^2y$.

Послѣ приведенія дроби будутъ слѣдующія:

$$\frac{12axz^3}{180x^3y^3z^2},\ \frac{15y^5}{180x^3y^3z^2},\ \frac{10ax^2yz^3}{180x^3y^3z^2}$$

Примѣръ 2-й. $\frac{1}{x^2+2x+1},\ \frac{4}{x+2x^2+x^3},\ \frac{5}{2x+2x^2}.$

Разлагаемъ знаменателей на множителей.

$x^2+2x+1=(x+1)^2$	доп. мн. $2x$
$x+2x^2+x^3=x(x+1)^2$	» » 2
$2x+2x^2=2x(x+1)$	» « $x+1$.
Общ. знам. $=2x(x+1)^2$	

Послѣ приведенія дроби будутъ слѣдующія:

$$\frac{2x}{2x(x+1)^2},\ \frac{8}{2x(x+1)^2} \text{ и } \frac{5(x+1)}{2x(x+1)^2}.$$

Примѣръ 3-й. $\frac{2}{x^2-a^2},\ \frac{1}{a-x},\ \frac{3}{x+a}.$

Перемѣнимъ знаки въ знаменателѣ 2-й дроби на противоположные, а чтобы не измѣнилась величина дроби, измѣнимъ знакъ и у ея числителя:

$$\frac{2}{x^2-a^2},\ \frac{-1}{x-a},\ \frac{3}{x+a}.$$

Общ. зн.$=x^2-a^2$; доп. мн.: для 2-й дроби: $x+a$, для 3-й: $x-a$. Послѣ приведенія дроби будутъ:

$$\frac{2}{x^2-a^2},\ \frac{-x-a}{x^2-a^2},\ \frac{3(x-a)}{x^2-a^2}.$$

2-й случай: одинъ изъ знаменателей дѣлится на всѣхъ остальныхъ.

Этотъ знаменатель и будетъ общимъ. Дробь, имѣющую этого знаменателя, оставляютъ безъ перемѣны, а члены каждой изъ остальныхъ дробей умножаютъ на соотвѣтствующаго дополнительнаго множителя.

Примѣръ. $\frac{x}{a-b}, \frac{y}{a+b}, \frac{z}{a^2-b^2}$.

Знаменатель a^2-b^2 дѣлится на $a-b$ и на $a+b$. Это и будетъ общій знаменатель. Дополнительный множитель для первой дроби есть $a+b$, для второй $a-b$; послѣ приведенія къ общему знаменателю получимъ:

$$\frac{(a+b)x}{a^2-b^2}, \frac{(a-b)y}{a^2-b^2}, \frac{z}{a^2-b^2}.$$

3-й случай: знаменатели, взятые попарно, не имѣютъ общихъ множителей.

Въ этомъ случаѣ оба члена каждой дроби надо умножить на произведеніе знаменателей всѣхъ остальныхъ дробей.

Примѣры. 1) $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \ldots \ldots \frac{adf}{bdf}, \frac{cbf}{dbf}, \frac{ebd}{fbd}$;

2) $\frac{x}{m^2}, \frac{y}{n^2}, \frac{z}{pq} \ldots \ldots \frac{xn^2pq}{m^2n^2pq}, \frac{ym^2pq}{m^2n^2pq}, \frac{zm^2n^2}{m^2n^2pq}$;

3) $\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a-b} \ldots \ldots \frac{a(a-b)}{a^2-b^2}, \frac{b(a+b)}{a^2-b^2}$.

87. Сложеніе и вычитаніе дробей. По правилу дѣленія многочлена на одночленъ (§ 71) мы имѣемъ право написать.

$$\frac{a+b+c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}, \quad \frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}.$$

Читая эти равенства справа налѣво, можемъ вывести слѣдующія правила:

1) **чтобы сложить дроби съ одинаковыми знаменателями, складываютъ ихъ числителей и подъ суммою подписываютъ того же знаменателя;**

2) чтобы вычесть дроби съ одинаковыми знаменателями, изъ числителя уменьшаемаго вычитаютъ числителя вычитаемаго и подъ разностью подписываютъ общаго знаменателя.

Если данныя для сложенія или вычитанія дроби имѣютъ разныхъ знаменателей, то предварительно ихъ слѣдуетъ привести къ одинаковому знаменателю.

Примѣры.

(Надъ дробями надписаны дополнительные множители)

1) $\overset{df}{\frac{a}{b}}+\overset{bf}{\frac{c}{d}}+\overset{bd}{\frac{e}{f}}=\frac{adf+cbf+ebd}{bdf}$ 2) $\overset{2b}{\frac{3m^2}{10a^2bc}}-\overset{5ca}{\frac{5n^2}{4ab^2}}=\frac{6bm^2-25acn^2}{20a^2b^2c}$;

3) $\frac{x+1}{2x-2}+\frac{2x-3}{x+1}-\frac{x^2+3}{2x^2-2}$.

$2x-2=2(x-1)$	доп. мн. $= x+1$
$x+1=x+1$	» » $=2(x-1)$
$2x^2-2=2(x+1)(x-1)$	» » $=1$.
Общ. знам. $=2(x-1)(x+1)$	

Въ результатѣ получимъ:

$$\frac{(x+1)(x+1)+(2x-3)2(x-1)-(x^2+3)}{2(x^2-1)}=$$

$$=\frac{x^2+2x+1+(4x^2-6x-4x+6)-x^2-3}{2(x^2-1)}=$$

$$=\frac{4x^2-8x+4}{2(x^2-1)}=\frac{4(x-1)(x-1)}{2(x+1)(x-1)}=\frac{2(x-1)}{x+1}\ ^{1)}.$$

[1]) Обращаемъ вниманіе учащихся на ошибку, которую иногда дѣлаютъ при вычитаніи дробей Пусть, напр., дано.

$$\frac{a}{m}-\frac{b+c}{m}.$$

Подписывая общаго знаменателя, мы должны помнить, что знакъ минусъ относится ко всему числителю $b+c$, а не къ одному члену b, поэтому было бы ошибочно написать такъ

$$\frac{a}{m}-\frac{b+c}{m}=\frac{a-b+c}{m}$$

Правильный результатъ будетъ:

$$\frac{a}{m}-\frac{b+c}{m}=\frac{a-(b+c)}{m}=\frac{a-b-c}{m}$$

Замѣчаніе. Такъ какъ всякое алгебраическое выраженіе можно представить въ видѣ дроби, у которой числителемъ служитъ это выраженіе, а знаменатель есть 1, то правила сложенія и вычитанія дробей примѣнимы и къ случаямъ, когда какое-либо данное выраженіе есть цѣлое. Напримѣръ:

$$3a^2-\frac{2x}{ab}=\frac{3a^2}{1}-\frac{2x}{ab}=\frac{3a^2 \cdot ab}{ab}-\frac{2x}{ab}=\frac{3a^3b-2x}{ab}.$$

88. Умноженіе дробей. Чтобы умножить дробь на дробь, перемножаютъ ихъ числителей между собою и знаменателей между собою и первое произведеніе дѣлятъ на второе.

Требуется доказать, что

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Для доказательства положимъ, что

$$\frac{a}{b}=q \text{ и } \frac{c}{d}=q'$$

Откуда: $a=bq$ и $c=dq'$.

Перемножимъ лѣвыя части этихъ двухъ равенствъ между собою и правыя части между собою; такъ какъ при этомъ равныя числа мы умножаемъ на равныя, то и результаты должны быть равны; слѣдов.:

$$ac=bqdq'.$$

Въ правой части этого равенства, пользуясь сочетательнымъ свойствомъ произведенія (§ 36, 2°), соединимъ сомножителей въ такія группы:

$$ac=(bd)(qq').$$

Раздѣлимъ обѣ части этого равенства на bd, (что возможно

сдѣлать, такъ какъ b и d, какъ знаменатели данныхъ дробей, суть числа, отличныя отъ нуля).

$$\frac{ac}{bd}=qq', \text{ т.-е. } \frac{ac}{bd}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}.$$

Замѣчанія. 1. Правило умноженія дробей распространяется и на тѣ случаи, когда множимое или множитель—цѣлыя выраженія; напр.:

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c};$$

$$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{1}=\frac{ac}{b}.$$

2. Правило умноженія дробей распространяется и на тотъ случай, когда перемножаются болѣе двухъ дробей; напр.:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}\cdot\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}.$$

89. Дѣленіе дробей. Чтобы раздѣлить дробь на дробь, умножаютъ числителя первой дроби на знаменателя второй, а знаменателя первой дроби на числителя второй, и первое произведеніе дѣлятъ на второе. Такъ:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Въ этомъ легко убѣдиться повѣркою: умноживъ предполагаемое частное на дѣлителя по правилу умноженія дробей, мы получимъ дѣлимое.

$$\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b}.$$

Такъ какъ $\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$, то можно высказать другое правило: **чтобы раздѣлить дробь на дробь, достаточно первую дробь умножить на обратную второй.**

Замѣчаніе. Правило дѣленія дроби на дробь можно

примѣнять и къ случаямъ дѣленія дроби на цѣлое и цѣлаго на дробь:

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}.$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{bc}.$$

90. Примѣръ на преобразованіе дроби. Пусть требуется упростить дробь:

$$\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{1+\cfrac{x+1}{3-x}}}$$

Складываемъ 1 съ дробью $\frac{x+1}{3-x}$:

$$1+\frac{x+1}{3-x}=\frac{3-x}{3-x}+\frac{x+1}{3-x}=\frac{3-x+x+1}{3-x}=\frac{4}{3-x}.$$

Дѣлимъ 1 на дробь $\frac{4}{3-x}$:

$$1 : \frac{4}{3-x}=\frac{3-x}{4}.$$

Складываемъ x съ этою дробью:

$$x+\frac{3-x}{4}=\frac{4x}{4}+\frac{3-x}{4}=\frac{4x+3-x}{4}=\frac{3x+3}{4}.$$

Наконецъ, дѣлимъ 1 на послѣднюю дробь:

$$1 : \frac{3x+3}{4}=\frac{4}{3x+3}=\frac{4}{3(x+1)}.$$

ГЛАВА IX.

Отрицательные показатели*).

91. Простѣйшее значеніе отрицательнаго показателя. Мы видѣли (§ 68, 3°), что выраженіе a^{-n}, въ которомъ $-n$ есть отрицательное цѣлое число, означаетъ, по условію, частное $\frac{a^m}{a^{m+n}}$, происходящее отъ дѣленія степеней a въ томъ случаѣ, когда показатель дѣлителя больше показателя дѣлимаго на n единицъ. Теперь мы замѣтимъ, что частное это представляетъ собою дробь, которую всегда можно сократить на числителя:

$$a^{-n}=\frac{a^m}{a^{m+n}}=\frac{1}{a^n}.$$

Правило. Число съ отрицательнымъ показателемъ можно замѣнить дробью, у которой числитель есть 1, а знаменатель — то же число съ положительнымъ показателемъ, абсолютная величина котораго равна абсолютной величинѣ отрицательнаго показателя.

Примѣры. $a^{-1}=\frac{1}{a}$; $x^{-2}=\frac{1}{x^2}$; $(a+x)^{-3}=\frac{1}{(a+x)^3}$.

92. Приведеніе дробнаго выраженія къ виду цѣлаго. При помощи отрицательныхъ показателей всякое дробное алгебраическое выраженіе можно представить подъ видомъ цѣлаго; для этого стоитъ только всѣхъ множителей, входящихъ въ знаменателя, перенести множителями въ числителя, взявъ ихъ съ отрицательными показателями. Напримѣръ:

$$\frac{3a}{b^2c^3}=3a\cdot\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{c^3}=3ab^{-2}c^{-3}.$$

Само собою разумѣется, что такое преобразованіе дробнаго выраженія есть только измѣненіе одного внѣшняго вида этого

*) Эту статью, при желаніи преподающаго, можно проходить непосредственно передъ статьей „Дробные показатели“, т.-е. передъ § 279

выраженія, а не его содержанія. Однако это измѣненіе внѣшняго вида имѣетъ очень важное значеніе, такъ какъ **дѣйствія надъ степенями съ отрицательными показателями можно выполнять по тѣмъ же правиламъ, какія были выведены для показателей положительныхъ.** Докажемъ это.

93. I. Умноженіе. Разсмотримъ отдѣльно три случая: 1) когда только множимое имѣетъ отрицательнаго показателя, 2) когда только множитель имѣетъ отрицательнаго показателя и 3) когда оба сомножителя съ отрицательными показателями. Предстоитъ доказать, что во всѣхъ этихъ случаяхъ показатели одинаковыхъ буквъ складываются. Для этого поступимъ такъ: вмѣсто числа съ отрицательнымъ показателемъ подставимъ дробь, у которой числитель есть 1, а знаменатель—это же число съ положительнымъ показателемъ, затѣмъ произведемъ дѣйствіе по правилу, относящемуся до дробей, и полученный результатъ сравнимъ съ тѣмъ, который предстоитъ доказать.

1) Требуется доказать, что $a^{-m} \,.\, a^{n} = a^{-m+n}$.

Доказательство: $a^{-m} \,.\, a^{n} = \frac{1}{a^{m}} . a^{n} = \frac{a^{n}}{a^{m}} = a^{n-m} = a^{-m+n}$.

2) Требуется доказать, что $a^{m} \,.\, a^{-n} = a^{m+(-n)}$.

Доказательство то же самое.

3) Требуется доказать, что $a^{-m} \,.\, a^{-n} = a^{-m+(-n)}$.

Док.: $a^{-m} \,.\, a^{-n} = \frac{1}{a^{m}} \cdot \frac{1}{a^{n}} = \frac{1}{a^{m}a^{n}} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m+(-n)}$.

II. Дѣленіе. Предстоитъ доказать, что при дѣленіи степеней одинаковыхъ чиселъ показатель дѣлителя вычитается изъ показателя дѣлимаго и въ томъ случаѣ, когда эти показатели отрицательны. Для этого разсмотримъ также три случая, подобные тѣмъ, которые были нами указаны при умноженіи:

1) Требуется доказать, что $a^{-m} \,.\, a^{n} = a^{-m-n}$.

Док.: $a^{-m} : a^{n} = \frac{1}{a^{m}} : a^{n} = \frac{1}{a^{m} \,.\, a^{n}} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n}$.

2) Требуется доказать, что $a^m : a^{-n} = a^{m-(-n)}$

Док.: $a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m . a^n = a^{m+n} = a^{m-(-n)}$.

3) Требуется доказать, что $a^{-m} : a^{-n} = a^{-m-(-n)}$.

Док.: $a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m-(-n)}$.

Примѣры. 1) $(3a^{-2n}b^2c^{1-r})(0{,}8a^{n+1}b^{-3}c^{r+2}) = 2{,}4a^{1-n}b^{-1}c^3$.

2) $(x^{2n-1}y^{-m}z^2) : (5x^{-1}y^3z^{-n}) = \frac{1}{5}x^{2n}y^{-m-3}z^{n+2}$.

ГЛАВА X.

Отношеніе и пропорція.

94. Отношеніе. Повторимъ вкратцѣ то, что извѣстно объ отношеніи изъ ариѳметики.

Отношеніемъ одного значенія величины къ другому значенію той же величины называется отвлеченное число, на которое надо умножить второе значеніе, чтобы получить первое.

Такъ, отношеніе 15 арш. къ 3 арш. есть число 5, потому что 15 арш. $=$ 3 арш. $\times 5$; отношеніе 1 фунта къ 1 пуду есть число $\frac{1}{40}$, потому что 1 фун. $=$ 1 п. $\times \frac{1}{40}$; отношеніе отвлеченнаго числа 25 къ отвлеченному числу 100 равно $\frac{1}{4}$, потому что $25 = 100 . \frac{1}{4}$.

Значенія величины, между которыми разсматривается отношеніе, называются *членами* отношенія, при чемъ первое значеніе есть *предыдущій* членъ, а второе значеніе — *послѣдующій* членъ.

Отношеніе именованныхъ чиселъ можетъ быть замѣнено отношеніемъ отвлеченныхъ чиселъ; для этого достаточно выразить именованныя числа въ одной и той же единицѣ и взять отношеніе получившихся отвлеченныхъ чиселъ. Напримѣръ, отношеніе 10 фун. 16 лот. къ 3 лотамъ равно отношенію 336 лот. къ 3 лот., а это отношеніе равно отношенію отвлеченныхъ чиселъ 336 къ 3.

Въ послѣдующемъ изложеніи мы будемъ говорить только объ отношеніи *отвлеченныхъ чиселъ*.

Изъ опредѣленія видно, что отношеніе можно разсматривать, какъ частное отъ дѣленія предыдущаго члена на послѣдующій. Поэтому отношеніе обозначается посредствомъ знаковъ дѣленія; такъ, отношеніе a къ b обозначается $a:b$ или $\frac{a}{b}$; въ этомъ видѣ отношеніе можно разсматривать, какъ алгебраическую дробь.

Зависимость между членами отношенія и самимъ отношеніемъ та же самая, какая существуетъ между дѣлимымъ, дѣлителемъ и частнымъ; такъ, обозначивъ отношеніе $a:b$ черезъ q, получимъ:

$$a=bq, \quad b=a:q.$$

Замѣчаніе. Въ ариѳметикѣ разсматривается отношеніе только ариѳметическихъ (т.-е. положительныхъ) чиселъ; въ алгебрѣ же предполагается, что числа, между которыми разсматривается отношеніе, могутъ быть и положительныя, и отрицательныя; предыдущій членъ можетъ быть и 0 (тогда и отношеніе равно 0), но послѣдующій членъ долженъ быть числомъ, отличнымъ отъ нуля, такъ какъ дѣленіе на 0 невозможно.

95. Пропорція. Равенство, выражающее, что одно отношеніе равно другому отношенію, наз. пропорціей.

Таковы, напр. равенства:

$$8:4=40:20, \quad (+50):(-10)=(-25):(+5),$$

которыя можно писать и такъ:

$$\frac{8}{4}=\frac{40}{20}, \quad \frac{+50}{-10}=\frac{-25}{+5}.$$

Изъ 4 чиселъ, составляющихъ пропорцію, 1-е и 4-е наз. *крайними* членами, 2-е и 3-е — *средними* членами, 1-е и 3-е — *предыдущими*, 2-е и 4-е — *послѣдующими*.

96. Теорема. Во всякой пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ.

Для доказательства назовемъ буквою q каждое изъ отношеній пропорціи $a:b=c:d$; тогда $a=bq$ и $d=\frac{c}{q}$. Перемноживъ

эти два равенства, найдемъ:

$$ad=bq\cdot\frac{c}{q}=\frac{bqc}{q}=bc,$$

что и требовалось доказать.

Отсюда слѣдуетъ: **крайній членъ пропорціи равенъ произведенію среднихъ, дѣленному на другой крайній;**

средній членъ пропорціи равенъ произведенію крайнихъ, дѣленному на другой средній.

97. Обратная теорема. Если произведеніе двухъ чиселъ (отличныхъ отъ нуля) равно произведенію двухъ другихъ чиселъ, то изъ этихъ 4-хъ чиселъ можно составить пропорцію, беря сомножителей одного произведенія за крайніе, а сомножителей другого произведенія за средніе члены пропорціи.

Док. Пусть даны 4 числа m, n, p и q, удовлетворяющія равенству:

$$mn=pq, \qquad [1]$$

при чемъ числа эти отличны отъ нуля. Составимъ новое произведеніе двухъ сомножителей такихъ, чтобы одинъ сомножитель былъ взятъ изъ произведенія mn, а другой—изъ произведенія pq. Такихъ произведеній мы можемъ составить 4, а именно:

$$mp,\ mq,\quad np \text{ и } nq \qquad [2].$$

Раздѣлимъ обѣ части даннаго равенства [1] на каждое изъ составленныхъ нами произведеній [2] (что можно сдѣлать, такъ какъ ни одно изъ этихъ произведеній не равно нулю). Такъ какъ равныя числа при дѣленіи на равныя числа должны дать равныя частныя, то

$$\frac{mn}{mp}=\frac{pq}{mp};\ \frac{mn}{mq}=\frac{pq}{mq};\ \frac{mn}{np}=\frac{pq}{np};\ \frac{mn}{nq}=\frac{pq}{nq}.$$

Сократив каждую изъ этихъ дробей, мы получимъ 4 равенства:

$$\frac{n}{p}=\frac{q}{m};\ \frac{n}{q}=\frac{p}{m};\ \frac{m}{p}=\frac{q}{n};\ \frac{m}{q}=\frac{p}{n}.$$

Эти равенства представляютъ собою тѣ пропорціи, которыя можно составить, если сомножителей одного изъ данныхъ произведеній [1] возьмемъ за крайніе члены, а сомножителей другого произведенія — за средніе члены. Теорема такимъ образомъ доказана.

98. Перестановка членовъ пропорціи безъ нарушенія ея. Въ каждой пропорціи можно переставлять члены: 1) средніе, 2) крайніе и 3) крайніе на мѣсто среднихъ и средніе на мѣсто крайнихъ. Отъ такихъ перестановокъ пропорція не нарушится, потому что не нарушится равенство между произведеніемъ крайнихъ и произведеніемъ среднихъ.

Выполнивъ всѣ возможныя перестановки, получимъ вмѣсто одной пропорціи 8 пропорцій. Такъ, если данная пропорція есть $a : b = c : d$, то эти 8 пропорцій окажутся такія:

1) $a : b = c . d$,	5) $b : a = d : c$,
2) $a : c = b : d$,	6) $c : a = d : b$,
3) $d : b = c : a$,	7) $b : d = a : c$,
4) $d \cdot c = b \cdot a$,	8) $c : d = a \cdot b$.

Мы ихъ получили слѣдующимъ образомъ: переставивъ въ 1-й данной пропорціи средніе члены, мы получили 2-ю пропорцію; переставивъ въ каждой изъ этихъ двухъ пропорцій крайніе члены, получили 3-ю и 4-ю пропорціи; наконецъ, переставивъ въ каждой изъ пропорцій крайніе на мѣсто среднихъ и наоборотъ, мы получили еще 4 пропорціи.

99. Непрерывная пропорція. Среднее геометрическое. Пропорція наз. непрерывной, если у нея одинаковы оба среднихъ или оба крайнихъ члена. Такова, напр., пропорція

$$36 : 12 = 12 . 4 \quad \text{или} \quad 12 : 4 = 36 : 12.$$

Повторяющійся членъ непрерывной пропорціи наз. среднимъ геометрическимъ числомъ двухъ остальныхъ членовъ этой пропорціи. Изъ пропорціи $a : b = b : c$ находимъ:

$$b^2 = ac; \quad \text{откуда} \quad b = \sqrt{ac},$$

т.-е. **среднее геометрическое двухъ чиселъ равно корню квадратному изъ произведенія ихъ.** Такъ, среднее геометрическое чиселъ 32 и 8 равно $\sqrt{32 \cdot 8} = \sqrt{256} = 16$.

Вообще, **среднимъ геометрическимъ n данныхъ чиселъ наз. n-ый корень изъ произведенія всѣхъ этихъ чиселъ;** напр., среднее геометрическое трехъ чиселъ: 8, 32 и 2 есть

$$\sqrt[3]{8 \cdot 32 \cdot 2} = \sqrt[3]{512} = 8.$$

100. Среднее ариѳметическое. Среднимъ ариѳметическимъ n данныхъ чиселъ наз. $\frac{1}{n}$ часть суммы всѣхъ этихъ чиселъ. Такъ, среднее геометрическое 4-хъ чиселъ: 10, —2, —8 и 12 равно:

$$\frac{10-2-8+12}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

101. Сложныя пропорціи. Такъ называются пропорціи, которыя можно получить изъ двухъ или нѣсколькихъ данныхъ пропорцій посредствомъ почленнаго ихъ перемноженія или дѣленія.

Пусть, напр.. имѣемъ двѣ пропорціи:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ и } \frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}.$$

Перемноживъ и раздѣливъ почленно эти два равенства, получимъ такія сложныя пропорціи:

$$1)\ \frac{aa'}{bb'} = \frac{cc'}{dd'} \quad \text{и} \quad 2)\ \frac{ab'}{a'b} = \frac{cd'}{c'd}.$$

102. Производныя пропорціи. Такъ называются пропорціи, которыя можно получить изъ одной данной пропорціи (а не изъ нѣсколькихъ, какъ получаются сложныя пропорціи) посредствомъ нѣкоторыхъ дѣйствій надъ ея членами.

Пусть имѣемъ пропорцію. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Прибавимъ къ обѣимъ ча-

стямъ этого равенства или отнимемъ отъ нихъ по 1, отчего, конечно, равенство не нарушится:

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1.$$

Здѣсь двойные знаки + и — надо понимать въ соотвѣтствіи другъ съ другомъ, т.-е. верхнему знаку въ лѣвой части равенства соотвѣтствуетъ верхній знакъ въ правой части, и нижнему знаку въ лѣвой части равенства соотвѣтствуетъ нижній знакъ въ правой.

Приведемъ 1 къ общему знаменателю съ дробью, къ которой эта единица прикладывается:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{b}{b} = \frac{c}{d} \pm \frac{d}{d} \text{ или } \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}. \qquad (1)$$

Получилось равенство, представляющее собою 2 производныя пропорціи; ихъ можно высказать такъ: **сумма или разность членовъ перваго отношенія относится къ послѣдующему члену того же отношенія, какъ сумма или разность членовъ второго отношенія относится къ послѣдующему члену этого отношенія.**

Раздѣлимъ равенство (1) на данное равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; тогда знаменатели b и d сократятся, и мы получимъ еще двѣ производныя пропорціи:

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}, \qquad (2)$$

которыя можно высказать такъ: **сумма или разность членовъ перваго отношенія относится къ предыдущему члену того же отношенія, какъ сумма или разность членовъ второго отношенія относится къ предыдущему члену этого отношенія.**

Равенство (1) представляетъ собою собственно два равенства:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \text{ и } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

Раздѣливъ эти равенства почленно, найдемъ третью произ-

водную пропорцію:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}, \qquad (3)$$

которую можно высказать такъ: **сумма членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности, какъ сумма членовъ второго отношенія относится къ ихъ разности.**

Переставимъ средніе члены въ пропорціяхъ (1), (2) и (3); тогда получимъ еще 3 производныя пропорціи, которыя полезно замѣтить:

$$\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{b}{d},\ \frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{a}{c},\ \frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}.$$

Замѣчаніе. Производными пропорціями иногда можно пользоваться для скорѣйшаго нахожденія неизвѣстнаго числа x, входящаго въ пропорцію. Приведемъ примѣры.

Примѣръ 1. $$\frac{3-x}{x}=\frac{40}{7}.$$

Составимъ производную пропорцію: сумма членовъ перваго отношенія относится къ послѣдующему члену того же отношенія, какъ... Тогда получимъ:

$$\frac{3}{x}=\frac{47}{7};\ \text{откуда}\ x=\frac{21}{47}.$$

Примѣръ 2. $$\frac{a+x}{a-x}=\frac{m}{n}.$$

Составимъ производную пропорцію: сумма членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности, какъ... Тогда получимъ:

$$\frac{2a}{2x}=\frac{m+n}{m-n}\ \text{или}\ \frac{a}{x}=\frac{m+n}{m-n}.$$

Откуда:

$$x=\frac{a(m-n)}{m+n}.$$

103. Свойство равныхъ отношеній. Пусть имѣемъ рядъ нѣсколькихъ равныхъ отношеній:

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b}.$$

Обозначимъ черезъ q каждое изъ этихъ отношеній, т.-е. положимъ, что $\frac{a}{b}=q$, $\frac{a_1}{b_1}=q$, и т. д. Такъ какъ предыдущій членъ равенъ послѣдующему, умноженному на отношеніе, то:

$$a=bq,\quad a_1=b_1q\ldots\quad a_n=b_nq.$$

Сложимъ эти равенства почленно:

$$a+a_1+a_2+\ldots+a_n=bq+b_1q+b_2q+\ldots+b_nq=q(b+b_1+b_2+\ldots+b_n).$$

Раздѣлимъ обѣ части этого равенства на $b+b_1+b_2+\ldots+b_n$:

$$\frac{a+a_1+a_2+\ldots+a_n}{b+b_1+b_2+\ldots+b_n}=q=\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

Мы получили, такимъ образомъ, пропорцію, которую можно высказать такъ:

если нѣсколько отношеній равны между собою, то сумма всѣхъ предыдущихъ членовъ относится къ суммѣ всѣхъ послѣдующихъ, какъ какой-нибудь изъ предыдущихъ относится къ своему послѣдующему.

Замѣчаніе. Такъ какъ пропорція представляетъ собою два равныя отношенія, то это свойство примѣнимо также и къ пропорціи; такъ, если $a:b=c:d$, то $(a+c):(b+d)=a:b=c:d$.

Этимъ свойствомъ пропорціи можно иногда пользоваться для скорѣйшаго нахожденія неизвѣстнаго числа x.

Примѣръ. $\frac{a-x}{x}=\frac{x}{b-x}$.

Составимъ новую пропорцію: сумма предыдущихъ относится къ суммѣ послѣдующихъ, какъ...:

$$\frac{a}{b}=\frac{a-x}{x}.$$

Теперь составимъ производную пропорцію: сумма членовъ перваго отношенія относится къ послѣдующему, какъ...:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{a}{x};\text{ откуда } x=\frac{ab}{a+b}.$$

ОТДѢЛЪ III.

Уравненія первой степени.

ГЛАВА I.

Общія начала рѣшенія уравненій.

104. Равенство, тождество, уравненіе. Два алгебраическія выраженія, соединенныя между собою знакомъ = составляютъ равенство. Выраженія эти называются частями равенства: то, что стоитъ налѣво отъ знака =, составляетъ лѣвую часть, а то, что стоитъ направо отъ этого знака, составляетъ правую часть равенства. Напримѣръ, въ равенствѣ: $a+2a=3a$ выраженіе $a+2a$ есть лѣвая часть, а $3a$—правая часть.

Равенства раздѣляются на тождества и уравненія. Тождества подраздѣляются на численныя и буквенныя.

Численное тождество есть равенство, въ которое входятъ только числа, выраженныя цыфрами; таковы, напр., равенства: $(2+1)^2=(5-2)^2$; $7=7$.

Буквенное тождество есть равенство, у котораго *обѣ части суть тождественныя алгебраическія выраженія* (§ 3), т.-е. такія выраженія, которыя при всевозможныхъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ нихъ, имѣютъ одинаковыя численныя величины; таковы, напр., равенства:

$$(a+b)m=am+bm; \quad (a+1)^2=a^2+2a+1; \quad a=a,$$

и вообще всѣ тѣ равенства, которыя намъ приходилось до сего времени разсматривать.

Всякое буквенное тождество, послѣ подстановки на мѣсто буквъ какихъ-нибудь чиселъ, обращается въ числовое тождество.

Уравненіемъ называется равенство, у котораго обѣ части имѣютъ одинаковую численную величину не при всякихъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ нихъ, а только при нѣкоторыхъ. Напримѣръ, равенство:

$$3x+5=2x+7$$

есть уравненіе, потому что части его $3x+5$ и $2x+7$ равны не при всякомъ значеніи буквы x, а только при $x=2$; точно такъ же равенство:

$$2x+y=10x-y$$

есть уравненіе, потому что части его имѣютъ одинаковую численную величину не при всякихъ значеніяхъ буквъ x и y (напр., при $x=2$, $y=3$ оно невозможно, тогда какъ при $x=2$, $y=8$ оно вѣрно).

Тѣ буквы въ уравненіи, которымъ нельзя приписывать всевозможныхъ численныхъ значеній, называются неизвѣстными уравненіями; эти буквы берутся обыкновенно изъ послѣднихъ буквъ алфавита: x, y, z...

Уравненія могутъ быть съ однимъ неизвѣстнымъ, съ двумя, тремя и болѣе неизвѣстными. Такъ, равенство $3x+5=2x+7$ есть уравненіе съ 1 неизвѣстнымъ, а равенство $2x+y=10x-y$ есть уравненіе съ двумя неизвѣстными.

Числа, которыя, подставленныя въ уравненіе вмѣсто его неизвѣстныхъ, обращаютъ это уравненіе въ тождество, называются корнями уравненія или его рѣшеніями; о такихъ числахъ принято говорить, что они удовлетворяютъ уравненію. Напримѣръ, 2 есть корень уравненія $3x+5=2x+7$, потому что при $x=2$ это уравненіе обращается въ тождество $3.2+5= =2.2+7$. Уравненіе $2x+y=10x-y$ имѣетъ корни $x=2$, $y=8$ и многіе другіе. Иногда уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ имѣетъ два корня и болѣе; напр., уравненіе $x^2+2=3x$ удовлетворяется при $x=2$ и $x=1$.

Рѣшить уравненіе значитъ найти всѣ его корни.

Замѣчаніе. Уравненіе наз. численнымъ, если оно не содержитъ въ себѣ никакихъ другихъ буквъ, кромѣ тѣхъ, которыя означаютъ неизвѣстныя; въ противномъ случаѣ оно называется буквеннымъ. Напр., уравненіе: $3x+5=$ $=2x+7$ есть численное, а уравненіе: $ax+b=0$, въ которыхъ буква x означаетъ неизвѣстное, а a и b данныя числа, есть буквенное.

105. Многія задачи можно рѣшать помощью уравненій. Возьмемъ для примѣра такую задачу:

Старшему брату 15 лѣтъ, а младшему 9. Сколько лѣтъ тому назадъ первый былъ втрое старше второго?

Назовемъ неизвѣстное число лѣтъ буквою x. Предположимъ, что это число найдено, и мы желаемъ повѣрить, удовлетворяетъ ли найденное число требованіямъ задачи. Тогда разсуждаемъ такъ: x лѣтъ тому назадъ старшему брату было не 15 лѣтъ, какъ теперь, а $15-x$; младшему брату тогда было не 9 лѣтъ, какъ теперь, а $9-x$. Условіе задачи требуетъ, чтобы $15-x$ было втрое болѣе $9-x$; значитъ, если $9-x$ умножимъ на 3, то мы должны получить число, равное разности $15-x$; поэтому для x можно взять только такое число, которое удовлетворяетъ уравненію:

$$(9-x)3=15-x.$$

Если сумѣемъ рѣшить это уравненіе, то задача будетъ [illegible]. Мы вскорѣ укажемъ общій способъ рѣшенія подобныхъ уравненій. Теперь же замѣтимъ, что полученное нами уравненіе можно рѣшить такими простыми соображеніями. Такъ какъ произведеніе $(9-x)3$ при всякомъ значеніи x равно $27-3x$, то это уравненіе можно написать такъ:

$$27-3x=15-x.$$

Въ этомъ видѣ лѣвая и правая части уравненія представляютъ собою разности. Сравнивая ихъ между собою, замѣчаемъ, что уменьшаемое въ лѣвой части (т.-е. 27) болѣе уменьшаемаго въ правой части (т.-е. 15) на 12; тогда, чтобы разности были равны, необходимо и достаточно, чтобы и вычитаемое въ лѣвой части (т.-е. $3x$) было болѣе вычитаемаго въ правой части (т.-е. x) тоже на 12; но $3x$ болѣе x на $2x$; слѣд., $2x=12$, откуда $x=6$.

Значитъ, 6 лѣтъ тому назадъ старшій братъ былъ втрое старше младшаго.

Только практика научаетъ, какъ, исходя изъ вопроса и условій задачи, составить одно или нѣсколько уравненій; алгебра имѣетъ цѣлью указать способы рѣшенія уже составленныхъ уравненій. Въ этомъ состоитъ другое весьма важное назначеніе этой науки (см. § 4).

Рѣшеніе уравненій основано на нѣкоторыхъ свойствахъ равенствъ вообще и уравненій въ частности; эти свойства мы теперь и разсмотримъ.

106. Нѣкоторыя свойства равенствъ. Всякое равенство, разсматриваемое въ алгебрѣ, мы можемъ сокращенно выразить такъ: $a=b$, если буквою a обозначимъ численную величину лѣвой части равенства и буквою b численную величину правой его части. Замѣтивъ это, мы можемъ главнѣйшія свойства равенствъ выразить слѣдующими очевидными истинами (мы уже неоднократно пользовались ими раньше):

1°. Если $a=b$, то и $b=a$; т.-е. части равенства можно переставлять.

2°. Если $a=b$ и $c=b$, то $a=c$; т.-е. если два числа равны порознь одному и тому же третьему числу, то они равны и между собою.

3°. Если $a=b$ и $m=n$, то

$$a+m=b+n, \quad a-m=b-n, \quad am=bn;$$

т.-е. если къ равнымъ числамъ придадимъ равныя числа, то и получимъ равныя числа; если отъ равныхъ (чиселъ) отнимемъ равныя (числа), то и получимъ равныя (числа); если равныя умножимъ на равныя, то и получимъ равныя.

4°. Если $a=b$ и $m=n$, то $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$, если только числа m и n не нули (дѣленіе на нуль невозможно, § 39); т.-е. если равныя числа раздѣлимъ на равныя числа, отличныя отъ нуля, то и получимъ равныя числа.

107. Равносильныя уравненія. Уравненія наз. равносильными (а также эквивалентными, однозначащими), **если они имѣютъ одни и тѣ же корни.** Напр., уравненія:

$$x^2+2=3x \text{ и } x^2-3x+2=0$$

равносильны, потому что у нихъ одни и тѣ же корни (именно: $x=2$ и $x=1$).

Относительно равносильности уравненій мы докажемъ 2 теоремы, которыя можно назвать основными для рѣшенія уравненій; при этомъ для простоты мы будемъ предполагать, что рѣчь идетъ объ уравненіи съ однимъ неизвѣстнымъ (тѣ же самыя разсужденія можно было бы повторить и для уравненія съ нѣсколькими неизвѣстными).

108. Теорема 1. Если къ обѣимъ частямъ уравненія прибавимъ, или отъ нихъ отнимемъ, одно и то же число, то получимъ новое уравненіе, равносильное первому.

Обозначимъ для краткости лѣвую часть уравненія одною буквою A и правую часть его другою буквою B; если, напримѣръ, уравненіе будетъ такое:

$$x^2+1=3x-1,$$

то черезъ A мы обозначимъ сумму x^2+1, а черезъ B разность $3x-1$. Пусть m означаетъ какое-нибудь число (положительное, или отрицательное, или нуль).

Докажемъ, что два уравненія:

$$A=B \quad (1) \qquad \text{и} \qquad A+m=B+m \quad (2)$$

имѣютъ одни и тѣ же корни. Для этого убѣдимся въ слѣдующихъ двухъ предложеніяхъ:

1°. Каждый корень уравненія (1) принадлежитъ и уравненію (2).

Пусть, напр., число a будетъ корнемъ уравненія (1). Это значитъ, что если въ этомъ уравненіи на мѣсто x поставимъ число a, то выраженія A и B сдѣлаются равными числами. Но тогда и суммы $A+m$, $B+m$ также сдѣлаются равными числами, такъ какъ если къ равнымъ числамъ придадимъ равныя числа, то и получимъ равныя. Слѣд., каждый корень ур. (1) удовлетворяетъ и ур. (2).

2°. Обратно: каждый корень уравненія (2) принадлежитъ и уравненію (1).

Пусть, напр., число a' будетъ корнемъ ур. (2). Это значитъ, что если въ этомъ уравненіи на мѣсто x подставимъ число a', то суммы $A+m$, $B+m$ сдѣлаются равными числами. Но тогда выраженія A и B должны также сдѣлаться равными числами, такъ какъ если отъ равныхъ чиселъ ($A+m$ и $B+m$) отнимемъ равныя числа (m и m), то и получимъ равныя. Значитъ, каждый корень ур. (2) принадлежитъ и ур. (1).

Изъ этихъ двухъ предложеніи слѣдуетъ, что уравненія (1) и (2) имѣютъ одни и тѣ же корни, т.-е. они равносильны.

Переходя отъ ур. (2) къ ур. (1), мы замѣчаемъ, что отъ обѣихъ частей уравненія можно отнять одно и то же число m.

Замѣчаніе. Прибавляемое къ обѣимъ частямъ уравненія или отнимаемое отъ нихъ число можетъ быть дано въ видѣ какого-нибудь буквеннаго выраженія, при чемъ это выраженіе можетъ содержать въ себѣ и неизвѣстныя уравненія [1]). Напр., къ обѣимъ частямъ ур. $x^2+1=3x-1$ можно прибавить выраженіе $1-3x$, такъ какъ при всякомъ численномъ значеніи x это выраженіе представляетъ собою нѣкоторое опредѣленное число, а отъ прибавленія къ обѣимъ частямъ уравненія одного и того же числа, какъ мы доказали, получается уравненіе равносильное съ даннымъ.

109. Слѣдствія. 1. Любой членъ уравненія можно перенести изъ одной его части въ другую, перемѣнивъ передъ такимъ членомъ знакъ на противоположный.

Напр., если къ обѣимъ частямъ уравненія $8+x^2=7x-2$ прибавимъ по 2, то получимъ:

$$\begin{array}{r} 8+x^2=7x-2 \\ +2 \qquad +2 \\ \hline 8+x^2+2=7x \end{array}$$

[1]) Если только прибавляемое выраженіе при всѣхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ данному уравненію, представляетъ собою **опредѣленное** число $\left(\text{а не принимаетъ, напр., вида } \frac{0}{0} \text{ или } \frac{m}{0}\right)$

Такимъ образомъ, членъ —2 изъ правой части даннаго уравненія перешелъ въ лѣвую съ противоположнымъ знакомъ +.

Вычтя изъ обѣихъ частей послѣдняго уравненія по x^2, получимъ:

$$\begin{array}{r} 8+x^2+2=7x \\ -x^2 \quad -x^2 \\ \hline 8+2=7x-x^2 \end{array}$$

Такимъ образомъ, членъ $+x^2$ перешелъ изъ лѣвой части уравненія въ правую съ противоположнымъ знакомъ —.

Можно всѣ члены уравненія перенести въ одну его часть, напр., въ лѣвую; въ такомъ случаѣ въ другой части останется 0. Такъ, перенеся въ уравненіи:

$$2x^2=4x-6$$

члены $4x$ и -6 въ лѣвую часть, получимъ:

$$2x^2-4x+6=0.$$

2°. Если два одинаковые члена съ одинаковыми знаками стоятъ въ разныхъ частяхъ уравненія, то такіе члены можно отбросить. Пусть, напр., даны уравненія:

$$6x+3=x^2+3, \quad 7x^2-x=3-x.$$

Отнявъ отъ обѣихъ частей перваго уравненія по 3 и приложивъ къ обѣимъ частямъ второго уравненія по x, получимъ:

$$6x=x^2, \quad 7x^2=3.$$

Такимъ образомъ, одинаковые члены +3 и +3 въ первомъ уравненіи и одинаковые члены $-x$ и $-x$ во второмъ уравненіи уничтожились.

110. Теорема 2. **Если обѣ части уравненія умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число, не равное нулю, то получимъ новое уравненіе, равносильное первому.**

Пусть $A=B$ есть данное уравненіе и m какое-нибудь число, кромѣ 0; докажемъ, что два уравненія:

$$A=B \qquad (1) \qquad \text{и} \qquad Am=Bm \qquad (2)$$

имѣютъ одни и тѣ же корни. Для этого убѣдимся въ слѣдующихъ двухъ предложеніяхъ

1°. Каждый корень уравненія (1) принадлежитъ и уравненію (2).

Пусть, напр., число a будетъ корнемъ ур. (1) Это значитъ, что при $x=a$ выраженія A и B дѣлаются равными числами. Но тогда произведенія Am, Bm сдѣлаются равными числами, такъ какъ если равныя числа умножимъ на равныя числа, то и получимъ равныя. Значитъ, каждый корень ур. (1) принадлежитъ и ур. (2).

2°. Обратно. каждый корень уравненія (2) принадлежитъ и уравненію (1).

Пусть, напр , число a' будетъ корнемъ ур. (2), т.-е. пусть при $x=a'$ произведенія Am и Bm дѣлаются равными числами. Но тогда и выраженія A и B должны сдѣлаться равными числами, такъ какъ если равныя числа (Am и Bm) раздѣлимъ на равныя числа, отличныя отъ нуля (а m мы предположили не равнымъ нулю), то и получимъ равныя. Значитъ, каждый корень ур. (2) принадлежитъ и ур. (1)

Изъ этихъ двухъ предложеній слѣдуетъ, что уравненія (1) и (2) равносильны.

Переходя отъ ур (2) къ ур. (1), мы видимъ, что обѣ части уравненія можно дѣлить на одно и то же число, отличное отъ нуля.

111. Слѣдствія. 1°. Если всѣ члены уравненія имѣютъ общаго множителя, не равнаго нулю, то уравненіе можно на него сократить. Напр.:

$$60x-160=340-40x.$$

Раздѣливъ всѣ члены на 20, получимъ уравненіе болѣе простое:

$$3x-8=17-2x$$

2°. Передъ всѣми членами уравненія можно перемѣнить знаки на противоположные, такъ какъ это равносильно умноженію обѣихъ частей уравненія на —1. Напр., умноживъ обѣ части уравненія.

$$-7x+2=-8-x^2$$

на —1, мы получимъ равносильное уравненіе.

$$7x-2=8+x^2.$$

съ противоположными знаками.

Замѣтимъ, что того же самаго мы можемъ достигнуть, если перенесемъ всѣ члены уравненія изъ лѣвой части въ правую, а изъ правой въ лѣвую (§ 109, 1°), и затѣмъ помѣняемъ мѣстами эти части. Такъ, сдѣлавъ такое перенесеніе въ уравненіи: $-7x+2=-8-x^2$, получимъ $8+x^2=7x-2$ и затѣмъ: $7x-2=$ $=8+x^2$

3°. **Уравненіе можно освободить отъ знаменателей.** Напр..

$$\frac{7x-3}{6}-\frac{x-5}{4}=7{,}1666...$$

Обративъ число 7,166. . въ обыкновенную дробь, получимъ $\frac{43}{6}$; теперь приведемъ всѣ члены къ общему знаменателю:

$$\frac{14x-6}{12}-\frac{3x-15}{12}=\frac{86}{12} \text{ или } \frac{14x-6-(3x-15)}{12}=\frac{86}{12}.$$

Отбросивъ общаго знаменателя, мы тѣмъ самымъ умножимъ обѣ части уравненія на одно и то же, не равное нулю, число 12; отъ этого получимъ уравненіе, равносильное данному и не содержащее дробныхъ членовъ

$$14x-6-(3x-15)=86 \quad \text{или} \quad 14x-6-3x+15=86.$$

112. Замѣчанія 1°. Нельзя умножать обѣ части уравненія на нуль, такъ какъ отъ такого умноженія уравненіе перестаетъ существовать, обращаясь въ тождество. 0=0. Возьмемъ, напр., уравненіе $2x=8$, и умножимъ обѣ его части на 0

$$2x=8 \quad (1) \qquad 2x\,.\,0=8\,.\,0 \quad (2)$$

Уравненіе (1) имѣетъ только одинъ корень, именно $x=4$; уравненіе же (2) удовлетворяется при всякомъ численномъ значеніи x (произведеніе всякаго числа на 0 есть 0), напр., при $x=10$ уравненіе это даетъ: $20.0=8.0$, т.-е. $0=0$,

при $x=-3$ оно также даетъ: $(-6)\cdot 0=8\cdot 0$, т.-е. $0=0$, и т. д. Такимъ образомъ, отъ умноженія частей уравненія на нуль получается тождество: $0=0$, а не уравненіе.

2°. О дѣленіи обѣихъ частей уравненія на нуль нечего говорить, такъ какъ дѣленіе на 0 вообще невозможно (§ 39).

113. Можно ли обѣ части уравненія умножить или раздѣлить на алгебраическое выраженіе?

Для рѣшенія этого вопроса разсмотримъ особо слѣдующіе 2 случая:

1°. Пусть алгебраическое выраженіе, на которое мы умножаемъ или дѣлимъ части уравненія, не содержитъ неизвѣстныхъ. Напр., пусть это будетъ выражеіе $2a-b$, въ которомъ буквы a и b означаютъ какія-нибудь данныя числа. При всякихъ численныхъ значеніяхъ этихъ буквъ выраженіе $2a-b$ представляетъ собою нѣкоторое опредѣленное число, при чемъ число это не есть нуль, если только $2a$ не равно b. Но мы доказали (§ 110), что отъ умноженія или дѣленія обѣихъ частей уравненія на одно и то же число, не равное 0, получается уравненіе, равносильное данному, тогда какъ отъ умноженія или дѣленія частей уравненія на 0 равносильнаго уравненія не получается (§ 112, 1°). Значитъ, на выраженіе $2a-b$ можно умножить или раздѣлить обѣ части уравненія, за исключеніемъ лишь случая, когда $2a=b$.

Вообще, *обѣ части уравненія можно умножить или раздѣлить на алгебраическое выраженіе, не содержащее неизвѣстныхъ, при всѣхъ тѣхъ численныхъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ это выраженіе, при которыхъ оно представляетъ собою какое-нибудь опредѣленное число,* **не равное 0.**

2°. Пусть алгебраическое выраженіе, на которое мы умножаемъ или дѣлимъ части уравненія, содержитъ неизвѣстныя. Напр., пусть обѣ части уравненія: $2x=8$ мы умножили на выраженіе $x-3$, содержащее неизвѣстное x. Тогда будемъ имѣть 2 уравненія:

$$2x=8 \quad (1) \quad \text{и} \quad 2x(x-3)=8(x-3) \quad (2)$$

Посмотримъ, будутъ ли они равносильны. Уравненіе (1) имѣетъ только одинъ корень: $x=4$. Этотъ корень принадлежитъ и уравненію (2), такъ какъ онъ обращаетъ его въ тождество:

$$2 \,.\, 4(4-3)=8(4-3), \text{ т.-е. } 8 \,.\, 1=8 \,.\, 1.$$

Но уравненіе (2) имѣетъ еще свой особый корень: $x=3$. Дѣйствительно, при этомъ значеніи x множитель $x-3$ обращается въ нуль, и уравненіе (2) даетъ:

$$6 \,.\, 0=8 \,.\, 0, \text{ т.-е. } 0=0.$$

Значитъ, уравненіе (1) имѣетъ одинъ корень ($x=4$), тогда какъ уравненіе (2) имѣетъ 2 корня ($x=4$ и $x=3$); изъ этихъ корней послѣдній есть посторонній для даннаго уравненія (1). Такимъ образомъ, уравненія (1) и (2) не равносильны.

Вообще, отъ умноженія или дѣленія обѣихъ частей даннаго уравненія на одно и то же алгебраическое выраженіе, содержащее неизвѣстныя, получается уравненіе, не равносильное данному, такъ какъ этимъ умноженіемъ или дѣленіемъ мы можемъ ввести новыя рѣшенія, или, наоборотъ, лишить уравненіе нѣкоторыхъ рѣшеній.

Замѣчаніе. Чтобы освободить уравненіе отъ знаменателей, нужно, какъ мы говорили (§ 111, 3°), привести всѣ члены уравненія къ общему знаменателю и затѣмъ его отбросить. Теперь мы должны добавить, что такое отбрасываніе общаго знаменателя (равносильное умноженію на него обѣихъ частей уравненія) возможно безъ всякихъ оговорокъ лишь въ томъ случаѣ, когда отбрасываемый знаменатель не содержитъ въ себѣ неизвѣстныхъ. Если же, какъ это часто бываетъ, неизвѣстныя входятъ и въ знаменателей дробныхъ членовъ уравненія, то, приведя всѣ члены къ общему знаменателю и отбросивъ его, мы должны еще изслѣдовать, не вводимъ ли мы тѣмъ самымъ постороннихъ рѣшеній.

Ниже приведены примѣры (§ 116, примѣры 2-й и 3-й), на которыхъ уясняется, какъ слѣдуетъ поступать въ такихъ случаяхъ.

ГЛАВА II.

Уравненія, содержащія въ знаменателяхъ неизвѣстныя.

114 Изложимъ здѣсь болѣе подробно, какъ слѣдуетъ поступать съ уравненіями, содержащими въ знаменателяхъ неизвѣстныя. Для простоты будемъ говорить лишь объ уравненіяхъ, содержащихъ одно неизвѣстное x. Перенеся всѣ члены уравненія въ лѣвую часть и приведя ихъ къ общему знаменателю, получимъ уравненіе вида:

$$\frac{A}{B}=0,$$

гдѣ A и B суть алгебраическія выраженія, цѣлыя относительно x. Дробь $\frac{A}{B}$ можетъ равняться нулю только въ слѣдующихъ двухъ случаяхъ: или 1) когда $A=0$, или 2) когда $B=\infty$. Разсмотримъ сначала первое предположеніе. Положимъ, что, рѣшивъ уравненіе $A=0$, мы нашли корни: $x_1=a$, $x_2=b$ и т. д. Подставимъ эти корни въ B. Если ни одинъ изъ нихъ не обратитъ B въ нуль, то всѣ эти корни годны для даннаго уравненія. Если же какой-нибудь изъ нихъ, напр., $x_1=a$, обратитъ B въ нуль, то этотъ корень должно подвергнуть испытанію, такъ какъ неопредѣленное выраженіе $\frac{0}{0}$, получаемое въ этомъ случаѣ для дроби $\frac{A}{B}$, можетъ оказаться неравнымъ 0. Чтобы раскрыть истинный смыслъ неопредѣленнаго выраженія (§ 146), замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ многочлены A и B дѣлятся на $x-a$ (§ 76, слѣдствіе 2-е), и потому мы можемъ сократить дробь $\frac{A}{B}$ на $x-a$; тогда получимъ новую дробь $\frac{A_1}{B_1}$; если при $x=a$ числитель A_1 равняется 0, а знаменатель B_1 не равенъ 0, то корень $x=a$ годится; если при $x=a$ и A_1 и B_1 равны 0, то этотъ корень надо испытать (по предыдущему); если же при $x=a$ числитель A_1 не равенъ 0, то этотъ корень надо отбросить.

Разсмотримъ теперь второе предположеніе, т.-е допустимъ, что $B=\infty$. Такъ какъ знаменатель B есть цѣлый многочленъ (или одночленъ), то онъ можетъ обратиться въ ∞ только при $x=\infty$. При этомъ значеніи x дробь $\frac{A}{B}$ принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть истинный смыслъ этого неопредѣленнаго выраженія, предположимъ сначала, что степень B выше степени A. Пусть, напр., $A=x^2-3x+2$ и $B=x^3+4x^3-3x+1$, т.-е. дробь имѣетъ видъ:

$$\frac{x^3-3x+2}{x^3+4x^2-3x+1}=0 \text{ и вообще } \frac{ax^m+bx^{m-1}+\dots}{px^n+qx^{n-1}+\dots}=0 \ (n>m).$$

Въ этомъ случаѣ истинное значеніе выраженія $\frac{\infty}{\infty}$ есть нуль. Дѣйствительно, раздѣливъ числителя и знаменателя на степень x, высшую въ числителѣ, получимъ:

$$\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{x+4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=0 \text{ и вообще } \frac{a+\frac{b}{x}+\ldots}{px^{n-m}+qx^{n-m-1}+\ldots}=0.$$

Положивъ теперь $x=\infty$, получимъ тождество: $0=0$. Значитъ, когда степень знаменателя выше степени числителя, уравненіе $\frac{A}{B}=0$ сверхъ корней уравненія $A=0$ имѣетъ еще особый корень $x=\infty$ [1]).

Пусть теперь степень знаменателя будетъ ниже или равна степени числителя. Напр.:

$$\frac{A}{B}=\frac{x^2-3x+2}{2x^2-5}=0 \text{ и вообще } \frac{ax^m+bx^{m-1}+\ldots}{px^n+qx^{n-1}+\ldots}=0 \; (n\leqslant m).$$

Раздѣливъ числителя и знаменателя на степень x, высшую въ знаменателѣ, получимъ:

$$\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2-\frac{5}{x^2}}=0 \text{ и вообще } \frac{ax^{m-n}+bx^{m-n-1}+\ldots}{p+\frac{q}{x}+\ldots}=0.$$

Положимъ $x=\infty$, получимъ невозможное равенство $\frac{1}{2}=0$ $\left(\frac{a}{p}\right.$, если $m=n$, и ∞, если $m>n$). Слѣдов., когда степень знаменателя не выше степени числителя, уравненіе $\frac{A}{B}$ не имѣетъ иныхъ корней, кромѣ тѣхъ, которые принадлежатъ уравненію $A=0$.

Примѣръ 1-й. $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x^2-4}$.

---

[1]) Включеніе значенія $x=\infty$ въ число корней уравненія во многихъ случаяхъ бываетъ полезно. Во-первыхъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ такое рѣшеніе уравненія даетъ вполнѣ опредѣленный отвѣтъ на вопросъ задачи; напр., когда отыскиваютъ разстояніе точки пересѣченія двухъ прямыхъ отъ нѣкоторой постоянной точки, рѣшеніе $x=\infty$ означаетъ, что линіи должны быть параллельны другъ другу (см., напр., задачу § 144). Во-вторыхъ безконечное рѣшеніе означаетъ, что по мѣрѣ безпредѣльнаго увеличенія x обѣ части уравненія неограниченно стремятся къ равенству другъ съ другомъ, что иногда имѣетъ весьма цѣнное значеніе.

Перенеся всѣ члены въ лѣвую часть и приведя ихъ къ общему знаменателю, получимъ:

$$\frac{2x-1}{x^2-4}=0.$$

Дробь, стоящая въ лѣвой части уравненія, несократима. Отбросивъ знаменателя, получимъ:

$$2x-1=0, \text{ откуда } x=\frac{1}{2}.$$

Такъ какъ степень знаменателя выше степени числителя, то данное уравненіе имѣетъ еще особый корень $x=\infty$. Дѣйствительно,

$$\frac{1}{\infty-2}+\frac{1}{\infty-2}=\frac{1}{\infty^2-4}, \text{ т.-е. } 0+0=0.$$

Замѣтимъ, что если бы въ этомъ примѣрѣ мы не обратили вниманія на отброшеннаго знаменателя, то не замѣтили бы одного корня именно $x=\infty$.

Примѣръ 2-й. $\frac{x^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{2x+2}{(x-2)^2}$.

Перенеся всѣ члены въ лѣвую часть и приведя ихъ къ общему знаменателю, получимъ:

$$\frac{x^2-3x+2}{(x-2)^2}=0.$$

Числитель дроби представляетъ произведеніе $(x-2)(x-1)$; поэтому дробь можно сократить на $x-2$; послѣ сокращенія получимъ:

$$\frac{x-1}{x-2}=0,\ x-1=0, \text{ откуда } x=1.$$

Особаго корня въ этомъ примѣрѣ нѣтъ, такъ какъ степень знаменателя не выше степени числителя.

Замѣтимъ, что если бы въ этомъ примѣрѣ мы отбросили общаго знаменателя, не перенося всѣхъ членовъ въ одну часть уравненія, то получили бы лишній корень $x=2$.

ГЛАВА III.

Уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

115. Подраздѣленіе уравненій. По числу неизвѣстныхъ уравненія раздѣляются на уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ, съ двумя неизвѣстными, съ тремя и болѣе неизвѣстными. Кромѣ того, уравненія раздѣляются по степенямъ неизвѣстныхъ: уравненія первой степени, уравненія второй степени, и т. д.

Чтобы судить о степени даннаго уравненія, его надо предварительно, посредствомъ нѣкоторыхъ преобразованій, привести къ такому виду, при которомъ правая часть уравненія не содержитъ неизвѣстныхъ, а лѣвая представляетъ собою многочленъ (или одночленъ), ц ѣ л ы й о т н о с и т е л ь н о н е и з в ѣ с т н ы х ъ. Преобразованія эти въ большинствѣ уже намъ извѣстны; это—раскрытіе скобокъ, если онѣ есть, освобожденіе уравненія отъ знаменателей, перенесеніе всѣхъ членовъ, содержащихъ неизвѣстныя, въ лѣвую часть уравненія и приведеніе подобныхъ членовъ. Впослѣдствіи мы укажемъ еще одно преобразованіе (освобожденіе уравненія отъ радикаловъ), которое потребно для той же цѣли. Когда всѣ эти преобразованія выполнены, то

степенью уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ наз. показатель при неизвѣстномъ въ томъ членѣ уравненія, въ которомъ этотъ показатель наибольшій;

степенью уравненія съ нѣсколькими неизвѣстными наз. сумма показателей при неизвѣстныхъ въ томъ членѣ уравненія, въ которомъ эта сумма наибольшая.

Напр., ур. $5x^2—3x=4$ есть уравненіе второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ, ур. $5x^2y—xy+8x=0$ есть уравненіе третьей степени съ 2 неизвѣстными.

116. Рѣшеніе уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Пусть требуется рѣшить уравненіе:

$$\frac{2(x—5)}{3}=\frac{3(2—x)}{2}—x.$$

Для этого выполнимъ слѣдующія преобразованія:

1°. Раскроемъ скобки:

$$\frac{2x—10}{3}=\frac{6—3x}{2}—x.$$

2°. Освободимъ уравненіе отъ знаменателей:

$$4x—20=18—9x—6x.$$

3°. Перенесемъ всѣ члены, содержащіе неизвѣстное, въ лѣвую часть уравненія, а остальные члены въ правую часть:

$$4x+9x+6x=18+20.$$

4°. Сдѣлаемъ приведеніе подобныхъ членовъ:

$$19x=38.$$

Если данное уравненіе, какъ взятое нами, первой степени, то послѣ указанныхъ преобразованій оно приведется къ такому виду, при которомъ каждая его часть состоитъ только изъ одного члена, а именно: лѣвая часть состоитъ изъ члена, содержащаго x въ первой степени, а правая изъ члена, не содержащаго x. Такой видъ называется нормальнымъ видомъ уравненія 1-й степени съ 1 неизвѣстнымъ.

Чтобы рѣшить уравненіе, приведенное къ нормальному виду, надо сдѣлать еще одно послѣднее преобразованіе:

5°. Раздѣлимъ обѣ части уравненія на коэффиціентъ при неизвѣстномъ:

$$\frac{19x}{19}=\frac{38}{19}; \text{ откуда: } x=2.$$

Такъ какъ каждое изъ указанныхъ преобразованій приводитъ къ уравненію, равносильному съ уравненіемъ не преобразованнымъ, то, значитъ, и послѣднее полученное нами уравненіе ($x=2$) равносильно съ даннымъ; но ур. $x=2$, очевидно, имѣетъ корень 2 и притомъ только этотъ одинъ; значитъ, и данное уравненіе должно имѣть тотъ же корень, и притомъ только одинъ.

Найдя корень уравненія, мы должны повѣрить правильность рѣшенія; для этого подставимъ въ данное (не преобразованное) уравненіе вмѣсто x найденное число; если послѣ подстановки получимъ тождество, то уравненіе рѣшено правильно. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ, подставивъ на мѣсто x найденное число 2, получимъ:

$$\frac{2(2-5)}{3}=\frac{3(2-2)}{2}-2, \quad \text{т.-е. } -2=-2.$$

Значитъ, уравненіе рѣшено правильно.

Само собою разумѣется, что не во всѣхъ случаяхъ потребны всѣ пять указанныхъ преобразованій.

Для уясненія нѣкоторыхъ особенностей при рѣшеніи уравненій разсмотримъ еще слѣдующіе примѣры.

Примѣръ 1. Знаменатели не содержатъ неизвѣстнаго.

$$\frac{\frac{8x}{3}-4}{9}-\frac{5x-3}{6}+x=\frac{7-\frac{x-3}{2}}{3}-\frac{8}{9}.$$

Для рѣшенія этого уравненія сначала приведемъ члены каждой дроби къ цѣлому виду (см. § 83):

$$\frac{8x-12}{27}-\frac{5x-3}{6}+x=\frac{14-x+3}{6}-\frac{8}{9}.$$

Найдя общаго знаменателя 54, надписываемъ надъ каждымъ членомъ уравненія дополнительнаго множителя:

$$\overset{2}{\frac{8x-12}{27}}-\overset{9}{\frac{5x-3}{6}}+\overset{54}{x}=\overset{9}{\frac{17-x}{6}}-\overset{6}{\frac{8}{9}}.$$

Затѣмъ приводимъ къ общему знаменателю всѣ члены уравненія, отбрасываемъ его и поступаемъ далѣе, какъ обыкновенно:

$$16x-24-45x+27+54x=153-9x-48;$$

$$16x-45x+54x+9x=153-48+24-27;\qquad 34x=102;\qquad x=3.$$

Повѣрка: $\frac{8-4}{9}-2+3=\frac{7}{3}-\frac{8}{9}$, т.-е. $\frac{13}{9}=\frac{13}{9}$.

Примѣръ 2. Знаменатели содержатъ неизвѣстное, при чемъ отбрасываніе общаго знаменателя не вводитъ посторонняго корня.

$$\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{1-4x^2}=\frac{2x-1}{2x+1}.$$

Чтобы удобнѣе привести всѣ члены этого уравненія къ общему знаменателю, перемѣнимъ въ знаменателѣ второй дроби

знаки на противоположные, а чтобы отъ этого не измѣнилась величина дроби, перемѣнимъ знакъ передъ дробью (см. § 84, 2°):

$$\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{8}{4x^2-1}=\frac{2x-1}{2x+1}.$$

Такъ какъ $4x^2-1=(2x+1)(2x-1)$, то это и есть общій знаменатель; дополнительные множители будутъ: для первой дроби $2x+1$, для третьей $2x-1$:

$$(2x+1)^2-8=(2x-1)^2; \quad 4x^2+4x+1-8=4x^2-4x+1;$$
$$8x=8; \quad x=1.$$

Въ этомъ примѣрѣ для освобожденія уравненія отъ знаменателей намъ пришлось откинуть общаго знаменателя $4x^2-1$, т.-е. намъ пришлось обѣ части уравненія умножить на выраженіе $4x^2-1$, содержащее неизвѣстное; тогда слѣдуетъ убѣдиться, не будетъ ли найденный корень $x=1$ **постороннимъ**, т.-е. не обращаетъ ли онъ въ 0 выраженіе $4x^2-1$, на которое намъ пришлось умножить обѣ части даннаго уравненія. Подставивъ 1 вмѣсто x въ выраженіе $4x^2-1$, мы получаемъ 3, а не 0. Значитъ, найденный корень не есть посторонній. И, дѣйствительно, данное уравненіе при $x=1$ обращается въ тождество:

$$\frac{3}{1}+\frac{8}{-3}=\frac{1}{3}; \quad 3-2\frac{2}{3}=\frac{1}{3}; \quad \frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$ [1]).

Примѣръ 3. Знаменатели содержатъ неизвѣстное, при чемъ отбрасываніе общаго знаменателя вводитъ посторонній корень.

$$3+\frac{1}{x-2}=\frac{4x-7}{x-2}.$$

Освободивъ уравненіе отъ знаменателей, получимъ:

$$3x-6+1=4x-7, \quad 3x-4x=-7+6-1; \quad -x=-2.$$

Умноживъ обѣ части уравненія на -1, найдемъ: $x=2$.

Такъ какъ для освобожденія уравненія отъ знаменателей намъ пришлось умножить обѣ части его на выраженіе $x-2$,

---

[1]) Это уравненіе имѣетъ еще корень $=\infty$ (см. § 114)

содержащее неизвѣстное, то слѣдуетъ рѣшить, не будетъ ли найденный корень постороннимъ. Подставивъ 2 вмѣсто x въ выраженіе $x-2$, получаемъ 0. Изъ этого заключаемъ, что корень $x=2$ можетъ быть постороннимъ. Чтобы рѣшить это окончательно, надо сдѣлать подстановку:

$$3+\frac{1}{0}=\frac{1}{0}.$$

Въ такомъ видѣ равенство ничего не выражаетъ, такъ какъ дѣленіе на 0 невозможно. Значитъ рѣшеніе $x=2$ является постороннимъ для даннаго уравненія, которое совсѣмъ не имѣетъ корней.

Примѣръ 4. Уравненіе, приводящееся къ тождеству.

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-25=\frac{5}{6}(x-30).$$

По освобожденіи отъ знаменателей, получимъ.

$$3x+2x-150=5(x-30)$$

или $$5x-150=5x-150,$$

или $$5x-5x=150-150, \text{ т.-е. } 0=0.$$

Это равенство есть тождество, т.-е. оно вѣрно при всякомъ значеніи x. Значитъ, данное уравненіе имѣетъ произвольные корни.

Примѣръ 5. Уравненіе, приводящееся къ нелѣпому равенству.

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{12}\right)+7.$$

По раскрытіи скобокъ и освобожденіи отъ знаменателей, находимъ:

$$6x+4x=15x-5x+84$$

или $$10x=10x+84,$$

или $$10x-10x=84, \text{ т.-е. } 0=84.$$

Такъ какъ это равенство невозможно, то уравненіе не имѣетъ ни одного корня.

ГЛАВА IV.

Система двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными.

117. Нормальный видъ уравненія первой степени съ 2 неизвѣстными. Возьмемъ для примѣра слѣдующее уравненіе·

$$2(2x+3y-5)=\frac{5}{8}(x+3)+\frac{3}{4}(y-4).$$

Съ цѣлью упростить это уравненіе, сдѣлаемъ на немъ тотъ же рядъ преобразованій, какой былъ указанъ раньше для уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ, а именно:

1°. Раскроемъ въ уравненіи скобки:

$$4x+6y-10=\frac{5}{8}x+\frac{15}{8}+\frac{3}{4}y-3.$$

2°. Освободимъ уравненіе отъ знаменателей.

$$32x+48y-80=5x+15+6y-24.$$

3°. Перенесемъ всѣ члены, содержащіе неизвѣстныя, въ лѣвую часть уравненія, а всѣ остальные члены въ правую его часть:

$$32x+48y-5x-6y=15-24+80.$$

4°. Сдѣлаемъ приведеніе подобныхъ членовъ:

$$27x+42y=71.$$

Если данное уравненіе съ 2 неизвѣстными есть уравненіе 1-ой степени, то послѣ указанныхъ преобразованій оно приведется къ такому виду, при которомъ въ лѣвой части уравненія находятся только 2 члена. одинъ съ неизвѣстнымъ x въ первой степени, другой съ неизвѣстнымъ y въ первой степени, правая же часть уравненія состоитъ изъ одного члена, не содержащаго

неизвѣстныхъ. Такой видъ наз. **нормальнымъ видомъ** уравненія 1-ой степени съ 2 неизвѣстными. Коэффиціенты при x и y нормальнаго вида уравненія могутъ быть или оба положительныя числа, какъ во взятомъ нами примѣрѣ, или оба отрицательныя числа (этого случая, впрочемъ, можно избѣжать, умноживъ всѣ члены уравненія на —1), или одинъ — число положительное, а другой— число отрицательное; членъ, не содержащій неизвѣстныхъ, можетъ быть и положительнымъ числомъ (какъ въ нашемъ примѣрѣ), и отрицательнымъ, и даже нулемъ.

118. Неопредѣленность одного уравненія съ 2 неизвѣстными. Одно уравненіе съ 2 неизвѣстными допускаетъ **безчисленное множество корней.** Для примѣра возьмемъ такое уравненіе:

$$3x-5y=2.$$

Если вмѣсто одного неизвѣстнаго, напр., y, будемъ подставлять произвольныя числа, напр., такія: 0, 1, 2, 3..., то послѣ всякой подстановки будемъ получать уравненіе, съ однимъ неизвѣстнымъ x, рѣшивъ это уравненіе, найдемъ для x число, соотвѣтствующее взятой величинѣ y. Если, напр., $y=0$, то получимъ: $3x=2$, откуда $x=\frac{2}{3}$; если $y=1$, то $3x-5=2$, откуда $x=\frac{7}{3}$, и т. д.

Уравненіе, имѣющее безчисленное множество корней, называется **неопредѣленнымъ.** Одно уравненіе съ 2 неизвѣстными (будетъ ли оно первой степени или какой-нибудь иной) принадлежитъ къ неопредѣленнымъ.

119. Система уравненій. Нѣсколько уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными: $x, y, z...$, составляютъ **систему уравненій,** если извѣстно, что каждая изъ буквъ $x, y, z...$ должна означать **одно и то же число** для всѣхъ уравненій. Если, напр., два уравненія:

$$2x-5=3y-2 \quad \text{и} \quad 8x-y=2y+21$$

разсматриваются при томъ условіи, что каждая изъ буквъ x и y

должна имѣть одинаковыя численныя значенія для обоихъ уравненій, то такія уравненія образуютъ систему.

Для показанія того, что данныя уравненія образуютъ систему, ихъ обыкновенно пишутъ одно подъ другимъ и слѣва отъ нихъ ставятъ фигурную скобку:

$$\begin{cases} 2x-5=3y-2 \\ 8x-y=2y+21. \end{cases}$$

Р ѣ ш и т ь с и с т е м у у р а в н е н і й значитъ найти всѣ числа, которыя у д о в л е т в о р я ю т ъ этой системѣ (корни уравненій), т.-е. найти всѣ числа, которыя, подставленныя въ данныя уравненія вмѣсто неизвѣстныхъ, обращаютъ ихъ въ тождества.

Для рѣшенія системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными существуетъ нѣсколько способовъ. Всѣ они имѣютъ цѣлью привести два уравненія съ двумя неизвѣстными къ одному уравненію съ однимъ неизвѣстнымъ или, какъ говорятъ, имѣютъ цѣлью и с к л ю ч и т ь о д н о н е и з в ѣ с т н о е.

120. Способъ подстановки. Возьмемъ для примѣра такую систему:

$$\begin{cases} 8x-5y=-16 \\ 10x+3y=\ \ 17 \end{cases}$$

(каждое уравненіе предварительно приведено къ нормальному виду). Желая исключить x, поступимъ такъ: изъ перваго уравненія опредѣлимъ x въ зависимости отъ другого неизвѣстнаго y (для чего, конечно, надо членъ $-5y$ перенести направо и затѣмъ раздѣлить обѣ части уравненія на 8):

$$x=\frac{5y-16}{8}.$$

Такъ какъ второе уравненіе должно удовлетворяться тѣми же значеніями неизвѣстныхъ, какъ и первое, то мы можемъ подставить въ него вмѣсто x найденное для него выраженіе, отчего получимъ уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ y:

$$10\cdot\frac{5y-16}{8}+3y=17.$$

Рѣшимъ это уравненіе:

$$\frac{5(5y-16)}{4}+3y=17; \quad 25y-80+12y=68; \quad 37y=148; \quad y=4;$$

тогда:
$$x=\frac{5y-16}{8}=\frac{5\,.\,4-16}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Мы могли бы, предположивъ x найденнымъ, опредѣлить изъ одного уравненія y въ зависимости отъ x и полученное для y выраженіе подставить въ другое уравненіе.

Правило. Чтобы рѣшить систему двухъ уравненій съ 2 неизвѣстными способомъ подстановки, опредѣляютъ изъ какого-либо уравненія одно неизвѣстное въ зависимости отъ другого и полученное выраженіе вставляютъ въ другое уравненіе; отъ этого получается одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ; рѣшивъ его, опредѣляютъ это неизвѣстное; подставивъ найденное число въ выраженіе, выведенное раньше для перваго неизвѣстнаго, опредѣляютъ и это другое неизвѣстное.

Замѣчаніе. Этотъ способъ особенно удобенъ тогда, когда коэффиціентъ при исключаемомъ неизвѣстномъ равенъ 1.

121. Способъ сравненія. Пусть имѣемъ ту же систему:

$$\begin{cases} 8x-5y=-16 \\ 10x+3y=\ \ 17. \end{cases}$$

Желая исключить x, опредѣлимъ это неизвѣстное изъ каждаго уравненія въ зависимости отъ другого неизвѣстнаго y:

$$x=\frac{5y-16}{8}, \quad (1) \qquad x=\frac{17-3y}{10} \quad (2)$$

Такъ какъ въ обоихъ уравненіяхъ неизвѣстныя должны означать одни тѣ же числа, то мы можемъ полученныя для x два выраженія соединить знакомъ равенства (сравнить ихъ между собою):

$$\frac{5y-16}{8}=\frac{17-3y}{10}.$$

Откуда: $25y-80=68-12y;\ 37y=148;\ y=4.$

Подставивъ это число въ одну изъ формулъ (1) или (2), найдемъ x:

$$x=\frac{5\,.\,4-16}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \text{ или } x=\frac{17-3\,.\,4}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

Неизвѣстное x мы могли бы также найти, исключивъ способомъ сравненія y.

Правило. Чтобы изъ двухъ уравненій исключить одно неизвѣстное по способу сравненія, надо изъ каждаго уравненія опредѣлить одно и то же неизвѣстное въ зависимости отъ другого и полученныя два выраженія соединить знакомъ равенства.

122. Способъ сложенія или вычитанія. Предположимъ сначала, что въ данной системѣ уравненій (приведенныхъ предварительно къ нормальному виду) коэффиціенты при какомъ-нибудь одномъ и томъ же неизвѣстномъ, напримѣръ, при y, будутъ одинаковы. При этомъ могутъ представиться два случая: или знаки передъ такими коэффиціентами разные, или они одинаковые. Разсмотримъ одновременно оба эти случая. Пусть, напр., данныя системы будутъ такія:

$$\begin{array}{l|l} \text{1-я система} & \text{2-я система} \\ \left\{\begin{array}{l} 7x-2y=27 \\ 5x+2y=33 \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} 5x+8y=81 \\ 3x+8y=25. \end{array}\right. \end{array}$$

Сложимъ почленно уравненія первой системы и вычтемъ почленно уравненія второй системы:

$$\begin{array}{r|r} 7x-2y=27 & 5x+8y=\ \ 31 \\ 5x+2y=33 & -3x\pm 8y=-25 \\ \hline 12x\qquad =60 & 2x\qquad =\ 6. \end{array}$$

Такимъ образомъ, одно неизвѣстное исключилось. Изъ полученныхъ уравненій находимъ:

$$x=\frac{60}{12}=5 \quad \Big| \quad x=\frac{6}{2}=3.$$

Вставивъ въ одно изъ данныхъ уравненій вмѣсто x найденное для него число, найдемъ y:

$$\begin{array}{r|l} 7\,.\,5-2y=27 & 5\,.\,3+8y=31 \\ y=4 & \qquad y=2. \end{array}$$

Возьмемъ теперь систему двухъ уравненій, въ которыхъ коэффиціенты при одномъ и томъ же неизвѣстномъ неодинаковы, напр., такую:

$$\left\{\begin{array}{r} 7x+6y=29 \\ -5x+8y=10. \end{array}\right.$$

Мы можемъ исключить изъ этой системы любое изъ двухъ неизвѣстныхъ. Напримѣръ, чтобы исключить y, предварительно преобразуемъ уравненія такъ, чтобы передъ y коэффиціенты оказались одинаковыми. Чтобы достигнуть этого, достаточно обѣ части перваго уравненія умножить на коэффиціентъ при y во второмъ уравненіи, т.-е. на 8, а обѣ части второго уравненія умножить на коэффиціентъ при y въ первомъ уравненіи, т.-е. на 6:

$$7x+6y=29 \text{ (на 8)} \qquad 56x+48y=232$$
$$-5x+8y=10 \text{ (на 6)} \quad -30x+48y=60.$$

Такимъ образомъ, этотъ случай всегда можно привести къ первому. Послѣ этого остается только сложить или вычесть преобразованныя уравненія. Въ нашемъ примѣрѣ знаки передъ y въ обоихъ уравненіяхъ одинаковы, а потому для исключенія y надо уравненія почленно вычесть:

$$56x+48y=232$$
$$\mp 30x \pm 48y=-60$$
$$86x \quad =172; \text{ откуда } x=2.$$

Другое неизвѣстное мы можемъ найти или посредствомъ подстановки въ одно изъ данныхъ уравненій вмѣсто x найденнаго для него числа, или исключивъ изъ данной системы неизвѣстное x такимъ же путемъ, какимъ мы сейчасъ исключили y.

Замѣчаніе. Чтобы коэффиціенты передъ y оказались не только равными, но и наименьшими, слѣдуетъ найти наименьшее кратное коэффиціентовъ y, т.-е. въ нашемъ примѣрѣ 6-и и 8-и (это будетъ 24), и умножить обѣ части каждаго уравненія на соотвѣтствующаго дополнительнаго множителя:

$$7x+6y=29 \text{ (на 4)} \qquad 28x+24y=116$$
$$-5x+8y=10 \text{ (на 3)} \quad -15x+24y=30.$$

Вычтя почленно уравненія, получимъ: $43x=86$, $x=2$.

Правило. Чтобы изъ двухъ уравненій (приведенныхъ къ нормальному виду) **исключить одно неизвѣстное по способу сложенія или вычитанія, надо сначала уравнять въ обоихъ**

уравненіяхъ коэффиціенты при исключаемомъ неизвѣстномъ, а потомъ сложить оба уравненія, если знаки передъ этимъ неизвѣстнымъ разные, или изъ одного уравненія вычесть почленно другое, если знаки передъ исключаемымъ неизвѣстнымъ одинаковые.

123. Для строгаго обоснованія способа сложенія или вычитанія докажемъ слѣдующую теорему.

Теорема. Если въ системѣ уравненій замѣнимъ какое-нибудь одно изъ нихъ новымъ уравненіемъ, которое получится отъ почленнаго сложенія уравненій системы, то получимъ другую систему, равносильную данной.

Док. Пусть намъ дана система уравненій·

$$A = B, A_1 = B_1 \ A_2 = B_2; \ . \ . \qquad (1)$$

Сложимъ почленно эти уравненія:

$$A + A_1 + A_2 + \ . \ . \ . = B + B_1 + B_2 + \ . \ . \ .$$

и этимъ новымъ уравненіемъ замѣнимъ какое-нибудь одно изъ данныхъ уравненій, напр., 1-е; тогда получимъ другую систему:

$$A + A_1 + A_2 + \ . \ . \ . = B + B_1 + B_2 \ . \ . \ . ; \ A_1 = B_1; \ A_2 = B_2; \ . \ . \ . \ (2)$$

Требуется доказать, что системы (1) и (2) равносильны, т.-е. что онѣ имѣютъ одни и тѣ же корни. Для этого достаточно убѣдиться, что всѣ корни системы (1) принадлежатъ и системѣ (2), и обратно: всѣ корни системы (2) принадлежатъ и системѣ (1)

Пусть система (1) удовлетворяется при $x = a$, $y = b$.... Это значитъ, что при этихъ значеніяхъ неизвѣстныхъ выраженія A, A_1, A_2 . . . дѣлаются соотвѣтственно равными выраженіямъ B, B_1, B_2 . . . Очевидно тогда, что при этихъ значеніяхъ неизвѣстныхъ сумма $A + A_1 + A_2 + \dots$ дѣлается равной суммѣ $B + B_1 + B_2 + \dots$; значитъ, эти значенія неизвѣстныхъ удовлетворяютъ системѣ (2). Такимъ образомъ, всѣ корни системы (1) принадлежатъ и системѣ (2).

Обратно, положимъ, что система (2) допускаетъ корни $x = a'$, $y = b'$ . . . Это значитъ, что при этихъ значеніяхъ неизвѣстныхъ суммы $A + A_1 + A_2 + \dots$ и $B + B_1 + B_2 + \dots$ дѣлаются равными между собой, а также и выраженія A_1 и B_1, A_2 и B_2 и т. д. Но тогда очевидно, что при тѣхъ же значеніяхъ неизвѣстныхъ и выраженія A и B сдѣлаются равными, т.-е. удовлетворится и система (1). Значитъ, всѣ корни системы (2) принадлежатъ и системѣ (1).

Отсюда слѣдуетъ, что системы (1) и (2) равносильны.

Замѣчаніе 1-е. Прежде чѣмъ складывать почленно уравненія данной системы, можно предварительно умножить члены каждаго изъ нихъ, или только нѣкоторыхъ, на какія-нибудь числа, не равныя нулю, такъ какъ послѣ такого умноженія получаются уравненія равносильныя.

Въ частности мы можемъ, напр., члены какого-нибудь одного уравненія или нѣсколькихъ уравненій умножить предварительно на -1; другими словами, мы можемъ нѣкоторыя уравненія почленно **вычесть**. Если, напр., въ указанной выше системѣ (1) мы умножимъ на -1 члены второго уравненія, а потомъ всѣ уравненія сложимъ, то получимъ уравненіе:

$$A-A_1+A_2+\ldots=B-B_1+B_2+\ldots,$$

которымъ мы можемъ замѣнить любое изъ уравненій данной системы.

Замѣчаніе 2-е. Способы подстановки и сравненія могутъ быть разсматриваемы какъ слѣдствія изъ доказанной теоремы Положимъ, напр., мы имѣемъ систему:

$$2x-3y=1 \text{ и } 5x+7y=17. \qquad (1)$$

Ее можно замѣнить такою:

$$x=\frac{1+3y}{2}, \quad x=\frac{17-7y}{5}, \qquad (2)$$

потому что уравненія послѣдней системы равносильны соотвѣтственно уравненіямъ первой системы. Вычтя почленно уравненія системы (2), мы можемъ, по доказанному, замѣнить ее новою системой:

$$x=\frac{1+3y}{2},\ 0=\frac{1+3y}{2}-\frac{17-7y}{5}. \qquad (3)$$

Преобразуя второе уравненіе системы (3), мы можемъ представить ее двояко:

$$x=\frac{1+3y}{2},\ 5\cdot\frac{1+3y}{2}+7y=17 \text{ (способъ подстановки)}$$

или

$$x=\frac{1+3y}{2},\ \frac{1+3y}{2}=\frac{17-7y}{5} \text{ (способъ сравненія).}$$

ГЛАВА V.

Система трехъ уравненій первой степени съ тремя неизвѣстными.

124. Нормальный видъ уравненія первой степени съ 3 неизвѣстными. Если въ уравненіи 1-й степени съ 3 неизвѣстными x, y и z мы сдѣлаемъ тѣ же преобразованія, какія были нами прежде указаны для уравненій съ 1 и 2 неизвѣстными (§§116, 117), то мы приведемъ уравненіе къ такому **нормальному виду**, при которомъ въ лѣвой части уравненія находятся только три члена: одинъ съ x, другой съ y и третій съ z (коэффиціентами при этихъ неизвѣстныхъ

могутъ быть числа и положительныя, и отрицательныя), а правая часть уравненія состоитъ изъ одного члена, не содержащаго неизвѣстныхъ. Таково, напр., уравненіе $5x-3y\ 4z=-12$.

Одно уравненіе съ 3 неизвѣстными и система 2 уравненій съ 3 неизвѣстными допускаютъ вообще безчисленное множество корней, потому что въ первомъ случаѣ двумъ неизвѣстнымъ, а во второмъ—одному неизвѣстному можно придавать произвольныя значенія, число которыхъ безконечно велико.

Система трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными рѣшается тѣми же способами, какіе указаны выше для системы двухъ уравненій.

Покажемъ примѣненіе этихъ способовъ на слѣдующемъ примѣрѣ (каждое уравненіе предварительно приведено къ нормальному виду):

$$\begin{cases} 3x-2y+5z=7 \\ 7x+4y-8z=3 \\ 5x-3y-4z=-12. \end{cases}$$

125. Способъ подстановки. Изъ одного уравненія, напр. изъ перваго, опредѣлимъ какое-нибудь неизвѣстное, напр. x, въ зависимости отъ другихъ неизвѣстныхъ:

$$x=\frac{7+2y-5z}{3}.$$

Подставимъ это выраженіе въ остальныя уравненія:

$$7\ .\ \frac{7+2y-5z}{3}+4y-8z=3,$$

$$5\ .\ \frac{7+2y-5z}{3}-3y-4z=-12.$$

Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ двумъ уравненіямъ съ двумя неизвѣстными.

Рѣшивъ ихъ по какому-нибудь изъ способовъ, указанныхъ прежде, найдемъ: $y=3$, $z=2$; подставивъ эти числа въ выраженіе для x, выведенное раньше, найдемъ и это неизвѣстное:

$$x=\frac{7+2\ .\ 3-5\ .\ 2}{3}=1.$$

126. Способъ сравненія. Изъ каждаго уравненія опредѣлимъ одно и то же неизвѣстное въ зависимости отъ двухъ другихъ неизвѣстныхъ. Отъ этого получимъ 3 выраженія для одного и того же неизвѣстнаго Соединивъ знакомъ = первое выраженіе со вторымъ и первое съ третьимъ (вообще, одно изъ этихъ выраженій съ каждымъ изъ остальныхъ), получимъ два уравненія съ 2 неизвѣстными.

$$x=\frac{7+2y-5z}{3}=\frac{3-4y+8z}{7}=\frac{3y+4z-12}{5},$$

$$\frac{7+2y-5z}{3}=\frac{3-4y+8z}{7},\ \frac{7+2y-5z}{3}=\frac{3y+4z-12}{5}.$$

Рѣшивъ эти два уравненія, получимъ. $y=3, z=2$. Вставивъ эти значенія въ одно изъ трехъ выраженій, выведенныхъ раньше для x, найдемъ: $x=1$.

127. Способъ сложенія или вычитанія. Изъ уравненій 1-го и 2-го исключимъ какое-нибудь неизвѣстное способомъ сложенія или вычитанія; отъ этого получимъ одно уравненіе съ 2 неизвѣстными. Потомъ изъ уравненій 1-го и 3-го (или 2-го и 3-го) тѣмъ же способомъ исключимъ *то же неизвѣстное*; отъ этого получимъ еще одно уравненіе съ 2 неизвѣстными. Пусть, напр., желаемъ исключить z:

1) $3x-2y+5z=7$ (на 8) $24x-16y+40z=56$
2) $7x+4y-8z=3$ (на 5) $35x+20y-40z=15$
$59x+4y=71$

1) $3x-2y+5z=7$ (на 4) $12x-8y+20z=28$
3) $5x-3y-4z=-12$ (на 5) $25x-15y-20z=-60$
$37x-23y=-32$

Рѣшимъ полученныя два уравненія: $x=1$, $y=3$. Вставимъ эти числа въ одно изъ данныхъ уравненій, напримѣръ, въ первое:

$$3\,.\,1-2\,.\,3+5z=7;\ 5z=10;\ z=2.$$

Замѣчаніе. Для исключенія одного неизвѣстнаго мы брали въ этомъ примѣрѣ 1-е уравненіе со 2-мъ, потомъ 1-е съ 3-мъ; но нѣтъ надобности держаться такого порядка. Можно взять 1-е ур. со 2-мъ, потомъ 2-е съ 3-мъ; или 1-е съ 3-мъ, потомъ 2-е съ 3-мъ,—однимъ словомъ, надо взять *какое-нибудь изъ трехъ уравненій съ каждымъ изъ остальныхъ*.

ГЛАВА VI.

Система уравненій первой степени со многими неизвѣстными.

128. Общее замѣчаніе. Рѣшеніе системы n ур. съ n неизвѣстными состоитъ въ томъ, что посредствомъ исключенія одного неизвѣстнаго приводятъ эту систему къ другой, въ которой однимъ уравненіемъ и однимъ неизвѣстнымъ меньше; изъ этой системы снова исключаютъ одно неизвѣстное, отчего получаютъ еще однимъ уравненіемъ и однимъ неизвѣстнымъ меньше. Продолжаютъ такое послѣдовательное исключеніе до тѣхъ поръ, пока не получатъ одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

129. Способъ подстановки. Изъ одного уравненія опредѣляютъ какое-нибудь неизвѣстное въ зависимости отъ другихъ неизвѣстныхъ; полученное выраженіе вставляютъ вмѣсто исключаемаго неизвѣстнаго въ остальныя уравненія. Отъ этого получаютъ $n-1$ уравненій съ $n-1$ неизвѣстными. Съ этою системой поступаютъ точно такъ же. Продолжаютъ исключеніе неизвѣстныхъ до тѣхъ поръ, пока не получится одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ. Рѣшивъ его, находятъ значеніе этого неизвѣстнаго. Вставивъ это значеніе въ формулу, выведенную для того неизвѣстнаго, которое исключили въ послѣдній разъ, получаютъ значеніе другого неизвѣстнаго. Вставивъ эти два значенія въ формулу, выведенную для того неизвѣстнаго, которое исключили въ предпослѣдній разъ, находятъ значеніе третьяго неизвѣстнаго. Продолжаютъ такъ до тѣхъ поръ, пока не будутъ получены значенія всѣхъ неизвѣстныхъ.

130. Способъ сравненія. Изъ каждаго уравненія опредѣляютъ одно неизвѣстное въ зависимости отъ остальныхъ. Получаютъ такимъ образомъ для одного и того же неизвѣстнаго столько выраженій, сколько уравненій, положимъ n. Соединивъ знакомъ $=$ одно изъ такихъ выраженій со всѣми остальными, получаютъ $n-1$ ур. съ $n-1$ неизвѣстными. Съ этою системою поступаютъ точно также.

Замѣчаніе. Нѣтъ надобности соединять знакомъ = непремѣнно одно и то же выраженіе со всѣми остальными: можно, напр. 1-е выраженіе соединить со 2-мъ, 2-е съ 3-мъ, 3-е съ 4-мъ и т. д., или какъ нибудь иначе; надо лишь заботиться о томъ, чтобы всѣ n—1 уравненій были независимы одно отъ другого.

131. Способъ сложенія или вычитанія. Берутъ два уравненія, напр., первое и второе, исключаютъ изъ нихъ одно неизвѣстное способомъ сложенія или вычитанія (конечно, уравнявъ предварительно коэффиціенты передъ исключаемымъ неизвѣстнымъ). Отъ этого получаютъ одно уравненіе съ n—1 неизвѣстными. Потомъ берутъ одно изъ взятыхъ прежде уравненій, напр., второе, вмѣстѣ съ какимъ-нибудь изъ остальныхъ, напр., съ третьимъ, и тѣмъ же способомъ исключаютъ изъ нихъ то же неизвѣстное; отъ этого получаютъ другое уравненіе съ n—1 неизвѣстными. Затѣмъ берутъ одно изъ ранѣе взятыхъ уравненій, напр., третье, вмѣстѣ съ однимъ изъ остальныхъ, напр., съ четвертымъ, и исключаютъ изъ нихъ то же самое неизвѣстное; отъ этого получаютъ третье уравненіе съ n—1 неизвѣстными. Перебравъ такимъ образомъ всѣ n уравненій, получаютъ n—1 ур. съ n—1 неизвѣстными. Съ этой системой можно поступать точно такъ же, какъ и съ первой.

ГЛАВА VII.

Нѣкоторые частные случаи системъ уравненій.

132. Разсмотримъ нѣкоторые случаи, когда при рѣшеніи системы уравненій полезно отступать отъ общихъ пріемовъ.

1 Случай, когда не всѣ неизвѣстныя входятъ въ каждое уравненіе; напр.:

$$\begin{cases} 10x-y+3z=5 \\ 4v-5x=6 \\ 2y+3z=6 \\ 3y+2v=4 \end{cases}$$

Въ этомъ случаѣ система рѣшается быстрѣе, чѣмъ обыкновенно, такъ какъ въ нѣкоторыхъ уравненіяхъ сами собой исключены тѣ или другія неизвѣстныя. Надо

только сообразить, какія неизвѣстныя изъ какихъ уравненій слѣдуетъ исключить, чтобы возможно быстрѣе дойти до одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ. Исключивъ въ нашемъ примѣрѣ z изъ 1-го и 3-го ур. и v изъ 2-го и 4-го, получимъ два уравненія съ x и y:

$$\begin{array}{r} 10x-y+3z=5 \\ -2y-3z=-6 \\ \hline 10x-3y=-1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4v-5x=6 \\ -4v-6y=-8 \\ \hline -5x-6y=-2 \end{array}$$

Рѣшивъ эти уравненія, найдемъ: $x=0$, $y=\frac{1}{3}$.

Теперь вставимъ эти значенія во 2-е и 3-е уравненія:

$$v=\frac{3}{2},\ z=\frac{16}{9}.$$

II. Введеніе вспомогательныхъ неизвѣстныхъ. Иногда система уравненій имѣетъ такой видъ, при которомъ она *рѣшается сравнительно просто посредствомъ* введенія вспомогательныхъ неизвѣстныхъ. Покажемъ это на слѣдующихъ трехъ примѣрахъ.

Примѣръ 1.

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{7}{6} \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=-\frac{5}{6} \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}-\frac{1}{z}=\frac{1}{6} \end{cases} \qquad \text{Положимъ, что} \begin{cases} \frac{1}{x}=x' \\ \frac{1}{y}=y' \\ \frac{1}{z}=z'. \end{cases}$$

Тогда получимъ систему трехъ уравненій съ вспомогательными неизвѣстными x', y' и z':

$$\begin{cases} x'+y'-z'=\frac{7}{6} \\ x'-y'-z'=-\frac{5}{6} \\ y'-x'-z'=\frac{1}{6}. \end{cases}$$

Рѣшивъ эту систему, найдемъ:

$$x'=\frac{1}{2},\ y'=1,\ z'=\frac{1}{3},$$

т.-е. $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{y}=1$, $\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$.

Откуда $x=2$, $y=1$, $z=3$.

Примѣръ 2

$$\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=-13 \\ \frac{6}{x}-\frac{3}{y}-\frac{1}{z}=5\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{x}+\frac{7}{y}+\frac{2}{z}=3\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Дроби $\frac{3}{x}$, $\frac{2}{y}$ и т. п. можно разсматривать, какъ произведенія $3 \cdot \frac{1}{x}$, $2 \cdot \frac{1}{y}$ и т. д.

Поэтому, положивъ $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=y'$ и $\frac{1}{z}=z'$, получимъ:

$$\begin{cases} 3x'+2y'-4z'=-13 \\ 6x'-3y'-z'=5\frac{1}{2} \\ -5x'+7y'+2z'=3\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Изъ этихъ уравненій находимъ: $x'=2$, $y'=\frac{1}{2}$, $z'=5$, послѣ чего получимъ: $x=\frac{1}{2}$, $y=2$, $z=\frac{1}{5}$.

Примѣръ 3.

$$\begin{cases} \frac{1}{2x+3y-5}+\frac{7}{5x-8y+12}=1. \\ \frac{4}{2x+3y-5}-\frac{14}{5x-8y+12}=1. \end{cases}$$

Введемъ вспомогательныя неизвѣстныя:

$$\frac{1}{2x+3y-5}=x'; \frac{1}{5x-8y+12}=y'.$$

Тогда получимъ болѣе простую систему:

$$\begin{cases} x'+7y'=1 \\ 4x'-14y'=1. \end{cases}$$

Рѣшивъ эту систему (напр., способомъ уравненія коэффиціентовъ), найдемъ: $x'=\frac{1}{2}$, $y'=\frac{1}{14}$; слѣдов.:

$$\begin{cases} \frac{1}{2x+3y-5}=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{5x-8y+12}=\frac{1}{14} \end{cases}$$

Откуда: $\begin{cases} 2x+3y-5=2 \\ 5x-8y+12=14 \end{cases}$

или $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 5x-8y=2. \end{cases}$ Эта система даетъ: $x=2$, $y=1$.

III. Сложеніе и вычитаніе уравненій. Например̌ъ:

$$\begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ x+z=c. \end{cases}$$

Сложивъ всѣ три уравненія, найдемъ сумму трехъ неизвѣстныхъ; вычитая изъ этой суммы каждое уравненіе, найдемъ неизвѣстныя отдѣльно:

$$2(x+y+z)=a+b+c; \quad x+y+z=\frac{a+b+c}{2},$$

$$z=\frac{a+b+c}{2}-a, \quad x=\frac{a+b+c}{2}-b; \; y=\frac{a+b+c}{2}-c.$$

ГЛАВА VIII.

Понятіе о способѣ неопредѣленныхъ множителей.

(Способъ Безу [1])

133. Система двухъ уравненій съ 2 неизвѣстными. Возьмемъ такую систему въ общемъ видѣ.

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c'. \end{cases} \tag{1}$$

Умножимъ всѣ члены одного уравненія, напр., второго, на нѣкотораго множителя m и затѣмъ сложимъ его съ другимъ уравненіемъ:

$$(a+a'm)x+(b+b'm)y=c+c'm \tag{2}$$

Желая опредѣлить изъ этого уравненія x, придадимъ множителю m такое значеніе, чтобы коэффиціентъ при y обратился въ нуль. Для этого надо для m назначить величину, опредѣляемую уравненіемъ.

$$b+b'm=0, \text{ откуда } m=-\frac{b}{b'}.$$

Тогда уравненіе (2) даетъ

$$(a+a'm)x=c+c'm, \text{ откуда. } x=\frac{c+c'm}{a+a'm}.$$

Вставимъ теперь на мѣсто m его значеніе $-\frac{b}{b'}$;

$$x=\frac{c+c'\left(-\frac{b}{b'}\right)}{a+a'\left(-\frac{b}{b'}\right)}=\frac{c-\frac{c'b}{b'}}{a-\frac{a'b}{b'}}=\frac{\frac{cb'-c'b}{b'}}{\frac{ab'-a'b}{b'}}=\frac{cb'-c'b}{ab'-ab'}.$$

---

[1]) Французскій математикъ XVIII столѣтія (1730—1783)

Для опредѣленія y дадимъ m такое значеніе, которое въ уравненіи (2) обратитъ въ нуль коэффиціентъ при x, т.-е положимъ, что:

$$a+a'm=0, \text{ откуда } m=-\frac{a}{a'}.$$

Тогда

$$(b+b'm)y=c+c'm,$$

откуда

$$y=\frac{c+c'm}{b+b'm}=\frac{c+c'\left(-\frac{a}{a'}\right)}{b+b'\left(-\frac{a}{a'}\right)}=\frac{a'c-ac'}{a'b-ab'}=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

134. Система трехъ уравненій съ 3 неизвѣстными.

Пусть имѣемъ систему трехъ уравненій.

$$\begin{cases} a\,x+b\,y+c\,z=d \\ a'\,x+b'\,y+c'\,z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases} \qquad (1)$$

Умножимъ всѣ члены одного уравненія, напр., перваго, на неопредѣленнаго множителя m, а всѣ члены другого уравненія, напр., второго, на неопредѣленнаго множителя n и затѣмъ сложимъ всѣ три уравненія:

$$(am+a'n+a'')x+(bm+b'n+b'')y+(cm+c'n+c'')z=dm+d'n+d'' \qquad (2)$$

Желая опредѣлить x, выберемъ для m и n такія значенія, чтобы въ послѣднемъ уравненіи коэффиціенты при y и z обратились въ нули Такія значенія найдутся, если рѣшимъ систему.

$$\begin{cases} bm+b'n+b''=0 \\ cm+c'n+c''=0. \end{cases} \qquad (3)$$

Тогда уравненіе (2) даетъ $x=\dfrac{dm+d'n+d''}{am+a'n+a''}$. (4)

Такимъ образомъ, рѣшеніе системы (1) трехъ уравненій съ 3 неизвѣстными приводится къ рѣшенію системы (3) двухъ уравненій съ 2 неизвѣстными.

Перенеся въ уравненіяхъ (3) члены b'' и c'' въ правую часть и пользуясь формулами § 133, получимъ:

$$m=\frac{(-b'')c'-b'(-c'')}{bc'-b'c}=\frac{b'c''-b''c'}{bc'-b'c},$$

$$n=\frac{b(-c'')-(-b'')c}{bc'-b'c}=\frac{b''c-bc''}{bc'-b'c}$$

Подставивъ эти выраженія въ равенство (4), находимъ:

$$x=\frac{d\,\dfrac{b'c''-b''c'}{bc'-b'c}+d'\,\dfrac{b''c-bc''}{bc'-b'c}+d''}{a\cdot\dfrac{b'c''-b''c'}{bc'-b'c}+a'\cdot\dfrac{b''c-bc''}{bc'-b'c}+a''}$$

Раскроемъ скобки и умножимъ числителя и знаменателя на $bc'-b'c$:

$$x=\frac{db'c''-db''c'+d'b''c-d'bc''+d''bc'-d''b'c}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}.$$

Остальныя неизвѣстныя можно найти тѣмъ же способомъ, а именно для опредѣленія y надо m и n выбрать такими, чтобы:

$$\begin{cases} am+a'n+a''=0 \\ cm+c'n+c''=0, \end{cases} \quad \text{тогда } y=\frac{dm+d'n+d''}{bm+b'n+b''}.$$

Для опредѣленія z надо рѣшить систему:

$$\begin{cases} am+a'n+a''=0 \\ bm+b'n+b''=0, \end{cases} \quad \text{тогда } z=\frac{dm+d'n+d''}{cm+c'n+c''}.$$

Выполнивъ это, получимъ:

$$y=\frac{da'c''-da''c'+d'a''c-d'ac''+d''ac'-d''a'c}{ba'c''-ba''c'+b'a''c-b'ac''+b''ac'-b''a'c}.$$

$$z=\frac{da'b''-da''b'+d'a''b-d'ab''+d''ab'-d''a'b}{ca'b''-ca''b'+c'a''b-c'ab''+c''ab'-c''a'b}.$$

135. Система n уравненій съ n неизвѣстными. Пусть вообще имѣемъ систему n уравненій 1-й степени съ n неизвѣстными. Умножимъ какія-нибудь $n-1$ уравненій соотвѣтственно на $n-1$ неопредѣленныхъ множителей: m_1, m_2, m_3 . . . m_{n-1} и затѣмъ сложимъ всѣ уравненія. Отъ этого получимъ одно уравненіе съ n неизвѣстными. Желая затѣмъ опредѣлить какое-нибудь неизвѣстное, напр. x, придадимъ неопредѣленнымъ множителямъ такія значенія, чтобы коэффиціенты при всѣхъ остальныхъ неизвѣстныхъ обратились въ нули. Для этого придется рѣшить $n-1$ уравненій съ $n-1$ неизвѣстными. Эту систему, въ свою очередь, можемъ привести къ системѣ $n-2$ уравненій съ $n-2$ неизвѣстными и т. д.

ГЛАВА IX.

Уравненія неопредѣленныя и несовмѣстныя.

136. Система, въ которой число уравненій равно числу неизвѣстныхъ. Мы видѣли, что всѣ способы рѣшенія системы уравненій первой степени, когда число уравненій равно числу неизвѣстныхъ, приводятъ къ рѣшенію одного уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Но такое уравненіе, какъ мы видѣли на примѣрахъ (§ 116), имѣетъ или одно рѣшеніе, или безчисленное множество рѣшеній (примѣръ 4-й указаннаго параграфа), или ни одного рѣшенія (примѣръ 5-й того же параграфа). Поэтому и система уравненій первой степени, когда число уравненій равно числу неизвѣст-

ныхъ, допускаетъ или одно рѣшеніе, или безчисленное множество рѣшеній (неопредѣленная система), или не имѣетъ ни одного рѣшенія (невозможная система). Примѣры системъ, допускающихъ единственное рѣшеніе, мы уже имѣли прежде; приведемъ теперь примѣры системъ неопредѣленной и невозможной.

Примѣръ 1. $\begin{cases} 2x-3y+z=5 \\ 5x+2y-4z=-1 \\ 9x-4y-2z=9. \end{cases}$

Въ этой системѣ третье уравненіе есть слѣдствіе двухъ первыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, если члены перваго уравненія умножимъ на 2, потомъ сложимъ его со вторымъ уравненіемъ, то получимъ третье уравненіе; слѣдов., если два первыя уравненія удовлетворяются какими-нибудь значеніями неизвѣстныхъ, то тѣми же значеніями удовлетворяется и третье уравненіе. Но первыя два уравненія, содержа три неизвѣстныя, имѣютъ безчисленное множество рѣшеній; значитъ, система неопредѣленна.

Если станемъ рѣшать эти уравненія, то неопредѣленность обнаружится тѣмъ, что въ концѣ рѣшенія всѣ неизвѣстныя исключатся и получится равенство: $0=0$.

Примѣръ 2. $\begin{cases} 2x-3y=14 \\ 4x-6y=20. \end{cases}$

Въ этой системѣ второе уравненіе противорѣчитъ первому: если разность $2x-3y$ должна равняться 14, то разность $4x-6y$, равная $2(2x-3y)$, должна равняться $14 \cdot 2$, т.-е. 28, а не 20, какъ требуетъ второе уравненіе. Значитъ, предложенная система невозможна. Если станемъ рѣшать эти уравненія, то невозможность обнаружится тѣмъ, что получимъ нелѣпое равенство. Такія уравненія наз. несовмѣстными.

137. Система, въ которой число уравненій меньше числа неизвѣстныхъ. Такая система или допускаетъ безчисленное множество рѣшеній, или не имѣетъ ни одного рѣшенія. Пусть, напр., намъ дана система 3 уравненій съ 5 неизвѣстными: x, y, z, t и v. Назначимъ для 2 неизвѣстныхъ, напр., для x и y, произвольныя числа и подставимъ ихъ въ данныя уравненія; тогда получимъ систему 3 уравненій съ тремя неиз-

вѣстными z, t и v; рѣшивъ эту систему (если она окажется возможною и опредѣленною), найдемъ значенія этихъ неизвѣстныхъ, соотвѣтствующія числамъ, взятымъ для x и y. Назначивъ какія-нибудь другія числа для x и y, снова найдемъ соотвѣтствующія значенія для остальныхъ неизвѣстныхъ. Такимъ образомъ, каждой парѣ произвольно выбранныхъ чиселъ для x и y найдемъ соотвѣтствующія значенія остальныхъ трехъ неизвѣстныхъ; значитъ, всѣхъ рѣшеній можетъ быть безчисленное множество.

Можетъ случиться, что уравненія системы окажутся несовмѣстными; тогда система не имѣетъ ни одного рѣшенія.

138. Система, въ которой число уравненій больше числа наизвѣстныхъ. Такая система можетъ имѣть рѣшеніе лишь при нѣкоторыхъ соотношеніяхъ между коэффиціентами уравненій. Положимъ, напр., мы имѣемъ систему 7 ур. съ 4 неизвѣстными. Возьмемъ изъ всѣхъ уравненій какія-нибудь 4 и рѣшимъ ихъ (если возможно); тогда мы найдемъ значенія для всѣхъ 4 неизвѣстныхъ. Подставимъ эти значенія въ остальныя 3 уравненія; мы получимъ тогда 3 равенства, которыя могутъ оказаться невозможными. Въ этомъ случаѣ данныя уравненія н е с о в м ѣ с т н ы.

Примѣры.

1) $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 7x+4y=59 \\ 6x-3y=10 \end{cases}$ Рѣшивъ два первыя уравненія, найдемъ: $x=5$, $y=6$. Вставивъ эти значенія въ 3-е уравненіе, получимъ невозможное равенство:

$$12=10;$$

значитъ, данныя уравненія несовмѣстны.

2) $\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \\ qx+ry=s \end{cases}$ Изъ двухъ первыхъ уравненій находимъ:

$$x=\frac{cn-bp}{an-bm},\qquad y=\frac{ap-cm}{an-bm}.$$

Вставимъ эти выраженія въ третье уравненіе; тогда получимъ слѣдующую зависимость между коэффиціентами:

$$\frac{cn-bp}{an-bm}q+\frac{ap-cm}{an-bm}r=s.$$

Если коэффиціенты таковы, что удовлетворяютъ этой зависимости, то система возможна; въ противномъ случаѣ уравненія несовмѣстны.

ГЛАВА X.

Изслѣдованіе уравненій первой степени.

I. Одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ.

139. Что значитъ изслѣдовать уравненіе. Изслѣдовать уравненіе съ буквенными коэффиціентами значитъ разсмотрѣть всѣ особенные случаи, которые могутъ представиться при рѣшеніи его въ зависимости отъ частныхъ значеній буквъ, и уяснить значеніе этихъ случаевъ для той задачи, изъ условій которой уравненіе выведено.

140. Общій видъ уравненія и его рѣшеніе. Мы видѣли (§ 116), что уравненіе первой степени съ 1 неизвѣстнымъ x послѣ надлежащихъ преобразованій приводится къ такому нормальному виду, при которомъ каждая часть уравненія состоитъ только изъ одного члена, а именно: лѣвая часть состоитъ изъ члена, содержащаго x въ первой степени, а правая часть—изъ члена, не содержащаго x. Обозначимъ коэффиціентъ при x въ лѣвой части уравненія буквою a и членъ правой части уравненія буквою b; тогда нормальный видъ уравненія 1-й степени съ 1 неизвѣстнымъ будетъ такой:

$$ax=b.$$

гдѣ a и b суть какія-нибудь алгебраическія числа, не зависящія отъ x. Раздѣливъ обѣ части этого уравненія на коэффиціентъ a, мы получимъ слѣдующее единственное рѣшеніе уравненія:

$$x=\frac{b}{a}.$$

Разсмотримъ теперь, какого рода рѣшенія получаются изъ этой общей формулы при частныхъ значеніяхъ входящихъ въ нее буквъ.

141. Положительное рѣшеніе. Такое рѣшеніе получается тогда, когда числа b и a одинаковыхъ знаковъ, т.-е. оба они положительныя, или оба отрицательныя.

Положительное рѣшеніе вообще показываетъ, что предложенная задача возможна.

Впрочемъ, иногда случается, что не всѣ условія задачи выражены въ уравненіи; въ этомъ случаѣ положительное рѣшеніе можетъ и не удовлетворять требованіямъ задачи, и задача окажется невозможной. Приведемъ этому примѣръ.

Задача. Общество, состоящее изъ 20 человѣкъ, устроило сборъ съ благотворительной цѣлью, при чемъ каждый мужчина внесъ по 3 рубля, а каждая женщина—по 1 руб. Сколько было въ этомъ обществѣ мужчинъ и сколько женщинъ, если весь сборъ составилъ 55 руб.?

Искомое число мужчинъ x; число женщинъ $20-x$; сборъ со всѣхъ мужчинъ $3x$, съ женщинъ $20-x$; по условію задачи:

$$3x+(20-x)=55; \quad \text{откуда: } x=17\tfrac{1}{2}.$$

Это рѣшеніе удовлетворяетъ уравненію, но не удовлетворяетъ задачѣ, такъ какъ по смыслу ея искомое число должно быть цѣлымъ. Различие между уравненіемъ и задачею произошло здѣсь оттого, что уравненіе выражаетъ не всѣ требованія задачи, а именно: въ немъ не содержится подразумѣваемаго въ задачѣ требованія, чтобы искомое число было цѣлымъ. Предложенная задача невозможна.

142. Отрицательное рѣшеніе. Такое рѣшеніе получается тогда, когда числа b и a противоположныхъ знаковъ, т.-е. одно изъ нихъ положительное, а другое отрицательное.

Отрицательное рѣшеніе, удовлетворяя уравненію, въ то же время удовлетворяетъ и задачѣ, если величина, выражаемая числомъ x, можетъ быть понимаема въ двухъ противоположныхъ смыслахъ. Въ такомъ случаѣ отрицательное рѣшеніе означаетъ, что эту величину надо брать въ смыслѣ, противоположномъ тому, въ какомъ она берется при положительномъ рѣшеніи; такъ, если положительное рѣшеніе означаетъ время послѣ нѣкотораго событія, то отрицательное рѣшеніе означаетъ время раньше этого событія; если первое означаетъ разстояніе вправо, то послѣднее—разстояніе влѣво отъ нѣкоторой точки, и т. п.

Если же величина, выражаемая числомъ x, не можетъ быть понимаема въ двухъ противоположныхъ смыслахъ, то отрицательное рѣшеніе означаетъ невозможность задачи.

Задача 1. Отцу 40 лѣтъ, а сыну 10 лѣтъ. Черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ въ 7 разъ старше сына?

Обозначимъ искомое число черезъ x. Черезъ x лѣтъ отцу будетъ $40+x$, а сыну $10+x$ лѣтъ. По условію:

$$40+x=(10+x)7; \quad \text{откуда;} \quad x=-5.$$

Если вопросъ задачи: «черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ въ 7 разъ старше сына?» понимать буквально, то получившееся отрицательное рѣшеніе надо истолковать такъ: невозможно, чтобы въ будущемъ отецъ когда-либо сдѣлался въ 7 разъ старше сына. Но допустимъ, что, задавая вопросъ задачи, мы имѣли цѣлью опредѣлить то время (тотъ моментъ времени), когда отецъ въ 7 разъ старше сына, независимо отъ того, произойдетъ ли это событіе въ будущемъ, или оно уже произошло въ прошедшемъ. Тогда при рѣшеніи задачи мы должны сдѣлать 2 предположенія:

1) Положимъ, что отецъ будетъ старше сына въ 7 разъ черезъ x лѣтъ; тогда уравненіе окажется то, которое мы выше составили:

$$40+x=(10+x)7. \qquad (1)$$

2) Положимъ, что отецъ былъ старше сына въ 7 разъ x лѣтъ тому назадъ; тогда уравненіе окажется другое:

$$40-x=(10-x)7. \qquad (2)$$

Не трудно видѣть, что уравненіе (2) можно получить изъ ур. (1), если въ (1) замѣнимъ x на $-x$. Значитъ, можно сказать, что уравненіе (1) соотвѣтствуетъ обоимъ предположеніямъ, если только условимся, что положительное значеніе x означаетъ промежутокъ времени, слѣдующій за настоящимъ моментомъ, а отрицательное значеніе означаетъ промежутокъ времени, предшествующій настоящему моменту. Тогда, получивъ отрицательное рѣшеніе уравненія (1), именно $x=-5$, мы должны

сказать, что отецъ былъ въ 7 разъ старше сына 5 лѣтъ тому назадъ.

Задача 2. Два курьера ѣдутъ въ направленіи отъ M къ N (черт. 19); въ каждый часъ одинъ курьеръ проѣзжаетъ 15 верстъ, другой 12 верстъ. Перваго замѣтили на станціи A въ 12 часовъ дня, а второго видѣли въ 2 часа того же дня на станціи B, отстоящей отъ A на 25 верстъ. Опредѣлить мѣсто, гдѣ одинъ курьеръ догонитъ другого.

Изъ условій задачи прямо не видно, гдѣ расположено такое мѣсто: направо отъ B или налѣво отъ этой точки. Предположимъ, что курьеры сошлись направо отъ B, въ нѣкоторой точкѣ C,

Черт. 19.

отстоящей отъ B на x верстъ. Первому курьеру отъ A до C пришлось проѣхать $25+x$ верстъ, на что ему понадобилось $\frac{25+x}{15}$ часовъ. Второму курьеру отъ B до C пришлось проѣхать x верстъ, на что ему понадобилось $\frac{x}{12}$ часовъ. Изъ условій задачи видно, что число часовъ, въ теченіе которыхъ первый курьеръ проѣхалъ отъ A до C, больше числа часовъ, употребленныхъ вторымъ курьеромъ на проѣздъ отъ B до C, на 2; поэтому:

$$\frac{25+x}{15}-\frac{x}{12}=2. \qquad (1)$$

Такимъ окажется уравненіе въ томъ случаѣ, если курьеры сошлись, какъ мы предположили, направо отъ B. Посмотримъ, каково будетъ уравненіе, если курьеры сошлись въ нѣкоторой точкѣ C_1, лежащей налѣво отъ B, на разстояніи x верстъ отъ B. Тогда первый курьеръ проѣхалъ пространство отъ A до C_1, т.-е. $25-x$ верстъ, въ $\frac{25-x}{15}$ часовъ; значитъ, столько часовъ прошло отъ момента, когда 1-й курьеръ былъ на станціи A,

до того момента, когда онъ догналъ 2-го курьера. 2-й курьеръ проѣхалъ путь отъ C_1 до B, равный x верстъ, въ $\frac{x}{12}$ часовъ; значитъ, столько часовъ прошло отъ момента встрѣчи курьеровъ, до того момента, когда 2-й прибылъ на станцію B. Но, по условію, 1-й курьеръ выѣхалъ со станціи A въ полдень, а 2-й курьеръ прибылъ на станцію B въ 2 часа дня (а въ промежуткѣ между этими моментами была ихъ встрѣча); значитъ, сумма двухъ временъ:

$$\frac{25-x}{15} \text{ час. и } \frac{x}{12} \text{ час.}$$

должна составить ровно 2 часа:

$$\frac{25-x}{15}+\frac{x}{12}=2. \qquad (2)$$

Легко замѣтить, что уравненіе (2) можно получить изъ ур. (1), если въ послѣднемъ x замѣнимъ на $-x$. Дѣйствительно, такая замѣна даетъ:

$$\frac{25+(-x)}{15}-\frac{-x}{12}=2, \text{ или } \frac{25-x}{15}-\left(-\frac{x}{12}\right)=2, \text{ т.-е. } \frac{25-x}{15}+\frac{x}{12}=2,$$

а это и есть уравненіе (2).

Замѣтивъ это, мы можемъ сказать, что уравненіе (1) включаетъ въ себѣ и уравненіе (2), если только допустимъ, что буква x въ ур. (1) можетъ означать не только положительное число, но и отрицательное. Тогда уравненіе (1) одинаково соотвѣтствуетъ какъ тому предположенію, что курьеры сошлись направо отъ B, такъ и тому, что они сошлись налѣво отъ B. Какое изъ этихъ двухъ предположеній имѣетъ въ дѣйствительности мѣсто, мы увидимъ, рѣшивъ ур. (1): если получимъ положительное рѣшеніе, то будетъ вѣрно первое предположеніе, если получимъ отрицательное рѣшеніе, то будетъ вѣрно второе предположеніе.

Рѣшимъ уравненіе (1):

$$\overset{4}{\frac{25+x}{15}}-\overset{5}{\frac{x}{12}}=\overset{60}{2}; \qquad 100+4x-5x=120; \qquad -x=20; \qquad x=-20.$$

Значитъ, курьеры сошлись налѣво отъ B въ точкѣ C_1, отстоящей отъ B на 20 верстъ.

Задача 3. Въ двухъ кошелькахъ было 100 руб. Вынувъ изъ одного $\frac{1}{2}$, а изъ другого $\frac{1}{3}$ денегъ, находившихся въ нихъ, замѣтили, что въ обоихъ кошелькахъ вмѣстѣ осталось 70 руб. Сколько было денегъ въ каждомъ кошелькѣ?

Въ одномъ кошелькѣ денегъ x руб.; въ другомъ $100-x$ руб. Когда изъ перваго вынули $\frac{1}{2}$ его денегъ, то въ немъ осталось $\frac{1}{2}x$, когда изъ второго вынули $\frac{1}{3}$ его денегъ, то въ немъ осталось $\frac{2}{3}(100-x)$; по условію

$$\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}(100-x)=70.$$

Рѣшимъ это уравненіе:

$$3x+400-4x=420;\ \text{откуда:}\ -x=20;\quad x=-20.$$

Такъ какъ стоимость денегъ въ кошелькѣ можетъ быть только положительной (или нулемъ), то получившееся отрицательное рѣшеніе означаетъ невозможность задачи.

143. Нулевое рѣшеніе. Если въ формулѣ $x=\frac{b}{a}$ число b сдѣлается равнымъ нулю, при чемъ a не будетъ равно нулю, то x приметъ видъ частнаго $\frac{0}{a}$, которое, по опредѣленію дѣленія, должно равняться нулю. И дѣйствительно, тогда уравненіе $ax=b$ не можетъ имѣть никакого иного корня, кромѣ $x=0$, такъ какъ при $b=0$ оно обращается въ равенство $ax=0$, которое, при a, не равномъ нулю, возможно только, когда $x=0$.

Нулевое рѣшеніе вообще даетъ отвѣтъ на вопросъ задачи.

Задача. Отцу 40 лѣтъ, сыну 10. Черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ въ 4 раза старше сына?

Обозначивъ искомое число буквой x, получимъ:

$$40+x=(10+x)4,$$

откуда:

$$3x=0,\quad x=\frac{0}{3}=0.$$

Это рѣшеніе дастъ отвѣтъ на вопросъ задачи: «въ настоящее время отецъ въ 4 раза старше сына».

144. Безконечное рѣшеніе. Если въ формулѣ $x=\frac{b}{a}$ число a обратится въ нуль, то x представится подъ видомъ частнаго $\frac{b}{0}$; если при этомъ число b не есть 0, то для x нельзя получить никакого числа (§ 39, 3^0). Въ этомъ случаѣ уравненіе $ax=b$ принимаетъ видъ равенства $0 . x=b$, которое не удовлетворяется никакимъ числомъ, такъ какъ, какое бы число мы для x ни взяли, произведеніе $0 . x$ всегда равно 0, тогда какъ число b, по условію, не равно 0.

Невозможность удовлетворить уравненію никакимъ числомъ, конечно, означаетъ и невозможность задачи, изъ условій которой выведено это уравненіе.

Однако недостаточно сказать, что задача въ этомъ случаѣ невозможна; можно еще указать одно важное обстоятельство, которое мы сейчасъ объяснимъ.

Зададимся вопросомъ: какія значенія будетъ получать неизвѣстное, если станемъ измѣнять условія задачи такъ, чтобы знаменатель дроби, выведенной для x, не равнялся нулю, а только уменьшался бы по абсолютной величинѣ, приближаясь къ нулю? Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, посмотримъ, какъ будетъ измѣняться величина дроби, если абсолютную величину ея знаменателя станемъ приближать къ нулю, а числителя оставимъ безъ перемѣны.

Положимъ, что въ какой-нибудь дроби $\frac{p}{q}$ абсолютная величина знаменателя принимаетъ все меньшія и меньшія значенія, напримѣръ, такія: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ и т. д. Тогда абсолютная величина дроби получаетъ такія значенія (если черезъ p' обозначимъ абсолютную величину p):

$$\frac{p'}{\frac{1}{10}}=10p';\ \frac{p'}{\frac{1}{100}}=100p';\ \frac{p'}{\frac{1}{1000}}=1000p';\ \text{и т. д.}$$

Отсюда видно, что если p' есть число постоянное, не равное

нулю (хотя бы и очень малое), то абсолютная величина дроби $\frac{p}{q}$, при неограниченномъ уменьшеніи ея знаменателя, все возрастаетъ и можетъ превзойти какое угодно большое число.

Это свойство дроби обыкновенно выражаютъ такъ: дробь, у которой знаменатель равенъ 0, а числитель не равенъ 0, равна безконечности.

Фразу эту нельзя понимать буквально, такъ какъ дробь перестаетъ существовать, когда у нея знаменатель обратится въ 0; фраза выражаетъ только то, что если **если абсолютная величина знаменателя дроби уменьшается, приближаясь какъ угодно близко къ нулю, а числитель есть постоянное число, не равное нулю, то абсолютная величина дроби безпредѣльно увеличивается.**

Свойство это письменно выражаютъ такъ:

$$\frac{a}{0}=\infty,$$

гдѣ знакъ ∞ обозначаетъ собою «безконечность».

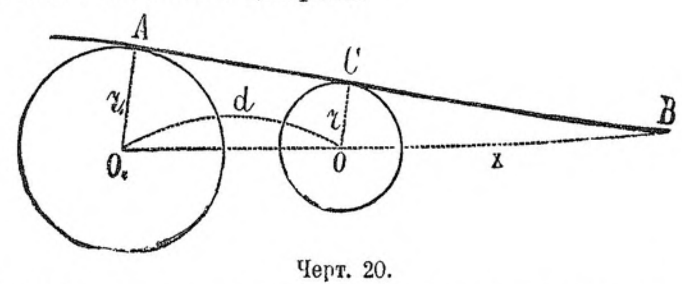
Теперь мы можемъ сказать, что когда въ уравненіи $ax=b$ коэффиціентъ a обращается въ 0, причемъ число b не равно 0, то уравненіе получаетъ «безконечное рѣшеніе» (∞); оно означаетъ не только то, что задача невозможна, но вмѣстѣ съ тѣмъ и показываетъ, что, по мѣрѣ приближенія къ нулю знаменателя дроби, выведенной для x, абсолютная величина x безпредѣльно увеличивается.

Замѣчаніе 1. Если знаменатель, приближаясь къ нулю, имѣетъ одинаковый знакъ съ числителемъ, то дробь, увеличиваясь безпредѣльно, все время остается положительной; если же знаменатель, приближаясь къ нулю, имѣетъ знакъ, противоположный знаку числителя, то дробь все время отрицательна, а абсолютная величина ея увеличивается безпредѣльно. Письменно это выражаютъ такъ:

$$\frac{a}{0}=\pm\infty.$$

Замѣчаніе 2. Изъ свойства дроби находимъ также, что $\frac{a}{\pm\infty}=0$, т.-е. **если абсолютная величина знаменателя возрастаетъ безпредѣльно, а числитель остается постояннымъ, то дробь приближается какъ угодно близко къ нулю.**

Задача. Къ двумъ окружностямъ (черт. 20), у которыхъ радіусы суть r и r_1 и разстояніе между центрами d, проведена общая внѣшняя касательная AB. Опредѣлить точку пересѣченія касательной съ линіей центровъ.



Черт. 20.

Обозначимъ черезъ x разстояніе точки пересѣченія до центра ближайшаго круга. Проведя изъ центровъ радіусы къ точкамъ касанія, получимъ два подобныхъ прямоугольныхъ треугольника OBC и O_1AB, изъ которыхъ имѣемъ:

$$x:(d+x)=r:r_1;\quad r_1x=dr+rx;$$
$$r_1x-rx=dr;\ x=\frac{dr}{r_1-r}.$$

Если предположимъ, что разность радіусовъ данныхъ круговъ уменьшается, приближаясь къ нулю, то дробь $\frac{dr}{r_1-r}$ будетъ безпредѣльно увеличиваться, т.-е. точка пересѣченія будетъ неограниченно удаляться отъ центра ближайшаго круга, и общая касательная AB будетъ все болѣе и болѣе приближаться къ параллельности съ линіей центровъ; когда r_1 сдѣлается вполнѣ равнымъ r, тогда разность r_1-r обратится въ нуль и для x получится «безконечное» значеніе; въ этомъ случаѣ точки пересѣченія совсѣмъ не будетъ, такъ какъ общая касательная окажется параллельной линіи центровъ.

145. Неопредѣленное рѣшеніе. Если въ формулѣ $x=\frac{b}{a}$ каждое изъ чиселъ a и b сдѣлается равнымъ нулю, то x представится подъ видомъ частнаго $\frac{0}{0}$. Это частное, по опредѣленію дѣленія, равняется какому угодно числу (§ 39,2⁰); поэтому выраженіе $\frac{0}{0}$ наз. неопредѣленнымъ. И дѣйствительно, уравненіе $ax=b$ въ этомъ случаѣ принимаетъ видъ равенства $0 . x=0$, которое остается вѣрнымъ при всякомъ значеніи x.

Итакъ, рѣшеніе $a=\frac{0}{0}$ служитъ признакомъ, что уравненіе и задача неопредѣленны, т.-е. допускаютъ безчисленное множество рѣшеній.

Задача. Отцу 40 лѣтъ, сыну 10. Черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ на 30 лѣтъ старше сына?

$$40+x=10+x+30;\ 40+x=40+x.$$

Обѣ части уравненія тождественны, и поэтому x можетъ имѣть произвольныя значенія, т.-е. задача неопредѣленна. Рѣшая это уравненіе по общему пріему, получаемъ:

$$x-x=40-40;\ x(1-1)=0;\ 0 . x=0;\ x=\frac{0}{0}.$$

146. Кажущаяся неопредѣленность. Выраженіе $\frac{0}{0}$ иногда получается оттого, что числитель и знаменатель дроби не сокращены на нѣкотораго множителя, который обращается въ нуль при частныхъ значеніяхъ буквъ. Пусть, напр., мы вывели, что нѣкоторая величина y опредѣляется въ зависимости отъ другой величины x слѣдующей формулой:

$$y=\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3} \qquad (1)$$

Дробь, стоящая въ правой части этой формулы, сокращается на $x-3$, если только $x \lesseqgtr 3$ (такъ какъ при $x=3$ разность $x-3$

обращается въ 0, а на 0 дѣлить невозможно). Слѣд., мы можемъ сказать, что при всѣхъ значеніяхъ x, не равныхъ 3, величина y опредѣляется болѣе простою формулой:

$$y=x+3 \tag{2}$$

такъ какъ при такихъ значеніяхъ x равенство (2) вполнѣ тождественно равенству (1). Но при $x=3$ эти два равенства не тождественны: данное равенство (1) принимаетъ неопредѣленный видъ: $y=\frac{0}{0}$, тогда какъ равенство (2) даетъ опредѣленное число: $y=6$. Значитъ, формула (1) опредѣляетъ величину y не для всѣхъ численныхъ значеній x, а только для такихъ, которыя больше или меньше 3. Чтобы опредѣлить величину y и для значенія $x=3$, надо къ формулѣ (1) добавить еще какое-нибудь дополнительное условіе. Каково это условіе, это зависитъ отъ особенностей того вопроса, при рѣшеніи котораго мы вывели формулу (1). Напр., быть можетъ, вопросъ требуетъ, чтобы величина y опредѣлялась такъ:

если $x \neq 3$, то $y=\frac{x^2-9}{x-3}=x+3$,

а если $x=3$, то $y=0$

(послѣднее условіе и есть дополнительное).

Если никакого особаго дополнительнаго условія не высказано, то обыкновенно подразумѣвается, чтобы и при $x=3$ (мы говоримъ о нашемъ примѣрѣ) величина y выражалась тою же сокращенной формулой (2), которою она выражается при всѣхъ значеніяхъ x, не равныхъ 3, т.-е. тою формулой, которая получается изъ данной дроби (1) послѣ ея сокращенія на множителя $x-3$ (эта формула при $x=3$ даетъ $y=6$) [1]).

[1]) Очень часто дополнительное условіе состоитъ въ томъ, чтобы при томъ значеніи $x=a$, при которомъ дробь, выражающая величину y, принимаетъ неопредѣленный видъ, эта величина равнялась предѣлу, къ которому дробь стремится, когда x неограниченно приближается къ a. Вообще говоря, этотъ предѣлъ и есть то значеніе, которое при $x=a$ принимаетъ дробь послѣ сокращенія на множителя $x-a$ Такъ, въ нашемъ примѣрѣ этотъ предѣлъ есть 6.

Если дополнительное условіе подразумѣвается именно такое, то въ такомъ случаѣ говорятъ, что полученное выраженіе $\frac{0}{0}$ представляетъ **кажущуюся** неопредѣленность, и за **истинное значеніе** дроби принимаютъ то опредѣленное ея значеніе, которое получается послѣ сокращенія дроби на множителя, обращающагося въ нуль. Найти такое значеніе значитъ, какъ принято говорить, **раскрыть истинный смыслъ** даннаго неопредѣленнаго выраженія.

147. Результаты изслѣдованія. Для ясности выпишемъ всѣ результаты, найденные нами при изслѣдованіи, въ слѣдующей таблицѣ:

Уравненіе: $ax=b$; формула рѣшенія: $x=\frac{b}{a}$.	
$a\neq 0$	$a=0$
1) Положительное рѣшеніе (b и a одинаковыхъ знаковъ).	4) Ни одного рѣшенія (рѣшеніе безконечное $x=\frac{b}{0}=\pm\infty$).
2) Отрицательное рѣшеніе (b и a разныхъ знаковъ).	5) Безконечное множество рѣшеній (неопредѣленное рѣшеніе $x=\frac{0}{0}$).
3) Нулевое рѣшеніе ($b=0$),	

148. Задача о курьерахъ. Въ заключеніе этой статьи приведемъ изслѣдованіе задачи о курьерахъ, въ которой вторично прослѣдимъ значеніе всѣхъ случаевъ рѣшенія, разсмотрѣнныхъ выше. Эта задача въ численномъ видѣ была рѣшена раньше (§ 142, зад. 2-я). Предложимъ теперь ее въ общемъ видѣ (см. чертежъ на стран. 150).

Два курьера ѣдутъ въ направленіи отъ M къ N; одинъ курьеръ въ каждый часъ проѣзжаетъ v верстъ, другой v_1 верстъ. Послѣдняго видѣли на станціи B спустя h часовъ послѣ того, какъ перваго замѣтили на станціи A, отстоящей отъ B на d верстъ.

Опредѣлить мѣсто, гдѣ одинъ курьеръ догонитъ другого (буквы v, v_1, h и d суть ариѳметическія числа).

Такое мѣсто могло находиться или направо отъ B, или налѣво отъ B (при чемъ въ послѣднемъ случаѣ оно могло лежать или между A и B, или налѣво отъ A). Предположимъ первое и обозначимъ черезъ x разстояніе отъ точки встрѣчи C до станціи B. Курьеру, ѣдущему со скоростью v верстъ, пришлось отъ A до C проѣхать $d+x$ верстъ, на что ему потребовалось $\frac{d+x}{v}$ часовъ. Курьеру, ѣдущему со скоростью v_1, пришлось отъ B до C проѣхать x верстъ, на что ему потребовалось $\frac{x}{v_1}$ часовъ. Изъ условій задачи видно, что

$$\frac{d+x}{v}-\frac{x}{v_1}=h. \tag{1}$$

Предположимъ теперь, что курьеры сошлись въ нѣкоторой точкѣ C_1, лежащей между A и B на разстояніи x верстъ отъ B. Тогда первый курьеръ отъ A до C_1 проѣхалъ $d-x$ верстъ въ $\frac{d-x}{v}$ часовъ, второй курьеръ отъ C_1 до B проѣхалъ x верстъ въ $\frac{x}{v_1}$ часовъ; изъ условій задачи видно что сумма этихъ временъ; должна равняться h (см. объясненіе въ § 142, задача 2):

$$\frac{d-x}{v}+\frac{x}{v_1}=h. \tag{2}$$

Наконецъ, допустимъ, что курьеры сошлись въ точкѣ C_2, лежащей налѣво отъ B на разстояніи x, превосходящемъ разстояніе AB, т.-е. число d. Тогда первый курьеръ отъ C_2 до A проѣхалъ $x-d$ верстъ въ $\frac{x-d}{v}$ часовъ, а второй отъ C_2 до B проѣхалъ x вер. въ $\frac{x}{v_1}$ часовъ; изъ условій задачи видно, что $\frac{x}{v_1}$ должно быть болѣе $\frac{x-d}{v}$ на h, т.-е.

$$\frac{x}{v_1}-\frac{x-d}{v}=h. \qquad (3)$$

Сравнивая получившіяся три уравненія, мы прежде всего замѣчаемъ, что уравненіе (3) одинаково съ уравненіемъ (2), такъ какъ его можно преобразовать такимъ образомъ:

$$\frac{x}{v_1}-\frac{-(d-x)}{v}=h;\ \frac{x}{v_1}-\left(-\frac{d-x}{v}\right)=h;\ \frac{x}{v_1}+\frac{d-x}{v}=h;$$

а въ этомъ видѣ оно отличается отъ уравненія (2) только порядкомъ слагаемыхъ въ лѣвой части. Далѣе мы замѣчаемъ, что изъ уравненія (1) можно получить уравненіе (2) [слѣд., и уравненіе (3)], если въ немъ замѣнимъ x на $-x$. Поэтому мы можемъ сказать, что уравненіе (1) включаетъ въ себѣ и уравненія (2) и (3), если только допустимъ, что буква x въ этомъ уравненіи можетъ быть числомъ и положительнымъ, и отрицательнымъ. Если, рѣшивъ уравненіе (1), мы получимъ положительное число, то это будетъ значить, что курьеры сошлись направо отъ B, если же получимъ отрицательное рѣшеніе, то это покажетъ намъ, что курьеры сошлись налѣво отъ B, при чемъ точка ихъ соединенія окажется лежащей или между A и B, или налѣво отъ A, смотря по тому, какъ велика абсолютная величина x: меньше ли d, или больше d.

Рѣшимъ уравненіе (1):

$$dv_1+v_1x-vx=hvv_1;\quad (v_1-v)x=hvv_1-dv_1;$$

$$x=\frac{hvv_1-dv_1}{v_1-v}=\frac{v_1(vh-d)}{v_1-v}.$$

Разсмотримъ теперь всѣ различные случаи, которые могутъ представиться при различныхъ численныхъ значеніяхъ буквъ v, v_1, h и d.

1. Положительное рѣшеніе будетъ тогда, когда $vh>d$ и $v_1>a$, или тогда, когда $vh<d$ и $v_1<v$. Оно означаетъ, что курьеры сошлись направо отъ B. Что это дѣйствительно такъ, видно изъ слѣдующихъ соображеній. Произведеніе vh означаетъ пространство, которое проѣхалъ первый курьеръ въ h часовъ; значитъ, оно показываетъ, на какое разстояніе

этотъ курьеръ удалился отъ станціи A до того момента, когда второй курьеръ былъ замѣченъ въ B. Если $vh>d$, то изъ этого выводимъ, что, когда второй курьеръ былъ въ B, первый уже проѣхалъ эту станцію, и такъ какъ при этомъ $v_1>v$, то очевидно, что второй курьеръ догонитъ перваго гдѣ-нибудь за станціей B, а не раньше. Точно такъ же если $vh<d$, то это значитъ, что когда второй курьеръ пріѣхалъ въ B, первый еще не доѣхалъ до этой станціи, и такъ какъ при этомъ $v_1<v$, то очевидно, что первый курьеръ догонитъ второго гдѣ-нибудь направо отъ B, а не раньше.

2. Отрицательное рѣшеніе будетъ тогда, когда $vh>d$, но $v_1<v$, или же тогда, когда $vh<d$, но $v_1>v$. Это рѣшеніе показываетъ, что курьеры сошлись налѣво отъ станціи B (между A и B, если абсолютная величина x меньше d, и налѣво отъ A, если абсолютная величина x больше d). И дѣйствительно, при допущенныхъ условіяхъ курьеры должны были сойтись налѣво отъ B, какъ это видно изъ слѣдующихъ соображеній. Если $vh>d$, то второй курьеръ находился въ B тогда, когда первый уже проѣхалъ эту станцію, и такъ какъ при этомъ $v_1<v$, то второй курьеръ не можетъ догнать перваго за станціей B, а сошелся съ нимъ гдѣ-нибудь раньше. Также если $vh<d$, то второй курьеръ былъ въ B, когда первый еще не доѣхалъ до B, и такъ какъ при этомъ $v_1>v$, то очевидно, что встрѣча произошла налѣво отъ B.

3. Нулевое рѣшеніе получится, когда $vh=d$, но $v_1 \lesseqgtr v$. Въ этомъ случаѣ курьеры сошлись на станціи B.

4. Безконечное рѣшеніе получится, если $vh \lesseqgtr d$, а $v_1=v$. Въ этомъ случаѣ курьеры не могли догнать одинъ другого, потому что оба они ѣдутъ съ одинаковой скоростью, а когда второй изъ нихъ былъ въ B, первый или не доѣхалъ до этой станціи, или уже проѣхалъ ее.

Безконечное рѣшеніе еще означаетъ, что если v неограниченно приближается къ равенству съ v_1, то мѣсто соединенія безпредѣльно удаляется отъ B.

5. Неопредѣленное рѣшеніе получится, если $vh=d$ и $v_1=v$. Въ этомъ случаѣ каждую точку пути можно считать за точку соединенія, такъ какъ курьеры все время ѣдутъ вмѣстѣ;

другими словами, задача при этихъ предположеніяхъ становится неопредѣленной.

2. Система двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными.

149. Общія формулы. Мы видѣли (§ 117), что уравненіе 1-й степени съ 2 неизвѣстными послѣ надлежащихъ преобразованій можетъ быть приведено къ такому нормальному виду, при которомъ въ лѣвой части уравненія находятся только 2 члена: одинъ съ неизвѣстнымъ x (въ первой степени) и другой съ неизвѣстнымъ y (въ первой степени), правая же часть уравненія состоитъ изъ одного члена, не содержащаго неизвѣстныхъ. Обозначивъ коэффиціенты при x и y соотвѣтственно буквами a и b и членъ, не содержащій неизвѣстныхъ, буквою c, мы можемъ нормальный видъ уравненія 1-й степени съ 2-мя неизвѣстными представить такъ:

$$ax+by=c,$$

гдѣ a, b и c означаютъ какія-нибудь алгебраическія числа. Поэтому систему 2-хъ уравненій 1-й степени съ 2 неизвѣстными мы можемъ въ общемъ видѣ изобразить такъ:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c. \end{cases}$$

Рѣшимъ эту систему однимъ изъ способовъ, указанныхъ раньше. Примѣнимъ, напр., способъ сложенія или вычитанія.

Умноживъ члены перваго уравненія на b', а члены второго на b, вычтемъ второе уравненіе изъ перваго:

$$\begin{array}{r} ab'x+bb'y=cb' \\ -a'bx-bb'y=-c'b \\ \hline (ab'-a'b)x=cb'-c'b \end{array}, \qquad x=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}.$$

Умноживъ члены перваго уравненія на a', а второго на a, вычтемъ уравненія почленно:

$$\begin{array}{r} aa'x+ba'y=ca' \\ -aa'x-b'ay=-c'a \\ \hline (ba'-b'a)y=ca'-c'a \end{array}, \qquad y=\frac{ca'-c'a}{ba'-b'a}.$$

Знаменателей обѣихъ формулъ можно сдѣлать одинаковыми, если оба члена дроби, полученной для y, умножимъ на —1; тогда получимъ слѣдующія общія формулы:

$$x=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b'}, \qquad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}.$$

150. Способъ составленія общихъ формулъ. Полезно запомнить, какъ можно составить формулы для неизвѣстныхъ, не прибѣгая каждый разъ къ ихъ выводу. Знаменатель $ab'-a'b$, одинаковый для обѣихъ формулъ, составленъ изъ коэффиціентовъ:

$$\begin{matrix} a & & b \\ & \times & \\ a' & & b' \end{matrix}$$

перемноженіемъ ихъ крестъ-накрестъ, при чемъ одно произведеніе взято съ +, другое съ —. Числители формулъ получаются изъ знаменателя замѣною въ немъ коэффиціентовъ опредѣляемаго неизвѣстнаго соотвѣтственно свободными членами c и c'. Чтобы получить, напр., числителя формулы x, надо въ знаменателѣ $ab'-a'b$ замѣнить иксовы коэффиціенты a и a' соотвѣтственно на c и c'; отъ этого получимъ: $cb'-c'b$.

151. Изслѣдованіе. Разсмотримъ особо слѣдующіе 2 случая:

I. Общій знаменатель $ab'-a'b$ не равенъ нулю. Въ этомъ случаѣ для каждаго неизвѣстнаго получается единственное рѣшеніе, которое можетъ быть положительнымъ, отрицательнымъ и равнымъ нулю. О значеніи этихъ рѣшеній здѣсь можетъ быть сказано то же самое, что говорилось при изслѣдованіи одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

II. Общій знаменатель $ab'-a'b$ равенъ нулю. Предположимъ, что при этомъ ни одинъ изъ коэффиціентовъ: a, a', b, b' не равенъ нулю. Докажемъ, что тогда:

1°. Если одно неизвѣстное представляется подъ видомъ $\frac{0}{0}$, то и другое неизвѣстное представляется подъ тѣмъ же видомъ.

Пусть, напр., $x=\frac{0}{0}$. Для этого нужно, чтобы

$$cb'=c'b$$
$$ab'=a'b.$$

Перемноживъ эти два равенства крестъ-накрестъ (если равныя помножимъ на равныя, то...), найдемъ:
$cb'a'b=c'bab'$; откуда: $cb'a'b-c'bab'=0$, или $bb'(a'c-ac')=0$.

Такъ какъ числа b и b' не равны нулю, то послѣднее равенство возможно только тогда, когда $a'c-ac'=0$; но тогда и $y=\frac{0}{0}$.

Также если допустимъ, что $y=\frac{0}{0}$, т.-е. $ac'=a'c$ и $ab'=a'b$, то, перемноживъ эти равенства крестъ-накрестъ, найдемъ: $ac'a'b=a'cab'$, откуда $aa'(c'b-cb')=0$. Такъ какъ числа a и a' не равны 0, то послѣднее равенство даетъ: $c'b-cb'=0$, а тогда и $x=\frac{0}{0}$.

2°. Если одно неизвѣстное представляется подъ видомъ $\frac{m}{0}$, гдѣ $m\neq0$, то и другое неизвѣстное представляется подъ видомъ $\frac{n}{0}$, гдѣ $n\neq0$. Дѣйствительно, если бы оно приняло видъ $\frac{0}{0}$, то и первое неизвѣстное, по доказанному, имѣло бы тотъ же видъ, а мы предположили, что этого нѣтъ.

Рѣшенія: $x=\frac{0}{0}$ и $y=\frac{0}{0}$ означаютъ неопредѣленность задачи. Дѣйствительно, умноживъ всѣ члены перваго уравненія на b', а члены второго на b (что можно сдѣлать, такъ какъ числа b и b' по предположенію, не равны 0), получимъ:

$$ab'x+bb'y=cb'$$
$$a'bx+b'by=c'b. \qquad (A)$$

Если $x=\frac{0}{0}$ и $y=\frac{0}{0}$, то $ab'=a'b$, $cb'=c'b$; тогда два уравне-

нія (A) представляютъ собою одно уравненіе съ 2 неизвѣстными; а въ этомъ случаѣ неизвѣстныя могутъ имѣть безчисленное множество значеній (§ 118).

Рѣшенія: $x=\frac{m}{0}$ и $y=\frac{n}{0}$ означаютъ несовмѣстность уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, если $ab'=a'b$, а $cb'\neq c'b$, то лѣвыя части уравненія (A) имѣютъ одинаковыя численныя величины, а правыя—разныя; значитъ, эти уравненія несовмѣстны, и задача невозможна.

Изъ сказаннаго заключаемъ: система двухъ уравненій первой степени съ 2 неизвѣстными допускаетъ или одно опредѣленное рѣшеніе, или безчисленное множество рѣшеній, или же ни одного рѣшенія.

152. Случай, когда нѣкоторые изъ коэффиціентовъ равны нулю Въ этомъ случаѣ не слѣдуетъ полагаться на общія формулы, выведенныя для неизвѣстныхъ, а должно подвергать каждый случай особому изслѣдованію. Положимъ, напр, что оба коэффиціента при одномъ и томъ же неизвѣстномъ равны нулю. Пусть $b=b'=0$, тогда $ab'-a'b=0$ и $cb'-c'b=0$, и общія формулы даютъ $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{m}{0}$ или $\frac{0}{0}$, смотря по тому, будетъ ли ac' не равно или равно $a'c$. Уравненія же въ этомъ случаѣ даютъ

$$\begin{cases} ax+0\ y=c \\ a'x+0\,.\,y=c' \end{cases} \text{откуда: } \begin{cases} x=\frac{c}{a} \\ x=\frac{c'}{a'} \end{cases}$$

Если ac' не равно $a'c$, то $\frac{c}{a}$ не равно $\frac{c'}{a'}$, и уравненія невозможны, потому что для x получаются два различныя значенія; между тѣмъ, въ этомъ случаѣ формулы для неизвѣстныхъ даютъ: $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{m}{0}$. Если же $ac'=a'c$, то $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$; тогда для x получается опредѣленное рѣшеніе, а y можетъ имѣть всевозможныя значенія, хотя общія формулы въ этомъ случаѣ даютъ: $x=\frac{0}{0}$ и $y=\frac{0}{0}$.

ОТДѢЛЪ IV.

Степени и корни.

ГЛАВА I.

Основныя свойства возвышенія въ степень.

153. Опредѣленія. Произведеніе n одинаковыхъ сомножителей a наз. n-ою степенью числа a.

Такъ, произведеніе 2. 2. 2 (равное 8) есть 3-я степень числа 2; произведеніе (—3)(—3) (равное +9) есть 2-я степень числа —3; произведеніе $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ (равное $\frac{1}{32}$) есть 5-я степень числа $\frac{1}{2}$.

Вторая степень наз. иначе квадратомъ, а третья — кубомъ.

Дѣйствіе, посредствомъ котораго находится n-ая степень числа a, наз. возвышеніемъ числа a въ n-ую степень.

n-ая степень числа a обозначается такъ: a^n. Изъ опредѣленія видно, что это выраженіе равносильно произведенію n сомножителей: $a. a. a.... a$.

Повторяющійся сомножитель (a) наз. основаніемъ степени или возвышаемымъ числомъ; число (n) одинаковыхъ сомножителей, наз. показателемъ степени.

По смыслу опредѣленія видно, что показатель степени есть число цѣлое положительное.

Впрочемъ, ради обобщенія условно допускаютъ степени съ показателемъ 0 и степени съ отрицательными показателями;

этимъ показателямъ, какъ мы видѣли (§ 68), придаютъ слѣдующій смыслъ:

1) выраженіе a^0 означаетъ частное $\frac{a^m}{a^m}$ и, слѣд., оно равно 1;

2) выраженіе a^{-n} означаетъ частное $\frac{a^m}{a^{m+n}}$ и, слѣд., оно равно дроби $\frac{1}{a^n}$.

Впослѣдствіи мы введемъ еще понятіе о дробныхъ показателяхъ

154. Правило знаковъ. Мы видѣли (§ 35), что произведеніе, въ которое входятъ отрицательные сомножители, оказывается положительнымъ въ томъ случаѣ, когда число такихъ сомножителей четное, и отрицательнымъ въ томъ случаѣ, когда число ихъ нечетное. Примѣняя это свойство къ произведенію одинаковыхъ сомножителей, т.-е. къ степени, мы находимъ слѣдующее правило знаковъ:

от возвышенія отрицательнаго числа въ степень получается положительное число тогда, когда показатель степени— число четное, и отрицательное число тогда, когда показатель степени число нечетное.

Такъ: $(-5)^2=(-5)(-5)=+25$; $(-2)^3=(-2)(-2)(-2)=-8$; и т. п..

Конечно, отъ возвышенія положительнаго члена и въ четную и въ нечетную степень получается положительное число.

155. Возвышеніе въ степень произведенія, частнаго и степени. Это возвышеніе выполняется согласно слѣдующимъ тремъ теоремамъ.

Теорема 1-я. Чтобы возвысить въ степень произведеніе, достаточно возвысить въ эту степень каждаго сомножителя отдѣльно.

Какъ эту теорему, такъ и двѣ послѣдующія, мы сначала докажемъ въ примѣненіи только къ положительнымъ показа-

телямъ, а затѣмъ обобщимъ ихъ на показателей отрицательныхъ и нулевыхъ.

Пусть требуется найти $(abc)^2$, т.-е. требуется возвысить произведенiе abc въ квадратъ. Это значитъ, что требуется abc умножить на abc. Такъ какъ произведенiе abc есть одночленъ, а при умноженiи одночленовъ показатели одинаковыхъ буквъ складываются, то

$$(abc)^2=(abc)(abc)=a^{1+1}b^{1+1}c^{1+1}=a^2b^2c^2.$$

Вообще, если n есть цѣлое положительное число, то, согласно тому же правилу, будемъ имѣть:

$$(abc)^n=(abc)(abc)\ldots\ldots=a^{1+1+\cdots}b^{1+1+\cdots}c^{1+1+\cdots}=a^nb^nc^n.$$

Теорема 2-я. Чтобы возвысить степень въ степень, достаточно перемножить показателей этихъ степеней.

Пусть, напр., требуется возвысить a^2 въ кубъ, т.-е. требуется найти произведенiе $a^2 . a^2 . a^2$. При умноженiи показатели одинаковыхъ буквъ складываются; поэтому:

$$(a^2)^3=a^2.a^2.a^2=a^{2+2+2}=a^{2\cdot 3}=a^6.$$

Вообще, если n есть цѣлое положительное число, то

$$(a^m)^n=a^m a^m a^m\ldots=a^{m+m+m+\cdots}=a^{mn}.$$

Теорема 3-я. Чтобы возвысить въ степень дробь, достаточно возвысить въ эту степень отдѣльно числителя и знаменателя.

Дѣйствительно, согласно правилу умноженiя дробей, мы можемъ написать (если n есть цѣлое положительное число):

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a}{b}.\frac{a}{b}.\frac{a}{b}\ldots=\frac{aaa\ldots}{bbb\ldots}=\frac{a^n}{b^n}.$$

156. Обобщенiе этихъ теоремъ. Покажемъ теперь, что теоремы эти остаются вѣрными и для показателей цѣлыхъ отрицательныхъ. Для этого примемъ во вниманiе, что число съ отрицательнымъ показателемъ равно дроби, у которой числитель есть 1, а знаменатель — то же число съ положительнымъ показателемъ, равнымъ

по абсолютной величинѣ отрицательному показателю; вслѣдствіе этого можемъ писать:

$$1)\ (abc)^{-n}=\frac{1}{(abc)^n}=\frac{1}{a^nb^nc^n}=\frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{b^n}\cdot\frac{1}{c^n}=a^{-n}b^{-n}c^{-n}.$$

$$2)\ (a^{-m})^n=\left(\frac{1}{a^m}\right)^n=\frac{1}{(a^m)^n}=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}=a^{(-m)n};$$

$$(a^m)^{-n}=\frac{1}{(a^m)^n}=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}=a^{m(-n)};$$

$$(a^{-m})^{-n}=\frac{1}{(a^{-m})^n}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n}=1:\frac{1}{a^{mn}}=a^{mn}=a^{(-m)(-n)};$$

$$3)\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n}=1:\frac{a^n}{b^n}=\frac{b^n}{a^n}=\frac{1}{a^n}:\frac{1}{b^n}=a^{-n}:b^{-n}=\frac{a^{-n}}{b^{-n}}.$$

Легко также убѣдиться, что теоремы эти примѣнимы и къ нулевому показателю. Такъ:

$$(abc)^0=a^0b^0c^0=1\ .\ 1\ .\ 1=1;\quad (a^n)^0=a^{n\,0}=a^0=1.$$

157. Возвышеніе въ степень одночленовъ.

1⁰. Пусть требуется возвысить одночленъ $-3a^2b^3c$ въ n-ую степень. Примѣняя теорему 1-ю, а затѣмъ 2-ю, получимъ:

$$(-3a^2b^3c)^n=(-3)^n(a^2)^n(b^3)^nc^n=(-3)^na^{2n}b^{3n}c^n.$$

Правило. Чтобы возвысить въ степень одночленъ, достаточно возвысить въ эту степень его коэффиціентъ и показателей буквъ умножить на показателя степени.

2⁰. Дробныя выраженія возвышаются въ степень по теоремѣ 3-й, т.-е. числитель и знаменатель возвышаются отдѣльно.

Примѣры.

1) $(-2x^2y^3z^4)^3=-8x^6y^9z^{12}$;

2) $(-3ab^2c^3)^4=81a^4b^8c^{12}$;

3) $\left(\frac{-3a^nb^2}{4cd^{r-1}}\right)^3=\frac{(-3a^nb^2)^3}{(4cd^{r-})^3}=\frac{-27a^{3n}b^6}{64c^3d^{3r-3}}=\frac{-27a^{3n}b^6}{64c^3d^{3r-3}}.$

ГЛАВА II.

Возвышеніе въ квадратъ многочленовъ.

158. Теорема. Квадратъ многочлена равенъ: квадрату 1-го члена + удвоенное произведеніе 1-го члена на 2-й + квадратъ 2-го члена + удвоенное произведеніе суммы первыхъ двухъ членовъ на 3-й + квадратъ 3-го члена + удвоенное произведеніе суммы первыхъ трехъ членовъ на 4-й + квадратъ 4-го члена и т. д.,

т.-е. $$(a+b+c+d+\ldots)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+$$
$$+2(a+b+c)d+d^2+\ldots$$

Док. Возвысимъ сначала въ квадратъ двучленъ $a+b$:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Теперь приложимъ къ суммѣ $a+b$ третій членъ c и возвысимъ въ квадратъ трехчленъ $a+b+c$, разсматривая его, какъ двучленъ, въ которомъ первый членъ есть $a+b$, а второй членъ c:

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2.$$

Замѣнивъ въ этомъ выраженіи $(a+b)^2$ через $a^2+2ab+b^2$, получимъ:

$$(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2.$$

Приложивъ затѣмъ четвертый членъ d и принявъ сумму $a+b+c$ за одночленъ, получимъ, подобно предыдущему:

$$(a+b+c+d)^2=[(a+b+c)+d]^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2=$$
$$=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2.$$

Продолжая такимъ образомъ прикладывать по одному члену, замѣтимъ, что, съ каждымъ прибавленіемъ одного новаго члена, въ квадратѣ многочлена прибавляются два члена: 1) удвоенное произведеніе суммы всѣхъ прежнихъ членовъ на новый членъ и 2) квадратъ этого новаго члена; значитъ, доказываемая теорема примѣнима къ многочленамъ съ какимъ угодно числомъ членовъ.

159. Другое выраженіе для квадрата многочлена. Раскрывъ скобки въ правой части выведеннаго нами равенства и измѣнивъ порядокъ членовъ, получимъ:

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd,$$

что можно высказать такъ: квадратъ многочлена равенъ суммѣ квадратовъ всѣхъ его членовъ, сложенной съ удвоенными произведеніями: перваго члена на второй, перваго члена на третій, перваго члена на четвертый и т. д.; затѣмъ второго члена на третій, второго члена на четвертый и т. д.; затѣмъ третьяго члена на четвертый и т. д. Короче сказать:

квадратъ многочлена равенъ алгебраической суммѣ квадратовъ всѣхъ его членовъ и всевозможныхъ удвоенныхъ произведеній, которыя можно составить, умножая каждый членъ многочлена на каждый членъ изъ тѣхъ, которые слѣдуютъ за нимъ.

160. Замѣчаніе о знакахъ. Многочленъ $a+b+c...$ представляетъ собою алгебраическую сумму, т.-е. члены его могутъ быть числами положительными, отрицательными и нулемъ. Полезно замѣтить, что послѣ возвышенія многочлена въ квадратъ со знакомъ $+$ окажутся, во-1-хъ, квадраты всѣхъ членовъ, и, во-2-хъ, тѣ удвоенныя произведенія, которыя произошли отъ умноженія членовъ съ одинаковыми знаками; со знакомъ же — окажутся тѣ удвоенныя произведенія, которыя произошли отъ умноженія членовъ съ разными знаками. Напримѣръ:

$$(3x^2-2x+1)^2=(3x^2)^2+(2x)^2+1^2-2(3x^2)(2x)+2(3x^2).1-2(2x)1=$$
$$=9x^4+4x^2+1-12x^3+6x^2-4x=9x^4-12x^3+10x^2-4x+1.$$

ГЛАВА III.

Основныя свойства извлеченія корня.

161 Опредѣленія. Корнемъ n-ой степени изъ числа a наз. такое число, n-ая степень котораго равна a.

Такъ, корень 2-й степени изъ $+49$ есть $+7$, а также и -7, потому что $(+7)^2=+49$ и $(-7)^2=+49$; корень 3-й степени изъ -125 есть -5, потому что $(-5)^3=-125$; корень n-й степени изъ числа 0 есть 0, потому что $0=0$.

Замѣтимъ, что вмѣсто «корень n-ой степени» говорятъ иногда короче: «n-ый» корень».

Число n, означающее, какой степени извлекается корень, наз. показателемъ корня; число это мы будемъ всегда предполагать цѣлымъ и положительнымъ.

Корень обозначается знакомъ $\sqrt{\ }$ (знакъ радикала) *); подъ горизонтальной чертой его пишутъ число, изъ котораго корень отыскивается, а надъ отверстіемъ угла ставятъ показателя корня; такъ, выраженіе $\sqrt[3]{27}$ означаетъ корень третьей степени изъ 27. Показателя корня второй степени принято опускать; напр., $\sqrt{16}$ замѣняетъ обозначеніе $\sqrt[2]{16}$.

Корень второй степени наз. иначе квадратнымъ, а корень третьей степени — кубичнымъ.

Число, стоящее подъ знакомъ радикала, наз. подкореннымъ числомъ.

Дѣйствіе, посредствомъ котораго отыскивается корень данной степени, наз. извлеченіемъ корня; это дѣйствіе, какъ видно изъ опредѣленія, обратно возвышенію въ степень.

Изъ опредѣленія корня слѣдуетъ:

$$(\sqrt{a})^2=a,\ \left(\sqrt[3]{a}\right)^3=a,\ \ldots\ldots \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a;$$
$$\sqrt{a^2}=a,\ \sqrt[3]{a^3}=a\ \ldots\ldots\ \sqrt[n]{a^n}=a,$$

т.-е. возвышеніе въ степень и извлеченіе корня (той же степени) суть дѣйствія, взаимно уничтожающіяся.

---

*) Знакъ $\sqrt{\ }$ произошелъ, по всей вѣроятности, изъ точки, которую въ 15 столѣтіи нѣкоторые авторы ставили передъ числомъ, изъ котораго надо извлечь корень. Въ началѣ 16-го столѣтія точку удлинили въ черту. Въ 17-мъ столѣтіи окончательно взошло въ употребленіе теперешнее обозначеніе корня.

162. Ариѳметическій корень. Условимся называть корень **ариѳметическимъ** въ томъ случаѣ, когда онъ извлекается изъ положительнаго числа и самъ представляетъ собою положительное число. Такимъ образомъ, корень изъ отрицательнаго числа (напр., корень кубичный изъ —125) мы не будемъ называть ариѳметическимъ; равнымъ образомъ мы не будемъ называть ариѳметическимъ отрицательное значеніе корня изъ положительнаго числа (напр., отрицательное значеніе квадратнаго корня изъ +49).

Такъ какъ положительныя числа мы не различаемъ отъ ариѳметическихъ, то можно также сказать, что ариѳметическій корень есть корень изъ ариѳметическаго числа, выраженный тоже ариѳметическимъ числомъ.

163. Нѣкоторыя свойства ариѳметическаго корня. Укажемъ слѣдующія 3 свойства ариѳметическаго корня:

I. Если цѣлое число N не есть *m*-ая степень никакого цѣлаго числа, то $\sqrt[m]{N}$ не можетъ быть выраженъ ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ.

Напримѣръ, число 5 не есть квадратъ никакого цѣлаго числа; тогда $\sqrt{5}$ не можетъ быть выраженъ ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ. Докажемъ это свойство въ общемъ видѣ.

Если число N не есть m-ая степень никакого цѣлаго числа, то это значитъ, что $\sqrt[m]{N}$ не равенъ никакому цѣлому числу. Докажемъ, что онъ при этомъ не можетъ равняться и никакой дроби. Предположимъ противное, т.-е. допустимъ, что существуетъ нѣкоторая дробь, m-ая степень которой равна N; пусть эта дробь, по **сокращеніи** ея, есть $\frac{a}{b}$. Тогда, согласно правилу возвышенія въ степень дроби, будемъ имѣть:

$$N=\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

Это равенство возможно только тогда, когда a^m дѣлится безъ остатка на b^m, для чего необходимо, чтобы всѣ простые множители степени b^m входили въ число простыхъ множителей сте-

пени a^m. Но простые множители степени b^m суть тѣ, которые входятъ въ составъ основанія b (только повторенные m разъ); то же самое можно сказать о степени a^m; числа же a и b не имѣютъ общихъ множителей (такъ какъ въ противномъ случаѣ, дробь $\frac{a}{b}$ могла бы сократиться). Значитъ, написанное выше равенство невозможно, и потому нельзя допустить, чтобы существовала дробь, m-ая степень которой равна числу N.

II. **Если числитель или знаменатель ариѳметической несократимой дроби $\frac{a}{b}$ не есть m-ая степень никакого цѣлаго числа, то $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ не можетъ быть выраженъ ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ.**

Например, въ несократимой дроби $^5/_9$ числитель не есть квадратъ никакого цѣлаго числа; въ такомъ случаѣ $\sqrt{\frac{5}{9}}$ не можетъ равняться ни цѣлому, ни дробному числу; въ несократимой дроби $^8/_9$ знаменатель не есть кубъ никакого цѣлаго числа; въ такомъ случаѣ $\sqrt[3]{\frac{8}{9}}$ не можетъ равняться ни цѣлому, ни дробному числу. Докажемъ это свойство въ общемъ видѣ.

Что $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ не можетъ равняться цѣлому числу, слѣдуетъ изъ того, что всякое цѣлое число, возвышенное въ m-ую степень, даетъ цѣлое число, а не дробь.

Предположимъ теперь, что этотъ корень равняется нѣкоторой дроби, которая, по сокращеніи ея, пусть будетъ $\frac{p}{q}$ Тогда:

$$\frac{a}{b}=\left(\frac{p}{q}\right)^m=\frac{p^m}{q^m}.$$

Это равенство возможно только тогда [1]), когда $a=p^m$ и $b=q^m$;

[1]) Въ курсѣ ариѳметики доказывается, что двѣ несократимыя дроби равны другъ другу только тогда, когда у нихъ равны числители и равны знаменатели (см, напр., А. Киселевъ систематическій курсъ ариѳметики, § 156, слѣдствіе).

но этого быть не можетъ согласно условію. Значитъ, нельзя допустить, чтобы разсматриваемый корень равнялся какой-нибудь дроби.

III. **Ариѳметическій корень данной степени изъ даннаго числа можетъ быть только одинъ.**

Напримѣръ, $\sqrt{\frac{4}{9}}$ равенъ $\frac{2}{3}$ и только одному этому числу; $\sqrt[3]{27}$ равенъ 3 и не можетъ равняться никакому иному числу.

Дѣйствительно, допустимъ, что $\sqrt[m]{N}$ можетъ равняться двумъ различнымъ ариѳметическимъ числамъ a и b; тогда было бы, что $a^m=N$ и $b^m=N$ и, слѣдов., $a^m=b^m$. Но это равенство невозможно, такъ какъ если, напр., $a>b$, то $aa>bb$, потому что множимое и множитель въ первомъ изъ этихъ произведеній больше соотвѣтственно множимаго и множителя во второмъ произведеніи, а съ увеличеніемъ множимаго и съ увеличеніемъ множителя произведеніе увеличивается [1]); по той же причинѣ $aaa>bbb$ и вообще $a^m>b^m$. Значитъ, если $a\neq b$, то a^m не можетъ равняться b^m, и потому нельзя допустить, чтобы $\sqrt[m]{N}$ имѣлъ 2 различныя ариѳметическія значенія.

164. Алгебраическій корень. Мы будемъ называть выраженіе $\sqrt[m]{a}$ алгебраическимъ корнемъ m-ой степени изъ числа a въ томъ случаѣ, когда не требуется непремѣнно, чтобы подкоренное число a было положительнымъ и чтобы изъ всѣхъ возможныхъ значеній самаго корня бралось только одно положительное.

Извлеченіе алгебраическаго корня, какъ мы сейчасъ увидимъ, приводится къ нахожденію ариѳметическаго корня.

165. Нѣкоторыя свойства алгебраическаго корня. Укажемъ слѣдующія 4 свойства такого корня.

I. **Корень нечетной степени изъ положительнаго числа** (если

---

[1]) Это свойство относится также и къ произведенію несоизмѣримыхъ чиселъ; поэтому положительное значеніе $\sqrt[m]{N}$ можетъ быть только одно и въ томъ случаѣ, когда оно есть число несоизмѣримое

онъ существуетъ) **есть положительное число, абсолютная величина котораго равна ариѳметическому корню той же степени изъ абсолютной величины подкоренного числа.**

Такъ, $\sqrt[3]{+8}$, если такой корень существуетъ, долженъ быть числомъ положительнымъ, такъ какъ отрицательное число, возвышенное въ нечетную степень, даетъ отрицательное число; абсолютная величина этого корня должна равняться ариѳметическому $\sqrt[3]{8}$, т.-е. числу 2, такъ какъ только при этой величинѣ послѣ возвышенія въ 3-ю степень получимъ число 8.

II. **Корень нечетной степени изъ отрицательнаго числа** (если онъ существуетъ) **есть отрицательное число, абсолютная величина котораго равна ариѳметическому корню той же степени изъ абсолютной величины подкоренного числа.**

Такъ, $\sqrt[3]{-8}$, если такой корень существуетъ, долженъ быть числомъ отрицательнымъ, такъ какъ всякое положительное число, возвышенное въ какую бы то ни было степень, даетъ положительное число, а не отрицательное; абсолютная величина этого корня должна равняться ариѳметическому $\sqrt[3]{8}$, т.-е. числу 2, такъ какъ только при этой величинѣ послѣ возвышенія въ 3-ю степень получимъ число 8.

III. **Корень четной степени изъ положительнаго числа** (если онъ существуетъ) **имѣетъ два значенія съ противоположными знаками; абсолютная величина каждаго изъ этихъ значеній равна ариѳметическому корню той же степени изъ абсолютной величины подкоренного числа.**

Такъ, $\sqrt{+4}=+2$ и $\sqrt{+4}=-2$, потому что $(+2)^2=+4$ и $(-2)^2=+4$; никакому третьему числу $\sqrt{+4}$ равняться не можетъ; точно такъ же $\sqrt[4]{+81}=+3$ и $\sqrt[4]{81+}=-3$, потому что обѣ степени $(+3)^4$ и $(-3)^4$ равны $+81$, тогда какъ никакое третье число, возвышенное въ 4-ю степень, не можетъ дать $+81$.

Двойное значеніе корня обозначается обыкновенно постановкою двухъ знаковъ $\pm$ передъ абсолютной величиной корня; такъ, пишутъ: $\sqrt[4]{+81}=\pm 3$, или проще, $\sqrt[4]{81}\pm 3$.

IV. **Корень четной степени изъ отрицательнаго числа не можетъ равняться никакому—ни положительному, ни отрицательному—числу**, потому что всякое число, какъ положительное такъ и отрицательное, возвышенное въ четную степень, даетъ положительное число, а не отрицательное. Напр., $\sqrt{-9}$ не можетъ равняться ни $+3$, ни -3 и никакому иному числу.

Корень четной степени изъ отрицательнаго числа принято называть мнимымъ числомъ; въ противоположность такимъ числамъ алгебраическія числа, которыя мы до сего времени разсматривали, называются вещественными или дѣйствительными числами.

166. Извлеченіе корня изъ произведенія, изъ степени и изъ дроби. Это извлеченіе выполняется согласно слѣдующимъ тремъ теоремамъ.

Замѣтимъ, что въ этихъ теоремахъ предполагается, что всѣ подкоренныя числа взяты такими, что изъ нихъ корень извлекается; кромѣ того, корни разумѣются ариѳметическіе.

Теорема 1. Чтобы извлечь корень изъ произведенія, достаточно извлечь его изъ каждаго сомножителя отдѣльно.

Требуется доказать, что: $\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$.

Для доказательства возвысимъ правую часть этого предполагаемаго равенства въ n-ую степень, для чего достаточно примѣнить теорему 1-ю § 155 («чтобы возвысить въ степень произведеніе, достаточно...»).

$$\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n\left(\sqrt[n]{c}\right)^n.$$

Но, согласно опредѣленію: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$, $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=b$ и $\left(\sqrt[n]{c}\right)^n=c$.

Значитъ: $$\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\right)^n=abc.$$

Если же n-ая степень произведенія $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$ равна abc, то это значитъ, что оно представляетъ собою n-ый корень изъ abc.

Примѣръ. $\sqrt[3]{512}=\sqrt[3]{8\,.\,64}=\sqrt[3]{8}\,.\,\sqrt[3]{64}=2\,.\,4=8.$

Теорема 2. Чтобы извлечь корень изъ степени, показатель которой (положительный или отрицательный) **дѣлится безъ остатка на показателя корня, достаточно раздѣлить показателя степени на показателя корня.**

Такъ, $\sqrt[3]{a^6}=a^2$, потому что $(a^2)^3=a^6$; $\sqrt{a^{-8}}=a^{-4}$, потому что $(a^{-4})^2=a^{-8}$.

Докажемъ это въ общемъ видѣ. Пусть въ выраженіи $\sqrt[n]{a^m}$ положительное или отрицательное цѣлое число m дѣлится на цѣлое число n безъ остатка; тогда, назвавъ частное отъ дѣленія m на n буквою p, можемъ положить, что $m=np$. Требуется доказать, что:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a^{np}}=a^p.$$

Для доказательства возвысимъ число a^p въ n-ую степень, для чего достаточно примѣнить теорему 2-ю § 155 («чтобы возвысить степень въ другую степень, достаточно...»):

$$(a^p)^n=a^{pn}=a^m.$$

Если же n-ая степень числа a^p равна a , то это значить, что $a^p=\sqrt[n]{a^m}$.

Примѣры. 1) $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{2^6}=2^2=4$.

2) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2^6}}=\sqrt[3]{2^{-6}}=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$.

Теорема 3. Чтобы извлечь корень изъ дроби, достаточно извлечь его изъ числителя и знаменателя отдѣльно.

Требуется доказать, что $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Для доказательства возвысимъ правую часть этого предполагаемаго равенства въ n-ю степень, для чего достаточно при-

мѣнить теорему 3-ю § 155 («чтобы возвысить въ степень дробь, достаточно...»).

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}=\frac{a}{b}.$$

Значитъ, предполагаемое равенство вѣрно.

Примѣръ. $\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}.$

167. Извлеченіе корня изъ одночленовъ.

1°. Пусть требуется извлечь корень 3-й степени изъ одночлена $8a^9b^6c^{12}$. Примѣняя теорему 1-ю, а затѣмъ 2-ю, получимъ:

$$\sqrt[3]{8a^9b^6c^{12}}=\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{a^9}\sqrt[3]{b^6}\sqrt[3]{c^{12}}=2a^3b^2c^4.$$

Правило. Чтобы извлечь корень изъ одночлена, достаточно извлечь его изъ коэффиціента и раздѣлить показателей буквъ на показателя корня, если это дѣленіе возможно нацѣло.

2°. Чтобы извлечь корень изъ дробнаго выраженія, достаточно примѣнить теорему 3-ю, т-е. извлечь корень изъ числителя и знаменателя отдѣльно; напр.:

$$\sqrt[3]{\frac{27a^6x^{3n}}{m^9n^3}}=\frac{\sqrt[3]{27a^6x^{3n}}}{\sqrt[3]{m^9n^3}}=\frac{3a^2x^n}{m^3n}.$$

168. Нѣкоторыя преобразованія радикала.

Доказанныя выше теоремы позволяютъ, между прочимъ, дѣлать слѣдующія преобразованія радикала:

1°. **Вынесеніе множителей за знакъ радикала.** Когда показатели всѣхъ или нѣкоторыхъ буквъ въ подкоренномъ выраженіи больше показателя корня, но не дѣлятся на него безъ остатка, тогда можно разложить подкоренное выраженіе на множителей и извлечь корень изъ тѣхъ множителей, изъ которыхъ это возможно.

Примѣры. 1) $\sqrt{a^3}=\sqrt{a^2a}=\sqrt{a^2}\sqrt{a}=a\sqrt{a}.$

2) $\sqrt[3]{a^4}=\sqrt[3]{a^3a}=\sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{a}=a\sqrt[3]{a}.$

3) $\sqrt[5]{x^{13}}=\sqrt[5]{x^{10}x^3}=\sqrt[5]{x^{10}}\sqrt[5]{x^3}=x^2\sqrt[5]{x^3}.$

4) $\sqrt{24a^4x^3}=\sqrt{4a^4x^2.6x}=2a^2x\sqrt{6x}.$

2°. **Подведеніе множителей подъ знакъ радикала.** Иногда бываетъ полезно, наоборотъ, подвести подъ знакъ радикала множителей, стоящихъ передъ нимъ; для этого надо возвысить ихъ въ степень, показатель которой равенъ показателю радикала, и написать множителями подъ радикаломъ.

Примѣры. 1) $a^2\sqrt{a}=\sqrt{(a^2)^2a}=\sqrt{a^4a}=\sqrt{a^5}.$

2) $3x^2y\sqrt[3]{xy}=\sqrt[3]{(3x^2y)^3xy}=\sqrt[3]{27x^7y^4}.$

3°. **Освобожденіе подкоренного выраженія отъ знаменателей.** Покажемъ, какъ можно это выполнить, на слѣдующихъ примѣрахъ:

1) $\sqrt{\frac{3}{2ax^3}}$. Сдѣлаемъ знаменателя квадратомъ. Для этого умножимъ его на 2, на a и на x, т.-е. на $2ax$. Чтобы дробь не измѣнила своей величины, умножимъ и числителя на $2ax$:

$$\sqrt{\frac{3}{2ax^3}}=\sqrt{\frac{6ax}{4a^2x^4}}=\frac{\sqrt{6ax}}{\sqrt{4a^2x^4}}=\frac{1}{2ax^2}\sqrt{6ax}.$$

2) $\sqrt{2a+\frac{1}{4x}-\frac{5}{x^2}}$. Сначала приведемъ всѣ члены многочлена къ одинаковому знаменателю:

$$\sqrt[3]{2a+\frac{1}{4x}-\frac{5}{x^2}}=\sqrt[3]{\frac{8ax^2+x-20}{4x^2}}.$$

Теперь сдѣлаемъ знаменателя кубомъ, умноживъ оба члена дроби на $2x$:

$$\sqrt[3]{\frac{(8ax^2+x-20)2x}{8x^3}}=\frac{\sqrt[3]{16ax^3+2x^2-40x}}{\sqrt[3]{8x^3}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{16ax^3+2x^2-40x}}{2x}=\frac{1}{2x}\sqrt[3]{16ax^3+2x^2-40x}.$$

ГЛАВА IV.

Извлеченіе ариѳметическаго квадратнаго корня.

1. Извлеченіе квадратнаго корня изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ данномъ цѣломъ числѣ.

169. Предварительное замѣчаніе. Если станемъ возвышать въ квадратъ числа натуральнаго ряда: 1, 2, 3, 4..., то получимъ безконечный рядъ возрастающихъ квадратовъ:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100...

Очевидно, что всякое цѣлое число, не находящееся въ этомъ ряду (напр. 40), не можетъ быть квадратомъ цѣлаго числа; въ такомъ случаѣ, какъ мы видѣли (§ 163, I), оно не можетъ быть и квадратомъ дроби. Значитъ, изъ такого числа нельзя извлечь квадратнаго корня. Но мы условимся, что если требуется извлечь квадратный корень изъ какого-нибудь цѣлаго числа, то это надо понимать въ томъ смыслѣ, что требуется извлечь квадратный корень или изъ самаго числа (если оно окажется квадратомъ цѣлаго числа), или же *изъ наибольшаго квадрата цѣлаго* числа, какой заключается въ данномъ числѣ.

170. Число цыфръ въ корнѣ. Легко опредѣлить заранѣе, сколько цыфръ въ квадратномъ корнѣ изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ данномъ числѣ, напр., въ числѣ 4082. Для этого примемъ во вниманіе слѣдующую таблицу:

$$1^2=1, \quad 10^2=100, \quad 100^2=10000, \quad 1000^2=1000000,$$
$$10000^2=100000000 \text{ и т. д.}$$

Такъ какъ $4082<10000$, то наибольшій квадратъ цѣлаго числа, заключающійся въ 4082, менѣе 10000; съ другой стороны, такъ какъ $4082>100$, то наибольшій квадратъ, заключающійся въ 4082, болѣе (или равенъ) 100. Значитъ, квадратный корень изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ 4082, долженъ быть менѣе 100 и болѣе (или равенъ) 10, т.-е. онъ долженъ состоять изъ двухъ цыфръ.

Подобными разсужденіями мы можемъ опредѣлить, если нужно, число цыфръ корня изъ всякаго даннаго числа. Ниже (§ 175) мы укажемъ болѣе простой пріемъ для этого.

171. Свойство числа десятковъ корня. Когда данное число болѣе 100, то квадратный корень изъ него болѣе (или равенъ) 10 и, слѣдов., состоитъ изъ двухъ или болѣе цыфръ. Сколько бы цыфръ въ немъ ни было, мы условимся разсматривать его, какъ суммy только десятковъ и единицъ; если, напр., корень будетъ число 358, то мы будемъ его представлять такъ: 35 десятковъ + 8 ед.

Пусть требуется извлечь кв. корень изъ какого-нибудь числа, бо́льшаго 100, напр., изъ числа 4082. Обозначимъ число десятковъ корня черезъ x (все равно, будетъ ли оно однозначное или многозначное), а число его единицъ черезъ y. Такъ какъ въ каждомъ десяткѣ содержится 10 ед., то искомый корень выразится $10x+y$. Квадратъ этой суммы долженъ быть наибольшимъ квадратомъ цѣлаго числа, заключающимся въ 4082; въ этомъ числѣ можетъ быть еще нѣкоторый избытокъ надъ наибольшимъ квадратомъ, который назовемъ остаткомъ отъ извлеченія корня; поэтому можемъ написать уравненіе:

$$4082=(10x+y)^2+\text{ост.}=100x^2+2xy10+y^2+\text{ост.}$$

Чтобы найти неизвѣстное x, опредѣлимъ, сколько сотенъ заключается въ лѣвой части уравненія и сколько ихъ въ правой части. Въ лѣвой части сотенъ заключается 40. Въ первомъ членѣ ($100x^2$) правой части сотенъ, очевидно, заключается x^2 въ суммѣ остальныхъ трехъ членовъ правой части сотни могутъ быть, но могутъ и не быть (что зависитъ отъ величины чиселъ x и y и остатка отъ извлеченія) [1]); значитъ, въ правой части уравненія всѣхъ сотенъ будетъ или x^2, или больше x^2. Такъ какъ число сотенъ въ лѣвой части уравненія должно равняться числу сотенъ въ правой, то

$$40\geqslant x^2 \text{ и, слѣд.: } x^2\leqslant 40.$$

---

[1]) Если, напр., допустимъ, что $x=6$, $y=8$, то уже одинъ членъ $2xy.10$ равный тогда числу 960, будетъ содержать въ себѣ 9 сотенъ; если же примемъ, что $x=1$, $y=2$, то тогда въ суммѣ двухъ членовъ $2xy.10-$ равной 44, не будетъ содержаться ни одной сотни.

Изъ этого слѣдуетъ, что x^2 есть такой квадратъ (цѣлаго числа), который содержится въ 40; но такихъ квадратовъ есть нѣсколько, а именно. 36, 25, 16 и т. д. Докажемъ, что за x^2 надо принять наибольшій изъ этихъ квадратовъ, т.-е. 36. Дѣйствительно, если бы мы взяли за x^2, положимъ, 25, то искомый корень содержалъ бы въ себѣ 5 десятковъ съ нѣсколькими единицами; но число, состоящее изъ 5 десятковъ съ нѣсколькими единицами (хотя бы этихъ единицъ было и 9), меньше 6 десятковъ ($59<60$); между тѣмъ квадратъ 6 десятковъ составляетъ только 36 сотенъ ($60^2=3600$), что меньше 4082, а такъ какъ мы ищемъ квадратный корень изъ наибольшаго квадрата цѣлаго числа, какой только заключается въ 4082, то не можемъ взять для корня 5 десятковъ съ единицами, когда и 6 десятковъ оказывается не много. Если же за x^2 надо взять число 36, то $x=\sqrt{36}=6$. Такимъ образомъ: **число десятковъ искомаго корня (будетъ ли оно однозначное или многозначное) равно квадратному корню изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ числѣ сотенъ даннаго числа.**

Когда данное число, какъ взятое нами, менѣе 10000, тогда число сотенъ въ немъ менѣе 100; въ этомъ случаѣ десятки корня прямо находятся по таблицѣ умноженія.

172. Свойство числа единицъ корня. Положимъ, что мы нашли десятки корня; тогда мы можемъ вычислить квадратъ десятковъ, т.-е. членъ $100x^2$; для нашего примѣра $x=6$ и потому $100x^2$ составитъ 3600. Вычтемъ это число изъ 4082:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r}4082\\36\end{array}\\ \hline 482\end{array}$$

для этого достаточно изъ 40 сотенъ вычесть 36 сотенъ и къ остатку снести цыфры 8 и 2. Получившееся число 482 назовемъ первымъ остаткомъ. Въ немъ заключаются: удвоенное произведеніе десятковъ корня на его единицы, квадратъ единицъ и остатокъ отъ извлеченія, если онъ есть, т.-е.

$$482=2xy10+y^2+\text{ост.}$$

Чтобы найти y, опредѣлимъ, сколько десятковъ заключается въ каждой части этого уравненія. Въ лѣвой части ихъ 48, а въ

правой $2xy$ или больше (если въ суммѣ y^2+ост. окажутся десятки) [1]) поэтому:

$$48 \geqslant 2xy; \text{ слѣд., } 2xy \leqslant 48 \text{ и поэтому } y \leqslant \frac{48}{2x}.$$

Это свойство числа единицъ корня мы можемъ высказать такъ: **число единицъ корня или равно цѣлому частному отъ дѣленія числа десятковъ перваго остатка на удвоенное число десятковъ корня, или меньше этого частнаго.**

Пользуясь этимъ свойствомъ, мы можемъ найти единицы корня, если его десятки уже найдены. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ, подставивъ на мѣсто x найденное прежде число 6, найдемъ, что $y \leqslant 4$. Отсюда слѣдуетъ, что y равенъ или 4, или 3, или 2, или 1, или 0. Здѣсь мы не можемъ утверждать заранѣе, что y равняется наибольшему изъ этихъ чиселъ; это иногда бываетъ, а иногда и нѣтъ. Чтобы узнать окончательно, какому изъ этихъ чиселъ равняется y, станемъ испытывать эти цыфры, начиная съ бо́льшей, т.-е. съ 4. Для этого вычислимъ сумму $2xy10+y^2$ и сравнимъ полученное число съ 482; если эта сумма дастъ число, бо́льшее 482, то испытуемая цыфра не годится; тогда подвергнемъ испытанію слѣдующую меньшую цыфру.

Вычислить сумму $2xy10+y^2$ всего проще можно такъ:
$2xy10+y^2=(2x \cdot 10+y)y=(2 \cdot 6 \cdot 10+4)4=(120+4)4=124 \cdot 4=496$, т.-е., **чтобы получить сумму удвоеннаго произведенія десятковъ на единицы и квадрата единицъ, слѣдуетъ къ удвоенному числу десятковъ** (къ 12) **приписать справа цыфру единицъ** (4) **и на эту же цыфру умножить получившееся число.**

Такъ какъ $496 > 482$, то цыфра 4 не годится; надо испытать цыфру 3 подобнымъ же способомъ: $123 \cdot 3=369$.

Такъ какъ $369 < 482$, то цыфра 3 годится. Искомый корень есть 63.

Вычтя 369 изъ 482, получимъ окончательный остатокъ отъ извлеченія корня: $482-369=113$, такъ что можемъ написать:

$$4082=63^2+113.$$

---

[1]) что, напр., будетъ при $y > 3$.

173. Извлеченіе квадратнаго корня, состоящаго изъ одной или изъ двухъ цыфръ. Если данное число меньше 100, то квадратный корень изъ него выражается одною цыфрою, и тогда его легко найти по таблицѣ умноженія.

Если же данное число, напр., 4082, болѣе 100, но менѣе 10000, то квадратный корень изъ него выражается 2 цыфрами. Согласно сказанному въ предыдущихъ параграфахъ, цыфры эти всего удобнѣе находить слѣдующимъ образомъ:

$\sqrt{40'82}=63$
36
123 | 48'2
3 | 36 9
11 3

Отдѣливъ въ подкоренномъ числѣ сотни, извлекаютъ квадр. корень изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ числѣ ихъ; найденное число (6) пишутъ въ корнѣ на мѣстѣ десятковъ. Вычитаютъ квадратъ десятковъ корня (36) изъ сотенъ даннаго числа и къ остатку отъ сотенъ сносятъ двѣ остальныя цыфры. Налѣво отъ остатка проводятъ вертикальную черту, за которую пишутъ удвоенное число десятковъ корня (12). Отдѣливъ въ остаткѣ десятки, дѣлятъ число ихъ (48) на удвоенное число десятковъ корня (на 12), т.-е. на число, поставленное раньше налѣво отъ вертикальной черты. Цѣлое число, получившееся отъ этого дѣленія (число 4), подвергаютъ испытанію. Для этого приписываютъ его справа къ удвоенному числу десятковъ (за вертикальной чертой) и на него же умножаютъ получившееся отъ этого число (124 умножаютъ на 4). Если произведеніе окажется больше остатка (какъ въ нашемъ примѣрѣ), то испытуемая цыфра не годится; тогда подвергаютъ испытанію слѣдующую меньшую цыфру (123 умножаютъ на 3). Получивъ произведеніе, не бо́льшее остатка, подписываютъ его подъ остаткомъ и вычитаютъ, а испытуемую цыфру пишутъ въ корнѣ на мѣстѣ единицъ.

174. Извлеченіе квадратнаго корня, состоящаго изъ трехъ или болѣе цыфръ. Пусть требуется извлечь квадратный корень изъ какого-нибудь числа, бо́льшаго 10000, напр., изъ 35782. Квадратный корень изъ такого числа болѣе (или равенъ) 100 и потому состоитъ изъ трехъ или болѣе цыфръ. Изъ сколькихъ бы цыфръ онъ ни состоялъ, будемъ

его разсматривать, какъ состоящій только изъ двухъ частей: изъ десятковъ и изъ единицъ, и воспользуемся доказанными выше свойствами числа десятковъ корня и числа его единицъ. Число десятковъ корня, какъ мы видѣли (§ 171), равно квадратному корню изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ числѣ сотенъ, т.-е. въ 357; значитъ, прежде всего надо извлечь квадратный корень изъ этого числа.

Такъ какъ число 357 имѣетъ только три цыфры, то этотъ корень найдется по предыдущему.

$$\sqrt{3'57}=18$$

```
    1
 28|25'7
  8|22 4
    3 3
```

Значитъ, въ искомомъ корнѣ изъ 35782 заключается 18 десятковъ. Чтобы найти единицы его, надо, согласно доказанному прежде (§ 172), предварительно изъ 35782 вычесть квадратъ 18 десятковъ, для чего достаточно изъ 357 вычесть квадратъ 18 и къ остатку снести цыфры 8 и 2. Остатокъ отъ вычитанія квадрата 18 изъ 357 у насъ уже есть: это 33. Значитъ, для полученія остатка отъ вычитанія квадрата 18 десятковъ изъ 35782, достаточно къ 33 приписать справа цыфры 8 и 2. Дѣйствіе мы можемъ продолжать тамъ же, гдѣ находили $\sqrt{357}$:

$$\sqrt{3'57'82}=189$$

```
    1
 28|25'7
  8|22 4
369|338'2
  9|332 1
      6 1.
```

Отдѣливъ десятки въ остаткѣ 3382, дѣлимъ, согласно доказанному, число ихъ (338) на удвоенное число десятковъ корня (на 36); цыфру (9), полученную отъ дѣленія, подвергаемъ испытанію, для чего ее приписываемъ справа къ удвоенному числу десятковъ корня (къ 36) и на нее умножаемъ получившееся число (369 на 9). Такъ какъ произведеніе оказалось меньше второго остатка, то цыфра 9 годится; ее пишемъ въ корнѣ на мѣстѣ единицъ.

Вообще, чтобы извлечь квадратный корень изъ какого угодно числа, надо сначала извлечь квадр. корень изъ числа его сотенъ; если это число болѣе 100, то придется искать квадр. корень изъ числа сотенъ этихъ сотенъ, т.-е. изъ десятковъ тысячъ даннаго числа; если и это число болѣе 100, придется извлекать квадр. корень изъ числа сотенъ десятковъ тысячъ, т.-е. изъ милліоновъ даннаго числа и т. п.

Правило. *Чтобы извлечь квадратный ко-
ень изъ даннаго числа, разбиваютъ его,
тъ правой руки къ лѣвой, на грани по
цыфры въ каждой, кромѣ послѣдней, въ
оторой можетъ быть и одна цыфра. Чтобы
айти первую цифру корня, извлекаютъ
вадратный корень изъ первой грани.
Iтобы найти вторую цыфру, вычитаютъ
зъ первой грани квадратъ первой цыфры
орня, къ остатку сносятъ вторую грань
число десятковъ получившагося числа
ѣлятъ на удвоенную первую цыфру корня;
олученное цѣлое число подвергаютъ
спытанію. Слѣдующія цыфры корня нахо-
ятся по тому же пріему.*

*Если послѣ снесенія грани число де-
ятковъ получившагося числа окажется
еньше дѣлителя, т.-е. меньше удвоенной
айденной части корня, то въ корнѣ ста-
ятъ 0 и сносятъ слѣдующую грань.*

Вотъ примѣры извлеченія квадратнаго корня изъ чиселъ,
остоящихъ изъ многихъ граней:

```
√3'50'34'87'59=18717    √9'51'10'56=3084    √8'72'00'00=2952
 1 . . . .                9 . . .              4 . . .
28|25'0. . . .          608|511'0. .         49|47'2 . .
 8|22 4. . . .            8|486 4. .          9|44 1 . .
367|263'4. . .          6164|2465'6         585|310'0. .
  7|256 9. . .             4|2465 6           5|292 5. .
 3741|658'7. .                0            5902|1750'0
    1|374 1. .                                 |1180 4
37427|28465'9                                   569 6
    7|26198 9
      2267 0
```

175. Число цыфръ въ корнѣ. Изъ процесса нахо-
жденія цыфръ корня можно заключить, что **въ квадратномъ**

корнѣ столько цыфръ, сколько въ подкоренномъ числѣ заключается граней по 2 цыфры каждая, кромѣ одной, которая можетъ имѣть и 2, и 1 цыфру; другими словами: если въ подкоренномъ числѣ четное число цыфръ, то въ корнѣ вдвое меньше цыфръ; если же въ подкоренномъ числѣ нечетное число цыфръ, то въ корнѣ цыфръ вдвое меньше этого числа, увеличеннаго на 1. Напримѣръ, квадратный корень изъ 6-значнаго числа содержитъ 3 цыфры, квадратный корень изъ 7-значнаго числа содержитъ 4 цыфры.

176. Какъ узнать, не мала ли цыфра, взятая въ корнѣ. Можетъ случиться, что, находя какую-нибудь цыфру корня, мы по ошибкѣ взяли цыфру, меньшую, чѣмъ слѣдовало бы. Существуетъ признакъ, по которому это легко обнаружить.

Если въ корнѣ взята цыфра, меньшая, чѣмъ слѣдуетъ, то остатокъ окажется больше удвоеннаго корня плюсъ единица или равенъ этому числу. Пусть, напр., мы взяли въ корнѣ число a, когда слѣдовало бы взять больше, положимъ, $a+1$. Въ такомъ случаѣ подкоренное число больше или равно $(a+1)^2$, и потому избытокъ его надъ a^2, т.-е остатокъ отъ извлеченія, долженъ быть больше или равенъ разности $(a+1)^2-a^2$, которая равна $2a+1$.

Обратно, если остатокъ отъ извлеченія больше удвоеннаго корня плюсъ единица или равенъ этому числу, то въ корнѣ взято меньше, чѣмъ слѣдуетъ. Дѣйствительно, если остатокъ больше или равенъ $2a+1$, то подкоренное число больше или равно $a^2+(2a+1)$, т.-е. оно больше или равно $(a+1)^2$, и потому квадратный корень изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключеннаго въ данномъ числѣ, будетъ не a, а по крайней мѣрѣ $a+1$.

Примѣры:

1) $\sqrt{23'45}=47$

```
  16
87|74'5
 7|609
  |136
```

Остатокъ 136 больше $2.47+1$; значитъ, взятая для испытанія цыфра 7 мала.

2) $\sqrt{23'45}=48$

```
  16
88|74'5
8 |704
  |41
```

Остатокъ 41 меньше $2.48+1$; значитъ, взятая для испытанія цыфра 8 не мала.

2. Извлеченіе приближенныхъ квадратныхъ корней.

177. Точные квадраты. Числа, изъ которыхъ квадратный корень можетъ быть выраженъ цѣлымъ или дробнымъ числомъ, наз. точными квадратами. Есть очень много чиселъ, какъ цѣлыхъ, такъ и дробныхъ, которыя не могутъ быть названы точными квадратами. Это, какъ слѣдуетъ изъ свойствъ ариѳметическаго корня (§ 163), во-1-хъ, всѣ тѣ цѣлыя числа, которыя не представляютъ собою квадратовъ цѣлыхъ чиселъ; и, во-2-хъ, всѣ тѣ дроби, у которыхъ или числитель, или знаменатель, или оба эти члена не представляютъ собою квадратовъ цѣлыхъ чиселъ.

Изъ такихъ чиселъ (ихъ называютъ иногда неточными квадратами) можно извлекать только приближенные квадратные корни, опредѣляемые слѣдующимъ образомъ.

178. Опредѣленія. 1) Приближеннымъ квадратнымъ корнемъ изъ даннаго (цѣлаго или дробнаго) числа съ точностью до 1 наз. каждое изъ двухъ такихъ цѣлыхъ чиселъ, которыя различаются одно отъ другого на 1 и между квадратами которыхъ заключается данное число; меньшее изъ этихъ чиселъ наз. приближеннымъ корнемъ съ недостаткомъ, а бо́льшее—приближеннымъ корнемъ съ избыткомъ.

Напр., приближенный квадратный корень изъ $56\frac{1}{2}$ съ точностью до 1 съ недостаткомъ есть 7, а съ избыткомъ 8, потому что эти цѣлыя числа различаются на 1 и между квадратами ихъ заключается $56\frac{1}{2}$, такъ какъ $7^2=49$, а $8^2=64$ и, слѣдов.:

$$7^2<56\frac{1}{2}<8^2.$$

Вообще, если x есть приближенный квадратный корень изъ числа A съ точностью до 1 и взятый съ недостаткомъ, то $x+1$ будетъ приближенный квадратный корень изъ этого числа съ точностью до 1, но взятый съ избыткомъ, такъ что

$$x^2<A<(x+1)^2.$$

Можно также сказать, что приближенный квадратный корень изъ даннаго числа съ точностью до 1, взятый съ недостаткомъ, представляетъ собою наибольшее цѣлое число, квадратъ котораго не превосходитъ даннаго числа.

2) Приближеннымъ квадратнымъ корнемъ изъ даннаго (цѣлаго или дробнаго) числа съ точностью до $\frac{1}{n}$ наз. каждая изъ двухъ такихъ дробей съ знаменателемъ n, которыя различаются одна отъ другой на $\frac{1}{n}$ и между квадратами которыхъ заключается данное число; меньшая изъ этихъ дробей наз. приближеннымъ корнемъ съ недостаткомъ, а бо́льшая—приближеннымъ корнемъ съ избыткомъ.

Напр., приближенный квадратный корень изъ 27,5 съ точностью до $\frac{1}{10}$ съ недостаткомъ есть 5,2, а съ избыткомъ 5,3, потому что эти дроби, имѣя знаменателя 10, различаются на $\frac{1}{10}$, и между квадратами ихъ заключается 27,5, такъ какъ $5{,}2^2=27{,}04$ и $5{,}3^2=28{,}09$ и, слѣд.:

$$5{,}2^2<27{,}5<5{,}3^2.$$

Вообще, если $\frac{x}{n}$ есть прибл. квадр. корень изъ числа A съ точностью до $\frac{1}{n}$ и взятый съ недостаткомъ, то $\frac{x+1}{n}$ будетъ прибл. квадр. корень изъ этого числа съ точностью до 1, но взятый съ избыткомъ, такъ что

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2<A<\left(\frac{x+1}{n}\right)^2.$$

Можно также сказать, что прибл. квадр. корень изъ даннаго числа съ точностью до $\frac{1}{n}$, взятый съ недостаткомъ, представляетъ собою наибольшее кратное дроби $\frac{1}{n}$, квад-

ратъ котораго не превосходитъ даннаго числа.

179. Правило 1. Чтобы найти изъ даннаго числа приближенный квадратный корень съ недостаткомъ съ точностью до 1, извлекаютъ квадратный корень изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ цѣлой части даннаго числа.

Дѣйствительно, пусть, напр., требуется найти приближенный квадратный корень съ точностью до 1 изъ $150\frac{3}{7}$. Для этого извлечемъ квадр. корень изъ наиб. цѣлаго квадрата, заключающагося въ 150; это будетъ 12. Значитъ, $12^2 < 150 < 13^2$. Разъяснимъ, что это двойное неравенство не нарушится, если къ числу 150 мы добавимъ правильную дробь $\frac{3}{7}$. Дѣйствительно, если $12^2 < 150$, то и подавно $12^2 < 150\frac{3}{7}$. Съ другой стороны, такъ какъ 150 и 13^2 числа цѣлыя и $150 < 13^2$, то, значитъ, 150 менѣе 13^2 на нѣкоторое цѣлое число, по меньшей мѣрѣ, на одну цѣлую единицу; слѣд., если прибавимъ къ 150 дробь $\frac{3}{7}$, которая меньше единицы, то число $150\frac{3}{7}$ останется все-таки меньшимъ, чѣмъ 13^2. Итакъ, $12^2 < 150\frac{3}{7} < 13^2$. Отсюда слѣдуетъ, что каждое изъ чиселъ 12 и 13 есть приближенный квадратный корень изъ $150\frac{3}{7}$ съ точностью до 1, при чемъ 12 есть приближенный корень съ недостаткомъ, а 13—приближенный корень съ избыткомъ.

Примѣры.

1) $\sqrt{5}=2$ или 3; 2) $\sqrt{5{,}375}=2$ или 3;

3) $\sqrt{\frac{487}{13}}=\sqrt{37\frac{6}{13}}=6$ или 7; 4) $\sqrt{\frac{5}{6}}=0$ или 1.

Правило 2. Чтобы найти изъ даннаго числа приближенный квадратный корень съ недостаткомъ съ точностью до $\frac{1}{n}$, умножаютъ данное число на n^2, изъ полученнаго произведенія извлекаютъ квадратный корень съ недостаткомъ съ точностью до 1 и дѣлятъ его на n.

Дѣйствительно, пусть искомые приближенные корни изъ дан-

наго числа A съ точностью до $\frac{1}{n}$ будутъ дроби $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$. Тогда:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2 < A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2, \text{ или } \frac{x^2}{n^2} < A < \frac{(x+1)^2}{n^2}.$$

Умноживъ всѣ члены неравенства на одно и то же число n^2, мы, очевидно, не измѣнимъ его смысла, т.-е. меньшее останется меньшимъ; значитъ:

$$x^2 < An^2 < (x+1)^2.$$

Изъ этого двойнаго неравенства видно, что числа x и $x+1$ представляютъ собою приближенные квадр корни съ точностью до 1 изъ произведенія An^2. Найдя эти корни такъ, какъ было показано раньше, мы получимъ числителей дробей $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, а раздѣливъ числителей на n, найдемъ и самыя дроби.

Примѣры.

1) Найти $\sqrt{72}$ съ точностью до $\frac{1}{7}$:

$$72 \cdot 7^2 = 72 \cdot 49 = 3528;$$

$$\sqrt{3528} = 59 \text{ (до 1)}; \sqrt{72} = \frac{59}{7} \text{ (до } \frac{1}{7}).$$

2) Найти $\sqrt{2}$ до тысячныхъ долей:

$2 \cdot 1000^2 = 2000000$; $\sqrt{2000000} = 1414$ (до 1); $\sqrt{2} = 1,414$ (до $\frac{1}{1000}$).

3) Найти $\sqrt{\frac{3}{7}}$ съ приближеніемъ до $\frac{1}{1000}$:

$\frac{3}{7} \cdot 1000^2 = \frac{3000000}{7} = 428571\frac{3}{7}$; $\sqrt{428571} = 654$; $\sqrt{\frac{3}{7}} = 0,654$ (до $\frac{1}{1000}$).

4) Найти $\sqrt{0,3}$ до $\frac{1}{100}$:

$0,3 \cdot 100^2 = 3000$; $\sqrt{3000} = 54$, $\sqrt{0,3} = 0,54$ (до $\frac{1}{100}$).

5) Найти $\sqrt{0,38472}$ до $\frac{1}{10}$:

$0,38472 \cdot 10^2 = 38,472$; $\sqrt{38} = 6$; $\sqrt{0,38472} = 0,6$ (до $\frac{1}{10}$).

6) Найти $\sqrt{465}$ съ какимъ-нибудь десятичнымъ приближеніемъ:

$\sqrt{4'65}=21,56$

	4
41	65
1	41
425	240'0
5	2125
4306	27500
6	25836
	1664

Спачала извлекаемъ корень съ точностью до 1; получаемъ 21. Чтобы найти цыфру десятыхъ (иначе сказать, чтобы найти приближенный корень до $\frac{1}{10}$), надо было бы умножить 465 на 10^2, т.-е. приписать къ 465 два нуля. Очевидно, это все равно, что приписать къ о с т а т к у два нуля. Найдя цыфру десятыхъ, можемъ снова приписать къ остатку 2 нуля и искать цыфру сотыхъ, и т. д.

Извлеченіе квадратныхъ корней изъ дробей.

180. Точный квадратный корень изъ несократимой дроби можно извлечь лишь въ томъ случаѣ, когда оба члена дроби суть точные квадраты (§ 163, II). Въ этомъ случаѣ достаточно извлечь корень изъ числителя и знаменателя отдѣльно; напримѣръ:

$$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}.$$

Приближенные квадратные корни изъ дробей находятся обыкновенно такъ, какъ указано въ предыдущемъ параграфѣ (см. примѣры 3, 4 и 5). Впрочемъ, можно поступать и иначе. Объяснимъ это на слѣдующихъ 2-хъ примѣрахъ:

1) Н а й т и п р и б л и ж е н н о е з н а ч е н і е $\sqrt{\frac{5}{24}}$.

Сдѣлаемъ знаменателя точнымъ квадратомъ. Для этого достаточно было бы умножить оба члена дроби на знаменателя; но въ этомъ примѣрѣ можно поступить проще. Разложимъ знаменателя на простыхъ множителей: $24=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Изъ этого разложенія видно, что если 24 умножить на 2 и еще на 3, то тогда въ произведеніи каждый простой множитель будетъ повторяться ч е т н о е число разъ, и, слѣдов., знаменатель сдѣлается квадратомъ; поэтому

$$\sqrt{\frac{5}{24}}=\sqrt{\frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}}=\sqrt{\frac{5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot}{2^4 \cdot 3^2}}=\frac{\sqrt{30}}{2^2 \cdot 3}=\frac{\sqrt{30}}{12}.$$

Остается вычислить $\sqrt{30}$ съ какою-нибудь точностью и результатъ раздѣлить на 12. При этомъ надо имѣть въ виду, что отъ дѣленія на 12 уменьшится и дробь $\frac{1}{n}$, показывающая степень точности. Такъ, если найдемъ $\sqrt{30}$ съ точностью до $\frac{1}{10}$, то получимъ 5,4 (съ нед.) и 5,5 (съ избыткомъ). Раздѣливъ эти числа на 12, найдемъ $\frac{54}{120}$ (съ нед.) и $\frac{55}{120}$ (съ избыткомъ). Это будутъ приближенные квадр. корни изъ дроби $\frac{5}{24}$ съ точностью до $\frac{1}{120}$.

2) Найти приближенное значеніе $\sqrt{0,378}$.

$$\sqrt{0,378}=\sqrt{\frac{378}{1000}}=\sqrt{\frac{3780}{10000}}=\frac{\sqrt{3\,80}}{100}=\frac{61}{100} \text{ или } \frac{62}{100} \left(\text{до } \frac{1}{100}.\right)$$

4. Извлеченіе квадратнаго корня изъ многочлена.

181. Объясненіе. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ квадратный корень изъ многочлена можетъ быть выраженъ въ видѣ многочлена (въ видѣ одночлена онъ не можетъ быть выраженъ, такъ какъ одночленъ въ квадратѣ даетъ одночленъ, а не многочленъ). Покажемъ это на слѣдующемъ примѣрѣ:

$$\sqrt{16a^4b^2-24a^3b^3+13a^2b^4-3ab^5+\tfrac{1}{4}b^6}.$$

Мы расположили данный многочленъ по убывающимъ степенямъ буквы a, такъ что высшій членъ въ немъ есть первый, а низшій—послѣдній.

Предположимъ, что существуетъ многочленъ, квадратъ котораго равенъ данному многочлену. Пусть этотъ многочленъ тоже расположенъ по убывающимъ степенямъ буквы a, такъ что высшій членъ въ немъ первый.

Мы знаемъ, что квадратъ многочлена=квадрату 1-го члена + удвоенное произведеніе 1-го чл. на 2-й+квадратъ 2-го члена + удвоенное произведеніе суммы первыхъ двухъ членовъ на 3-й+квадратъ 3-го члена, и т. д. Если возвышаемый многочленъ расположенъ по убывающимъ степенямъ главной буквы, то очевидно, что высшій членъ въ квадратѣ этого многочлена есть квадратъ перваго его члена. Въ подкоренномъ многочленѣ высшій членъ есть $16a^4b^2$; значитъ, это и есть квадратъ 1 го

члена искомаго многочлена; поэтому 1-й членъ корня $=\sqrt{16a^4b^2}=$ $=\pm 4a^2b$.

Такимъ образомъ, **чтобы найти первый членъ корня, достаточно извлечь квадратный корень изъ перваго члена подкоренного многочлена** (предварительно расположеннаго). Изъ найденныхъ двухъ значеній перваго члена возьмемъ пока одно: $+4a^2b$, а впослѣдствіи примемъ во вниманіе и другое.

$$\sqrt{16a^4b^2-24a^3b^3+13a^2b^4-3ab^5+\tfrac{1}{4}b^6}=4a^2b-3ab^2+\tfrac{1}{2}b^3.$$

$$\begin{array}{r|l}
 & -16a^4b^2 \\
\hline
8a^2b-3ab^2 & \text{»}\ -24a^3b^3+13a^2b^4 \quad \ldots\ldots\ldots \text{ первый остатокъ} \\
-3ab^2 & \text{»}\ +24a^3b^3-\ 9a^2b^4 \\
\hline
8a^2b-6ab^2+\tfrac{1}{2}b^3 & \text{»}\ +\ 4a^2b^4-3ab^5+\tfrac{1}{4}b^6 \quad \ldots\ldots \text{ второй остатокъ} \\
\tfrac{1}{2}b^3 & \text{»}\ -\ 4a^2b^4+3ab^5-\tfrac{1}{4}b^6 \\
\hline
 & \qquad 0.
\end{array}$$

Найдя первый членъ корня ($4a^2b$), возвысимъ его въ квадратъ и вычтемъ изъ подкоренного многочлена. Въ остаткѣ (первомъ) должны получиться всѣ члены многочлена, кромѣ перваго. Мы написали только 2 члена остатка, потому что остальные пока не нужны. Въ этомъ первомъ остаткѣ должны содержаться: удвоенное произведеніе 1-го члена на 2-й + квадратъ второго члена + удвоенное произведеніе суммы первыхъ двухъ членовъ на 3-й + квадратъ 3-го и т. д. Изъ всѣхъ этихъ членовъ высшимъ будетъ удвоенное произведеніе 1-го члена на 2-й, а въ остаткѣ высшій членъ есть $-24a^3b^3$; слѣд., $-24a^3b^3$ и есть удвоенное произведеніе 1-го члена на 2-й. А потому, **чтобы найти 2-й членъ корня, достаточно раздѣлить первый членъ перваго остатка на удвоенный первый членъ корня.**

Для этого налѣво отъ остатка (или направо отъ него) проводимъ вертикальную черту, за нею пишемъ удвоенный первый членъ корня ($8a^2b$). Раздѣливъ -24^3b^3 на $8a^2b$, получаемъ одночленъ $-3ab^2$, который и записываемъ въ корнѣ на мѣстѣ второго члена, и вмѣстѣ съ тѣмъ приписываемъ его за вертикальной чертой къ удвоенному первому члену (получаемъ за чертой $8a^2b-3ab^2$). Это дѣлается для того, чтобы, умноживъ $8a^2b-3ab^2$ на $-3ab^2$, заразъ получить: удвоенное произведеніе 1-го члена

на 2-й и квадратъ 2-го члена. Умноживъ на самомъ дѣлѣ $8a^2b-3ab^2$ на $-3ab^2$, пишемъ произведеніе подъ остаткомъ и изъ него вычитаемъ (для чего перемѣняемъ знаки у вычитаемаго многочлена на обратные); получаемъ второй остатокъ: $+4a^2b^4-3ab^5+\frac{1}{4}b^6$.

Во второмъ остаткѣ должны содержаться: удвоенное произведеніе суммы первыхъ двухъ членовъ корня на 3-й чл. + квадратъ 3-го члена, и т. д.; другими словами: удвоенное произведеніе 1-го чл. на 3-й + удвоенное произведеніе 2-го члена на 3-й + квадратъ 3-го чл., и т. д. Изо всѣхъ этихъ членовъ высшій есть удвоенное произведеніе 1-го члена на 3-й; а въ остаткѣ высшій членъ есть $+4a^2b^4$. Значитъ, $4a^2b^4$ и есть удвоенное произведеніе 1-го члена корня на 3-й его членъ. Поэтому, **чтобы найти 3-й членъ корня, достаточно раздѣлить первый членъ второго остатка на удвоенный 1-й членъ корня.**

Пишемъ $8a^2b$ за вертикальною чертою и дѣлимъ на это выраженіе $4a^2b^4$; получаемъ $+\frac{1}{2}b^3$; пишемъ этотъ результатъ въ корнѣ на мѣстѣ 3-го члена. Теперь намъ нужно составить удвоенное произведеніе 1-го члена на 3-й + удвоенное произведеніе 2-го члена на 3-й + квадратъ 3-го члена и полученную сумму вычесть изъ второго остатка. Чтобы удобнѣе найти эту сумму, къ удвоенному 1-му члену приписываемъ (за вертикальной чертой) удвоенный 2-й членъ и еще 3-й членъ корня (получаемъ $8a^2b-6ab^2+\frac{1}{2}b^3$) и образовавшійся отъ этого многочленъ умножаемъ на 3-й членъ, т.-е. на $\frac{1}{2}b^3$; полученное произведеніе подписываемъ подъ остатокъ и изъ него вычитаемъ (для чего перемѣняемъ знаки у вычитаемаго многочлена).

Въ нашемъ примѣрѣ 3-й остатокъ оказался 0; если бы получился остатокъ, не равный 0, то мы продолжали бы дѣйствіе далѣе, разсуждая такъ, какъ и раньше.

Для перваго члена искомаго корня мы взяли лишь одно значеніе $\sqrt{16a^4b^2}$, именно $+4a^2b$; но мы могли бы также взять и $-4a^2b$; въ этомъ случаѣ остальные члены корня тоже перемѣнили бы знаки на противоположные, потому что для полученія ихъ пришлось бы дѣлить первые члены остатковъ не на $8a^2b$, а на $-8a^2b$. Значитъ, квадратный корень изъ многочлена имѣетъ два значенія; въ нашемъ примѣрѣ одно $=4a^2b-3ab^2+\frac{1}{2}b^3$,

другое $=-4a^2b+3ab^2-\frac{1}{2}b^3$; оба эти значенія можно выразить такъ:

$$\pm(4a^2b-3ab^2+\tfrac{1}{2}b^3).$$

Мы могли бы подкоренной многочленъ расположить по возрастающимъ степенямъ главной буквы; члены корня нашлись бы тогда совершенно такъ же, какъ сейчасъ было объяснено; только въ объясненіи слово «высшій» должно замѣнить словомъ «низшій».

182. Правило. Чтобы извлечь квадратный корень изъ многочлена, предварительно располагаютъ его по убывающимъ или по возрастающимъ степенямъ одной и той же буквы.

Извлекаютъ квадратный корень изъ 1-го члена многочлена; полученный результатъ берутъ за 1-й членъ корня.

Возвысивъ этотъ членъ въ квадратъ, вычитаютъ его изъ даннаго многочлена.

Дѣлятъ 1-й членъ перваго остатка на удвоенный первый членъ корня; полученное частное берутъ за 2-й членъ корня.

Приписавъ этотъ членъ къ удвоенному 1-му члену корня, умножаютъ полученный двучленъ на 2-й членъ корня и произведеніе вычитаютъ изъ остатка.

Дѣлятъ 1-й членъ 2-го остатка на удвоенный 1-й членъ корня; полученное частное принимаютъ за 3-й членъ корня.

Приписавъ этотъ членъ къ суммѣ удвоеннаго 1-го члена и удвоеннаго 2-го члена, умножаютъ полученный трехчленъ на 3-й членъ корня и произведеніе вычитаютъ изъ 2-го остатка.

Продолжаютъ дѣйствіе такъ же и далѣе.

183. Признаки невозможности извлеченія.

1) Если данный многочленъ есть двучленъ, то корень квадратный изъ него не можетъ быть выраженъ многочленомъ, такъ какъ всякій многочленъ въ квадратѣ даетъ по меньшей мѣрѣ 3 члена, а не 2.

2) Если высшій или низшій члены многочлена не представляютъ собою точныхъ квадратовъ, то корень квадратный изъ многочлена не можетъ быть выраженъ многочленомъ.

Это прямо слѣдуетъ изъ правила нахожденія высшаго и низшаго членовъ корня.

3) Если высшій и низшій члены многочлена точные квадраты,

то возможность или невозможность извлеченія корня обнаружится посредствомъ самаго дѣйствія; при этомъ если многочленъ расположенъ по убывающимъ степенямъ главной буквы, то продолжаютъ дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока въ остаткѣ не получится 0, или пока не получится остатокъ, у котораго первый членъ не дѣлится на удвоенный первый членъ корня; въ послѣднемъ случаѣ извлеченіе невозможно. Если же многочленъ расположенъ по возрастающимъ степенямъ главной буквы, то, вычисливъ предварительно послѣдній членъ корня (который равенъ корню квадратному изъ послѣдняго члена многочлена), продолжаютъ дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока въ корнѣ не получится членъ, у котораго показатель главной буквы равенъ показателю этой буквы въ вычисленномъ послѣднемъ членѣ корня, или болѣе его; если при этомъ есть остатокъ, то извлеченіе невозможно.

184. Замѣчаніе. Когда изъ даннаго многочлена нельзя извлечь точнаго квадратнаго корня, все-таки иногда бываетъ полезно начать извлеченіе съ тѣмъ, чтобы, прекративъ его на какомъ-нибудь членѣ корня, **представить данный многочленъ въ видѣ суммы квадрата съ остаткомъ отъ извлеченія.** Напримѣръ:

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{x^4-4x^3+3}=x^2-2x \\ & -x^4 \\ 2x^2-2x & \text{»}-4x^3+3 \\ -2x & \text{»}+4x^3-4x^2 \\ & \quad -4x^2+3. \end{array}$$

Прекративъ извлеченіе на второмъ членѣ корня, можемъ написать:

$$x^4-4x^3+3=(x^2-2x)^2+(-4x^2+3)=(x^2-2x)^2-4x^2+3.$$

ГЛАВА V.

Извлеченіе ариѳметическаго кубичнаго корня.

1. Извлеченіе кубичнаго корня изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ данномъ числѣ.

185 Предварительное замѣчаніе. Если возвысимъ въ кубъ числа натуральнаго ряда: 1, 2, 3, 4, 5..., то получимъ безконечный рядъ кубовъ:

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000...

(изъ нихъ первые 10 надо заучить наизусть).

Очевидно, что всякое цѣлое число, не находящееся въ этомъ ряду (напр., 500), не можетъ быть кубомъ цѣлаго числа; въ такомъ случаѣ оно не можетъ быть и кубомъ дроби (§ 163). Значитъ, изъ такого числа нельзя извлечь кубичнаго корня. Но мы условимся, что если требуется извлечь кубичный корень изъ какого-нибудь цѣлаго числа, то это надо понимать въ томъ смыслѣ, что требуется извлечь кубичный корень или изъ самаго числа (если оно окажется кубомъ цѣлаго числа), или же изъ наибольшаго куба цѣлаго числа, какой заключается въ данномъ числѣ.

186 Число цыфръ въ корнѣ. Легко опредѣлить заранѣе, сколько цыфръ въ кубичномъ корнѣ изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ данномъ числѣ, напр., въ числѣ 571810. Для этого примемъ во вниманіе слѣдующую таблицу:

$1^3=1$, $10^3=1000$, $100^3=1000000$, $1000^3=1000000000$, и т. д.

Такъ какъ 571810 меньше 1000000, то наибольшій кубъ, заключающійся въ этомъ числѣ, меньше 100^3; съ другой стороны, такъ какъ 571810 больше 1000, то наибольшій кубъ, заключающійся въ этомъ числѣ, больше (или равенъ) 10^3. Значитъ, кубичный корень изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ 571810, долженъ быть менѣе 100 и болѣе (или равенъ) 10, т.-е. онъ долженъ состоять изъ двухъ цыфръ.

Подобными разсужденіями мы можемъ опредѣлить число цыфръ кубичнаго корня изъ всякаго даннаго числа. Ниже (§ 191) мы укажемъ для этого болѣе простой способъ.

Если данное число болѣе 1000, то кубичный корень изъ него болѣе (или равенъ) 10 и, слѣдов., состоитъ изъ двухъ или болѣе цыфръ. Изъ сколькихъ бы цыфръ онъ ни состоялъ, условимся разсматривать его какъ *суммy только десятковъ и единицъ*.

187. Свойство числа десятковъ корня. Пусть требуется извлечь куб. корень изъ какого-нибудь числа, большаго 1000, напр

изъ 571810. Предположимъ, что въ искомомъ корнѣ десятковъ будетъ x (число это можетъ быть однозначное или многозначное, все равно), а единицъ y; тогда искомый корень выразится $10x+y$, слѣдов.:

$$571810=(10x+y)^3+\text{ост}=1000x^3+3.\ 100x^2y+3.\ 10xy^2+y^3+\text{ост}.$$

Чтобы найти число x, возьмемъ изъ обѣихъ частей этого равенства однѣ только тысячи. Въ лѣвой части этого равенства находится 571 тысяча, а въ правой тысячъ или x^3, или болѣе (если тысячи окажутся въ суммѣ 4-хъ послѣднихъ членовъ); поэтому

$$571\geqslant x^3 \text{ и, слѣд.: } x^3\leqslant 571.$$

Изъ этой формулы слѣдуетъ, что x^3 есть одинъ изъ цѣлыхъ кубовъ, заключающихся въ 571. Докажемъ, что за x^3 надо взять наибольшій изъ этихъ кубовъ, т.-е. 512. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы взяли за x^3 не 512, а, положимъ, 343, то x равнялся бы 7, а потому искомый корень былъ бы 7 десятковъ съ единицами. Но 7 десятковъ съ единицами (хотя бы единицъ было и 9) меньше 8 десятковъ, а 8 десятковъ въ кубѣ составляютъ только 512 тысячъ, что меньше даннаго числа; поэтому мы не можемъ взять 7 десятковъ съ единицами, когда и 8 десятковъ оказывается не много.

Если же $x^3=512$, то $x=\sqrt[3]{512}=8$.

Отсюда слѣдуетъ: **число десятковъ искомаго корня (будетъ ли это число однозначнымъ ил многозначнымъ) равно кубичному корню изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ числѣ тысячъ даннаго числа.**

Когда данное число, какъ взятое нами, меньше 1000000, тогда число тысячъ въ немъ меньше 1000; въ этомъ случаѣ десятки корня легко находятся по таблицѣ кубовъ первыхъ 9 чиселъ.

188. Свойство числа единицъ корня. Найдя десятки корня, вычислимъ членъ $1000x^3$ и вычтемъ изъ даннаго числа; тогда получимъ первый остатокъ. Чтобы найти его, достаточно вычесть x^3, т.-е. 512, изъ 571 и къ остатку снести остальныя три цыфры:

$$\begin{array}{l} 571810 \\ -512 \\ \hline 59810=3\,.\,100x^2y+3\,.\,10xy^2+y^3+\text{ост.} \end{array}$$

Чтобы найти y, возьмемъ въ обѣихъ частяхъ этого равенства только однѣ сотни. Въ лѣвой части сотенъ 598, а въ правой $3x^2y$ или больше (если сотни окажутся въ суммѣ послѣднихъ трехъ членовъ), поэтому:

$$598\geqslant 3x^2y; \text{ и слѣд. } 3x^2y\leqslant 598, \text{ поэтому } y\leqslant\frac{598}{3x^2},$$

т.-е. число единицъ корня или равно цѣлому частному отъ дѣленія числа сотенъ перваго остатка на утроенный квадратъ числа десятковъ корня, или меньше этого частнаго.

Подставивъ вмѣсто x найденное для него число 8, получимъ:

$$y \leqslant \frac{598}{3\,.\,8^2} = \frac{598}{192} = 3\,\frac{22}{192} = 3\,\frac{11}{96}.$$

Отсюда видно, что y есть или 3, или 2, или 1, или 0. Чтобы опредѣлить, какое изъ этихъ чиселъ надо взять за y, испытаемъ сначала бо́льшую цыфру, т.-е. 3. Для этого вычислимъ сумму членовъ: $3\,.\,100x^2y + 3\,.\,10xy^2 + y^3$ при $x=8$ и $y=3$, если получится число, не большее перваго остатка 59810, то испытуемая цыфра годится; въ противномъ случаѣ надо испытать слѣдующую меньшую цыфру:

$$\begin{array}{lr} 3x^2y\,.\,100 = 3\,.\,64\,.\,3\,.\,100 = & 57600 \\ 3xy^2\,.\,10 = 3\,.\,8\,.\,9\,.\,10 = & 2160 \\ y^3 = 3^3 = & 27 \\ \hline & 59787 \end{array}$$

Испытуемая цыфра годится. Искомый корень 83. Чтобы найти окончательный остатокъ отъ извлеченія, надо изъ 59810 вычесть 59787; послѣ вычитанія получимъ 23, вслѣдствіе чего можно написать:

$$571810 = 83^3 + 23.$$

Вычисляя члены $3x^2y$. 100 и $3xy^2$. 10, мы можемъ не писать на концѣ нулей, а только, при подписываніи слагаемыхъ другъ подъ другомъ, имѣть въ виду, что произведеніе $3x^2y$ означаетъ сотни, а $3xy^2$—десятки.

189. Извлеченіе кубичнаго корня, состоящаго изъ одной или двухъ цыфръ. Если данное число меньше 1000, то куб. корень изъ него выражается одною цыфрою, и тогда онъ находится по таблицѣ кубовъ первыхъ 9 чиселъ.

Если же данное число, напр., 581810, болѣе 1000, но менѣе 1000000, то куб. корень изъ него выражается 2 цыфрами. Согласно сказанному выше, цыфры эти всего удобнѣе находить такимъ образомъ: отдѣливъ

$$\begin{array}{r|r} & \sqrt[3]{571'810} = 83 \\ & 512 \\ 3\,.\,8^2 = 192 & 598'10 \\ 3\,.\,8^2\,.\,3 = & 576 \\ 3\,.\,8\,.\,3^2 = & 216 \\ 3^3 = & 27 \\ \hline & 59787 \\ & 23 \end{array}$$

въ данномъ числѣ тысячи (571), извлекаютъ куб. корень изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ числѣ ихъ. Полученное число пишутъ въ корнѣ; это будутъ десятки искомаго корня. Возвысивъ найденное число въ кубъ, вычитаютъ результатъ изъ числа тысячъ даннаго числа; къ остатку (59) сносятъ остальныя три цыфры подкоренного числа. Отдѣляютъ въ этомъ остаткѣ сотни; налѣво отъ него проводятъ вертикальную черту, за которой пишутъ утроенный квадратъ числа десятковъ корня. На это число дѣлятъ число сотенъ остатка. Полученную цыфру (3) подвергаютъ испытанію. Для этого вычисляютъ отдѣльно три слагаемыя: утроенное произведеніе квадрата десятковъ на единицы, утроенное произведеніе десятковъ на квадратъ единицъ и кубъ единицъ. Подписавъ эти слагаемыя

другъ подъ другомъ (при чемъ второе и третье сдвигаютъ на одно мѣсто вправо), находятъ ихъ сумму (59787). Если эта сумма оказывается не болѣе остатка, то ее вычитаютъ изъ него; въ противномъ случаѣ подвергаютъ испытанію слѣдующую меньшую цыфру.

190. Извлеченіе кубичнаго корня, состоящаго изъ трехъ или болѣе цыфръ. Пусть требуется извлечь куб. корень изъ числа, бо́льшаго милліона, напр., изъ 53820756. Куб. корень изъ такого числа болѣе (или равенъ) 100 и потому состоитъ изъ 3 или болѣе цыфръ. Мы однако можемъ его разсматривать, какъ состоящій только изъ десятковъ и единицъ. Чтобы найти десятки корня, надо, по доказанному, извлечь куб корень изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ числѣ тысячъ даннаго числа, т.-е. въ 53820. Такъ какъ это число менѣе 1000000, то корень изъ него найдемъ описаннымъ ранѣе пріемомъ:

$$\sqrt[3]{53'820'756}=377$$

	27
$3\cdot 3^2=27$	268'20
$3\cdot 3^2\cdot 7=$	189
$3\cdot 3\cdot 7^2=$	441
$7^3=$	343
	23653
$3\cdot 37^2=4107$	31677'56
$3\cdot 37^2\cdot 7=$	28749
$3\cdot 37\cdot 7^2=$	5439
$7^3=$	343
	2929633
	238123

Цыфры 9 и 8, по испытаніи ихъ, оказываются велики. Такимъ образомъ, въ искомомъ корнѣ оказывается 37 десятковъ.

Чтобы найти единицы корня, надо, по доказанному прежде, найти предварительно первый остатокъ, т.-е. изъ даннаго числа вычесть кубъ десятковъ, т.-е. 37^3. 1000. Для этого достаточно изъ 53820 вычесть 37^3 и къ остатку приписать послѣднія три цыфры даннаго числа, т.-е. 756. Остатокъ отъ вычитанія 37^3 изъ 53820 у насъ уже есть, именно 3167. Припишемъ къ этому числу цыфры 756; получимъ остатокъ 3167756 отъ вычитанія 37^3. 1000 изъ всего даннаго числа. Отдѣлимъ въ этомъ остаткѣ сотни и раздѣлимъ число ихъ на $3\cdot 37^2$, тогда получимъ, по показанному, число, или равное числу единицъ корня, или бо́льшее его. Испытаніемъ убѣдимся, какая цыфра будетъ надлежащая. Дѣйствіе можно продолжать тамъ же, гдѣ мы находили десятки корня.

Вообще, чтобы извлечь куб. корень изъ какого угодно большого числа, надо сначала извлечь куб. корень изъ числа его тысячъ. Если это число болѣе 1000, то придется извлекать куб. корень изъ числа тысячъ этихъ тысячъ, т.-е. изъ милліоновъ даннаго числа; если и это число болѣе 1000, то придется извлекать корень изъ числа тысячъ милліоновъ, т.-е. изъ билліоновъ даннаго числа, и т. д.

Правило. Чтобы извлечь куб. корень изъ даннаго числа, разбиваютъ его, отъ правой руки къ лѣвой, на грани, по три цыфры въ каждой, кромѣ послѣдней, въ которой можетъ быть одна или двѣ цыфры. Чтобы найти первую цыфру корня, надо извлечь куб. корень изъ первой грани. Чтобы найти вторую цыфру, надо изъ первой грани вычесть кубъ первой цыфры корня къ остатку снести вторую грань и число сотенъ получившагося числа раздѣлить на утроенный квадратъ найденной цыфры корня; полученное отъ дѣленія число надо испытать. Слѣдующія цыфры корня находятся по тому же пріему.

Если послѣ снесенія грани число сотенъ получившагося числа окажется меньше дѣлителя, т.-е. утроеннаго квадрата найденной части корня, то въ корнѣ ставятъ нуль и сносятъ слѣдующую грань.

191. Число цыфръ корня. Изъ разсмотрѣнія способа нахожденія цыфръ кубичнаго корня слѣдуетъ, что **въ кубичномъ корнѣ столько цыфръ, сколько въ подкоренномъ числѣ граней, по три цыфры каждая, кромѣ одной, которая можетъ имѣть и двѣ цыфры, и одну.**

2. Извлеченіе приближенныхъ кубичныхъ корней.

192. Точные и неточные кубы. Числа, изъ которыхъ кубичный корень можетъ быть выраженъ цѣлымъ или дробнымъ числомъ, наз. точными кубами; всѣ остальныя числа называются неточными кубами. Неточными кубами оказываются, во-1-хъ, всѣ тѣ цѣлыя числа, которыя не представляютъ собою кубовъ цѣлыхъ чиселъ, и, во-2-хъ, всѣ тѣ дроби, у которыхъ хотя бы одинъ членъ не есть кубъ цѣлаго числа.

Изъ неточныхъ кубовъ можно извлекать только такъ-называемые приближенные кубичные корни, опредѣляемые слѣдующимъ образомъ.

193. Опредѣленіе приближенныхъ кубичныхъ корней. 1) Приближеннымъ кубичнымъ корнемъ изъ даннаго числа (цѣлаго или дробнаго) съ точностью до 1 наз. каждое изъ двухъ такихъ цѣлыхъ чиселъ, между кубами которыхъ заключается данное число и которыя различаются одно отъ другого на 1; меньшее изъ этихъ чиселъ называется приближеннымъ корнемъ съ недостаткомъ, а большее— приближеннымъ корнемъ съ избыткомъ.

Такъ, если A есть данное число, то приближенные кубичные корни изъ A съ точностью до 1 будутъ два такія цѣлыя числа x и $x+1$, которыя удовлетворяютъ неравенствамъ:

$$x^3 < A < (x+1)^3.$$

2) Приближеннымъ кубичнымъ корнемъ изъ даннаго числа (цѣлаго или дробнаго) съ точностью до $\frac{1}{n}$ наз. каждая изъ двухъ такихъ дробей съ знаменателемъ n, между кубами которыхъ заключается данное число и которыя различаются одно отъ другого на $\frac{1}{n}$, меньшая изъ этихъ дробей наз. приближеннымъ корнемъ съ недостаткомъ, а большая—приближеннымъ корнемъ съ избыткомъ.

Такъ, если данное число есть A, то приближенные кубичные корни изъ A съ точностью до $\frac{1}{n}$ будутъ двѣ такія дроби $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, которыя удовлетворяютъ двойному неравенству:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^3 < A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^3$$

194. Правило 1. Чтобы найти изъ даннаго числа приближенный кубичный корень съ недостаткомъ, съ точностью до 1, извлекаютъ кубичный корень изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ цѣлой части даннаго числа.

Пусть, напр., требуется найти приближенный куб. корень, съ точностью до 1, изъ числа 500,6. Для этого находимъ куб. корень изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ 500, это есть 7 Такъ какъ $7^3<500$, то, и подавно, $7^3<500{,}6$, съ другой стороны, $8^3>500$, и такъ какъ 0,6 не составляютъ ни одной цѣлой единицы, то $8^3>500{,}6$. Слѣд., каждое изъ чиселъ: 7 и 8 есть приближенный куб. корень съ точностью до 1 изъ числа 500,6, первое есть приближенный куб. корень съ недостаткомъ, второе—съ избыткомъ.

Примѣры.

1) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}=0$ или 1 (до 1) 2) $\sqrt[3]{560\frac{7}{8}}=8$ или 9 (до 1);

3) $\sqrt[3]{\frac{3846}{17}}=\sqrt[3]{226\frac{4}{17}}=6$ или 7 (до 1).

Правило 2. Чтобы найти изъ даннаго числа приближенный кубичный корень съ недостаткомъ, съ точностью до $\frac{1}{n}$, умножаютъ данное число на n^3, изъ полученнаго произведенія извлекаютъ кубичный корень съ недостаткомъ, съ точностью до 1, и дѣлятъ его на n.

Дѣйствительно, пусть искомые приближенные корни изъ даннаго числа A съ точностью до $\frac{1}{n}$ будутъ $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$. Согласно опредѣленію, эти дроби

должны удовлетворять двойному неравенству:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^3 < A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^3 \text{ или } \frac{x^3}{n^3} < A < \frac{(x+1)^3}{n^3}.$$

Умноживъ всѣ члены неравенства на n^3, получимъ:

$$x^3 < An^3 < (x+1)^3.$$

Изъ этого неравенства видно, что числа x и $x+1$ суть приближенные кубичные корни изъ числа An^3, съ точностью до 1. Найдя эти корни такъ, какъ было указано ранѣе, мы получимъ числителей дробей $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, а раздѣливъ ихъ на n, найдемъ и самыя дроби.

Примѣры.

1) Найти $\sqrt[3]{5}$ съ точностью до $\frac{1}{8}$.

$5 \cdot 8^3 = 2560$, $\sqrt[3]{2560} = 13$ или 14 (до 1); $\sqrt[3]{5} = \frac{13}{8}$ или $\frac{14}{8}\left(\text{до } \frac{1}{8}\right)$.

2) Найти $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ до сотыхъ долей.

$\frac{4}{9} \cdot 100^3 = 444444\frac{4}{9}$; $\sqrt[3]{444444} = 76$ или 77, $\sqrt[3]{\frac{4}{9}} = 0{,}76$ или $0{,}77$ (до 0,01).

3) Найти $\sqrt[3]{2}$ съ десятичнымъ приближеніемъ.

$\sqrt[3]{2} = 1{,}25\,..$

	1
$3 \cdot 1^2 = 3$	10′00
$3 \cdot 1^2 \cdot 2 =$	6
$3 \cdot 1 \cdot 2^2 =$	12
$2^3 =$	8
	728
$3 \cdot 12^2 = 432$	2720′00
$3 \cdot 12^2 \cdot 5 =$	2160
$3 \cdot 12 \cdot 5^2 =$	900
$5^3 =$	125
	225125
	46875

Сначала извлекаемъ корень съ точностью до 1 это будетъ 1. Чтобы найти цыфру десятыхъ, надо было бы умножить 2 на 10^3, т.-е. къ 2 приписать три нуля Очевидно, это все равно, что приписать къ остатку три нуля. Найдя цыфру десятыхъ, можемъ снова приписать къ остатку три нуля и искать цыфру сотыхъ, и т. д.

3. Извлеченіе кубичныхъ корней изъ дробей.

195. Точный куб. корень изъ несократимой дроби можно извлечь лишь въ томъ случаѣ, когда оба члена дроби точные кубы (§ 163,II). Въ этомъ

случаѣ достаточно извлечь корень изъ числителя и знаменателя отдѣльно; напр.:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{3}{5}.$$

Приближенные куб. корни изъ дробей обыкновенно находятся такъ, какъ указано въ предыдущемъ параграфѣ (примѣръ 2). Впрочемъ, можно поступать иначе. Объяснимъ это на слѣдующемъ примѣрѣ:

Найти приближенное значеніе $\sqrt[3]{\frac{5}{24}}$.

Изъ разложенія $24=2\,.\,2\,.\,2\,.\,3$ видимъ, что если оба члена дроби умножимъ на 3^2, то сдѣлаемъ знаменателя точнымъ кубомъ; сдѣлавъ это, извлечемъ корень изъ числителя и знаменателя отдѣльно:

$$\sqrt[3]{\frac{5}{24}}=\sqrt[3]{\frac{5\,.\,3^2}{24\,.\,3^2}}=\sqrt[3]{\frac{45}{2^3\,.\,3^3}}=\frac{\sqrt[3]{45}}{2\,.\,3}=\frac{\sqrt[3]{45}}{6}.$$

Найдя $\sqrt[3]{45}$ съ какою-нибудь точностью до $\frac{1}{n}$ и раздѣливъ результатъ на 6, мы получимъ приближенный куб. корень изъ дроби $\frac{5}{24}$ съ точностью до $\frac{1}{6n}$.

ГЛАВА VI.

Понятіе о несоизмѣримомъ числѣ.

196. Соизмѣримыя и несоизмѣримыя значенія величинъ. Общею мѣрою двухъ значеній одной и той же величины (напр., двухъ длинъ, двухъ угловъ, двухъ вѣсовъ и т. п.) наз. такое значеніе этой же величины, которое въ каждомъ изъ нихъ содержится цѣлое число разъ.

Нахожденіе общей мѣры производится способомъ послѣдовательнаго дѣленія такъ, какъ это указывается въ геометріи для двухъ отрѣзковъ прямой. Въ геометріи же доказывается, что существуютъ такіе отрѣзки прямой, которые не имѣютъ общей мѣры; таковы, напр., основаніе и боковая сторона равнобедреннаго треугольника,

у котораго углы при основаніи равны 36°($={}^{2}/_{5}d$), или діагональ и сторона квадрата. Соотвѣтственно этому мы можемъ представить себѣ, что и другія величины могутъ получать значенія, не имѣющія общей мѣры.

Два значенія одной и той же величины называются соизмѣримыми, если они имѣютъ общую мѣру, и несоизмѣримыми, если такой мѣры они не имѣютъ.

197. Понятіе объ измѣреніи. Чтобы избѣжать излишней отвлеченности, мы будемъ говорить, какъ въ этомъ параграфѣ, такъ и въ послѣдующихъ, не о величинахъ вообще, а объ одной наиболѣе простой величинѣ—именно, о длинѣ отрѣзка прямой.

Черт. 21.

Пусть требуется измѣрить длину отрѣзка AB при помощи единицы длины CD (черт. 21). Различимъ тогда 2 возможныхъ случая:

1-й случай, когда отрѣзокъ AB соизмѣримъ съ единицей CD, т.-е. когда существуетъ общая мѣра отрѣзковъ AB и CD. Если окажется, что общей мѣрой будетъ сама единица CD и она въ AB содержится m разъ, то результатъ измѣренія выразится цѣлымъ числомъ m ($AB=mCD$); если же общей мѣрой окажется нѣкоторая $\frac{1}{n}$ доля CD, которая въ AB содержится m разъ, то результатъ измѣренія выразится дробью $\frac{m}{n}$ $\left(\text{т.-е. } AB=\frac{m}{n}CD\right)$. Значитъ, въ разсматриваемомъ случаѣ мы всегда можемъ получить точный результатъ измѣренія, т.-е. всегда можемъ получить такое цѣлое или дробное число, которое въ точности выражаетъ длину AB въ единицѣ CD. Объ этомъ числѣ мы будемъ говорить, что оно измѣряетъ отрѣзокъ AB (или служитъ ему мѣрою).

2-й случай, когда отрѣзокъ AB несоизмѣримъ съ единицей CD, т.-е., когда не существуетъ общей мѣры AB и CD. Въ этомъ случаѣ мы не можемъ получить точнаго результата измѣренія въ видѣ цѣлаго или дробнаго

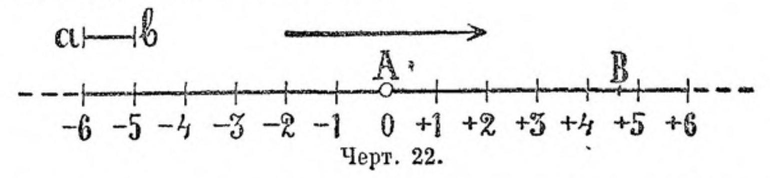
числа. Дѣйствительно, если предположимъ, что отрѣзокъ AB въ точности равняется $\frac{m}{n}CD$, то это значило бы, что $\frac{1}{n}$ доля CD содержится въ AB ровно m разъ; тогда, значитъ, эта доля была бы общею мѣрою AB и CD. Поэтому, въ томъ случаѣ, когда такой мѣры не существуетъ, точнаго результата измѣренія при помощи цѣлыхъ или дробныхъ чиселъ мы получить не можемъ.

Но тогда мы можемъ находить приближенные результаты измѣренія и притомъ съ какою угодно точностью. Положимъ, напр., что мы желаемъ найти приближенный результатъ измѣренія съ точностью до $\frac{1}{100}$ $\left(\text{и вообще до } \frac{1}{n}\right)$. Тогда, раздѣливъ единицу CD на 100 (вообще на n) равныхъ частей, станемъ откладывать на AB одну такую часть столько разъ, сколько можно. Пусть окажется, что она укладывается въ AB болѣе 123 разъ, но менѣе 124 разъ (вообще болѣе m разъ, но менѣе $m+1$ разъ). Тогда каждое изъ чиселъ $\frac{123}{100}$ и $\frac{124}{100}$ $\left(\text{вообще } \frac{m}{n} \text{ и } \frac{m+1}{n}\right)$ можно назвать приближеннымъ результатомъ измѣренія отрѣзка AB, первое число — съ недостаткомъ, а второе — съ избыткомъ.

Замѣтимъ, что этимъ путемъ мы можемъ находить приближенные результаты измѣренія и въ случаѣ 1-мъ, т.-е. когда измѣряемый отрѣзокъ AB соизмѣримъ съ единицею CD; только въ этомъ случаѣ мы можемъ найти также и точный результатъ, если пожелаемъ, тогда какъ въ случаѣ 2-мъ такого результата мы никогда не получимъ.

198. Соотвѣтствіе между числами и точками прямой. Для лучшаго представленія всего того, что мы будемъ говорить далѣе, мы обратимся къ наглядному способу изображенія чиселъ помощью направленныхъ отрѣзковъ прямой, къ способу, къ которому мы уже прибѣгали въ началѣ алгебры (§14), когда говорили о числахъ положительныхъ и отрицательныхъ. Для этого возьмемъ безконечную въ обѣ стороны прямую (черт. 22), на которой какую-нибудь точку A

примемъ за начало отрѣзковъ; кромѣ того, условимся, какое изъ двухъ направленій этой прямой считать положительнымъ и какое отрицательнымъ (за положительное направленіе мы будемъ всегда принимать направленіе слѣва направо, указанное на чертежѣ стрѣлкой). Такую прямую мы уже условились (§ 14) называть числовою прямою. При данной единицѣ длины ab (указанной на чертежѣ) каждому числу p, цѣлому или дробному, положительному или отрицательному, соотвѣтствуетъ на числовой прямой опредѣленная точка, представляющая собою конецъ того соизмѣримаго съ ab отрѣзка, который измѣряется этимъ числомъ p и отложенъ на числовой прямой отъ начальной точки A вправо отъ нея, если число p положительное, и влѣво, если оно отрицательное. На нашемъ чертежѣ, напр., указаны точки, соотвѣтствующія цѣлымъ числамъ: +1, +2, +3... —1, —2, —3...; дробнымъ числамъ соотвѣтствуютъ промежуточныя точки.



Черт. 22.

Но если всякому числу p мы можемъ найти соотвѣтствующую точку на числовой прямой, то нельзя сказать обратно, чтобы всякой точкѣ этой прямой мы могли найти соотвѣтствующее число. Если случится, что взятая на прямой точка, напр., B (черт. 22), есть конецъ такого отрѣзка AB, который несоизмѣримъ съ единицею ab, то такой точкѣ не будетъ соотвѣтствовать никакого числа, такъ какъ несоизмѣримый отрѣзокъ AB точно не выражается ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ.

199. Понятіе о несоизмѣримомъ числѣ. Чтобы установить соотвѣтствіе между числами и всѣми точками числовой прямой и такимъ образомъ получить возможность выражать числами не одни только соизмѣримые съ единицей отрѣзки прямой, но и несоизмѣримые, надо расширить область чиселъ, введя въ нее, сверхъ тѣхъ чиселъ, которыя мы разсматривали до сего времени, еще числа особаго рода, кото-

рыя мы примемъ за мѣру несоизмѣримыхъ съ единицею значеній величины. Числа эти мы будемъ называть **несоизмѣримыми** (или **ирраціональными**), а числа цѣлыя и дробныя, которыя мы знали до сего времени, будемъ называть **соизмѣримыми** (или **раціональными**).

Мы не будемъ устанавливать здѣсь вполнѣ строгаго опредѣленія несоизмѣримыхъ чиселъ и дѣйствій надъ ними [1]). Ограничимся сообщеніемъ только самыхъ необходимыхъ свѣдѣній.

Допускаютъ, что при данной единицѣ длины **каждой** точкѣ B числовой прямой (черт. 22) соотвѣтствуетъ опредѣленное **число**, принимаемое за мѣру того отрѣзка AB, концомъ котораго служитъ эта точка B. Если отрѣзокъ AB соизмѣримъ съ единицей длины, то точкѣ B соотвѣтствуетъ соизмѣримое число; если же онъ несоизмѣримъ съ единицей длины, то точкѣ B соотвѣтствуетъ нѣкоторое несоизмѣримое число, которое нельзя точно выразить цыфрами, но можно обозначить какимъ-нибудь знакомъ, напр., одною изъ буквъ греческаго алфавита: α, β, γ...

Каждый приближенный результатъ измѣренія несоизмѣримаго отрѣзка AB, которому мѣрою служитъ несоизмѣримое число α, мы будемъ называть **приближеннымъ значеніемъ** этого числа α. Такъ, если, измѣривъ отрѣзокъ AB съ точностью до $\frac{1}{n}$, мы получили числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$, то каждое изъ нихъ мы назовемъ приближеннымъ значеніемъ числа α съ точностью до $\frac{1}{n}$. Такъ какъ число $\frac{m}{n}$ измѣряетъ соизмѣримый отрѣзокъ, меньшій AB, а число $\frac{m+1}{n}$ измѣряетъ соизмѣримый отрѣзокъ, бóльшій AB, то несоизмѣримое число α, принимаемое нами за мѣру отрѣзка AB, мы условимся считать бóльшимъ соизмѣримаго числа $\frac{m}{n}$ и меньшимъ соизмѣримаго числа $\frac{m+1}{n}$. Вслѣдствіе этого изъ двухъ чиселъ: $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ первое мы будемъ называть

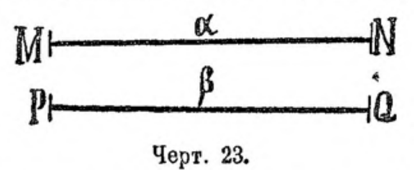
[1]) Это сдѣлано въ особомъ **Приложеніи**, помѣщенномъ въ концѣ этой книги.

приближеннымъ значеніемъ несоизмѣримаго числа α съ недостаткомъ, а второе приближеннымъ значеніемъ этого числа съ избыткомъ.

Несоизмѣримое число α мы будемъ считать извѣстнымъ, если указанъ способъ, посредствомъ котораго можно находить приближенныя значенія этого числа съ любою степенью точности (примѣръ этому мы вскорѣ увидимъ).

Число (соизмѣримое или несоизмѣримое) считается положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, измѣряетъ ли оно отрѣзокъ прямой, имѣющій положительное направленіе, или отрицательное; на числовой прямой (черт. 22) положительнымъ числамъ соотвѣтствуютъ точки, лежащія направо отъ начальной точки A, а отрицательнымъ числамъ соотвѣтствуютъ точки, расположенныя налѣво отъ A. Отрицательныя несоизмѣримыя числа, такъ же какъ и соизмѣримыя, выражаются посредствомъ знака минусъ, поставленнаго передъ абсолютной величиной числа, а положительныя числа посредствомъ знака плюсъ (или совсѣмъ безъ знака).

200. Равенство и неравенство чиселъ. Два числа α и β (соизмѣримыя или несоизмѣримыя) считаются равными, если, при одной и той же единицѣ длины, они служатъ мѣрою двухъ равныхъ отрѣзковъ прямой (черт. 23) MN и PQ. Если же отрѣзокъ MN, измѣряемый числомъ α, больше (или меньше) отрѣзка PQ, измѣряемаго числомъ β (при той же единицѣ длины), то число α считается бо́льшимъ (или меньшимъ) числа β.



Черт. 23.

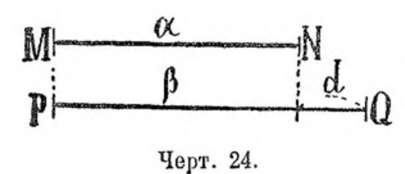
Полезно замѣтить слѣдующій признакъ равенства несоизмѣримыхъ чиселъ [1]):

несоизмѣримыя числа α и β равны, если ихъ приближенныя значенія, взятыя оба съ недостаткомъ, или оба съ избыткомъ,

[1]) Этотъ признакъ примѣняется въ геометріи для опредѣленія равенства несоизмѣримыхъ отношеній.

и вычисленныя съ произвольною, но одинаковою точностью, оказываются постоянно другъ другу равными.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, предположимъ, что числа α и β равны, пусть, напр., $\alpha<\beta$. Тогда отрѣзокъ MN (черт. 24), измѣряемый числомъ α, меньше отрѣзка PQ, измѣряемаго числомъ β. Положимъ, что разность $PQ-MN$ равна d. Возьмемъ такую $\frac{1}{n}$ долю единицы длины,



Черт. 24.

которая была бы меньше d (что всегда возможно, какъ бы мала длина d ни была), и найдемъ прибл. результаты измѣренія отрѣзковъ MN и PQ съ точностью до этой доли единицы. Очевидно, что такая доля, содержась въ d по крайней мѣрѣ 1 разъ, содержится въ PQ бо́льшее число разъ, чѣмъ въ MN; значитъ, тогда прибл. результатъ измѣренія отрѣзка MN будетъ меньше прибл. результата измѣренія отрѣзка PQ (если оба результата взяты съ недостаткомъ, или оба съ избыткомъ). Но эти результаты измѣренія суть вмѣстѣ съ тѣмъ и прибл. значенія, съ точностью до $\frac{1}{n}$, чиселъ α и β. Значитъ, если $\alpha<\beta$, то, начиная съ нѣкотораго достаточно большого значенія знаменателя n въ дроби $\frac{1}{n}$, прибл. значеніе числа α окажется меньшимъ прибл. значенія числа β (если оба значенія взяты съ недостаткомъ, или оба съ избыткомъ). Поэтому въ томъ случаѣ, когда прибл. значенія чиселъ α и β равны другъ другу при всякой степени точности, мы должны заключить, что эти числа равны.

201. Дѣйствія надъ несоизмѣримыми числами. Пусть $\alpha, \beta, \gamma\dots$ будутъ данныя положительныя несоизмѣримыя числа. Обозначимъ соотвѣтственно черезъ $a, b, c\dots$ какія угодно приближенныя значенія этихъ чиселъ, взятыя съ недостаткомъ, и черезъ $A, B, C\dots$ какія угодно приближенныя значенія ихъ, взятыя съ избыт-

комъ. Тогда мы можемъ высказать слѣдующія **опредѣленія дѣйствій надъ несоизмѣримыми числами.**

1°. Сложить числа α, β, γ... значитъ найти число, которое было бы бо́льше каждой суммы $a+b+c+...$ и меньше каждой суммы $A+B+C+...$

Положимъ, напр., что рѣчь идетъ о двухъ числахъ α и β, которыхъ десятичныя приближенныя значенія, взятыя съ недостаткомъ, будутъ слѣдующія [1]):

	до 0,1	до 0,01	до 0,001	до 0,0001	...
Для числа α	1,7	1,73	1,732	1,7320	...
Для числа β	1,4	1,41	1,414	1,4142	...

(Соотвѣтствующія приближенныя значенія съ избыткомъ получаются изъ этихъ чиселъ посредствомъ увеличенія послѣдняго десятичнаго знака на 1).

Тогда сложить α и β значитъ найти число, которое было бы

больше каждой изъ суммъ:	и меньше каждой изъ суммъ:
1,7+1,4.........=3,1	1,8+1,5.........=3,3
1,73+1,41......=3,14	1,74+1,42......=3,16
1,732+1,414...=3,146	1,733+1,415...=3,148
1,7320+1,4142=3,1462	1,7321+1,4143=3,1464

. . . .

2°. Перемножить числа α, β, γ... значитъ найти число, которое было бы бо́льше каждаго произведенія abc... и меньше каждаго произведенія ABC... [2]).

Такъ, беря приближенныя значенія чиселъ α и β, указанныя выше, мы можемъ сказать, что произведеніе $\alpha\beta$ представляетъ собою число, которое

---

[1]) Взяты приближенныя значенія чиселъ: $\alpha=\sqrt{3}$ и $\beta=\sqrt{2}$.

[2]) Въ теоріи несоизмѣримыхъ чиселъ (см. Приложеніе въ концѣ этой книги) доказывается, что искомое число, о которомъ говорится въ опредѣленіяхъ 1° и 2° (а слѣдов., и въ остальныхъ), при всякихъ данныхъ числахъ α, β, γ..., существуетъ и только одно.

больше каждаго изъ произведеній:	и меньше каждаго изъ произведеній:
1,7 . 1,4.........=2,38	1,8 . 1,5.........=2,70
1,73 . 1,41.......=2,4393	1,74 . 1,42......=2,4708
1,732 . 1,414...=2,449048	1,733 . 1,415...=2,452195
1,7320 . 1,4142=2,44939440	1,7321 . 1,4143=2,44970903

3°. Возвысить число α въ степень съ цѣлымъ положительнымъ показателемъ n значитъ найти произведеніе $\alpha\alpha\alpha...\,\alpha$, составленное изъ n одинаковыхъ сомножителей, равныхъ α.

Это произведеніе, согласно опредѣленію умноженія, должно быть больше каждаго a^n и меньше каждаго A^n.

4°. Обратныя дѣйствія, т.-е. вычитаніе, дѣленіе и извлеченіе корня, опредѣляются для несоизмѣримыхъ чиселъ такъ же, какъ и для соизмѣримыхъ; такъ, вычесть изъ числа α число β значитъ найти такое число x, чтобы сумма $\beta+x$ равнялась α, и т. д.

Если изъ чиселъ α, β, γ... нѣкоторыя будутъ соизмѣримыя, то въ данныхъ выше опредѣленіяхъ (прямыхъ дѣйствій) вмѣсто приближенныхъ значеній такихъ чиселъ можно брать точныя ихъ величины; если, напр., α несоизмѣримое число, а β соизмѣримое, напр. $\beta=5$, то, обозначивъ, какъ и прежде, черезъ a любое приближенное значеніе числа α съ недостаткомъ, и черезъ A любое приближенное значеніе числа α съ избыткомъ, можемъ сказать, что сумма $\alpha+5$ есть такое число, которое больше каждой суммы $a+5$ и меньше каждой суммы $A+5$.

Произведеніе несоизмѣримаго числа на нуль принимается равнымъ 0.

Когда среди чиселъ α, β, γ... встрѣчаются отрицательныя, то дѣйствія надъ ними производятся согласно правиламъ, даннымъ для отрицательныхъ соизмѣримыхъ чиселъ; напр., при умноженіи двухъ чиселъ одинаковые знаки даютъ плюсъ, а разные—минусъ, а абсолютныя величины перемножаются.

При болѣе обстоятельномъ разсмотрѣніи дѣйствій надъ несоизмѣримыми числами, можно установить [1]), что этимъ дѣй-

[1]) Это сдѣлано въ Приложеніи, помѣщенномъ въ концѣ этой книги.

ствіямъ принадлежатъ тѣ же свойства, которыя нами были указаны для дѣйствій надъ числами соизмѣримыми (§§ 19, 36); напр., сумма и произведеніе обладаютъ свойствами перемѣстительнымъ и сочетательнымъ; произведеніе, кромѣ того, еще обладаетъ распредѣлительнымъ свойствомъ, и т. п. Свойства, выражаемыя неравенствами, также примѣнимы къ числамъ несоизмѣримымъ; такъ, если $\alpha > \beta$, то $\alpha+\gamma > \beta+\gamma$, $\alpha\gamma > \beta\gamma$ (если $\gamma > 0$) и $\alpha\gamma < \beta\gamma$ (если $\gamma < 0$), и т. п.

202. Замѣчаніе о приближенномъ вычисленіи. На практикѣ, при совершеніи какого-либо дѣйствія надъ несоизмѣримыми числами, приходится большею частью довольствоваться приближеннымъ результатомъ этого дѣйствія. Въ этомъ случаѣ весьма важно знать, какъ велика погрѣшность, допущенная при этомъ. Покажемъ на примѣрѣ, какъ можно опредѣлять такую погрѣшность. Пусть требуется вычислить произведеніе $\alpha\beta$ въ томъ случаѣ, если прибл. значенія чиселъ α и β будутъ тѣ, которыя указаны выше (на стран. 213). Тогда, ограничиваясь для α и β прибл. значеніями съ точностью до 0,0001, мы будемъ имѣть (по опредѣленію умноженія);

$$2{,}44939440 < \alpha\beta < 2{,}44970903.$$

Мы видимъ, что у крайнихъ чиселъ этого двойного неравенства одинаковы числа цѣлыхъ, десятыхъ, сотыхъ и тысячныхъ; такъ какъ произведеніе $\alpha\beta$ заключается между этими крайними числами, то, значитъ, $\alpha\beta=2{,}449+k$, гдѣ k есть нѣкоторое положительное число, меньшее 0,001; потому, отбросивъ k и принявъ, что $\alpha\beta=2{,}449$, мы будемъ имѣть прибл. значеніе этого произведенія съ недостаткомъ, при чемъ ошибка менѣе 0,001.

Подобнымъ образомъ можно поступать при вычисленіи суммы и степени.

При вычисленіи разности и частнаго приходится нѣсколько измѣнить указанный пріемъ. Положимъ, напр., надо вычислить разность $\alpha-\beta$ тѣхъ же чиселъ, о которыхъ мы сейчасъ говорили. Возьмемъ сначала для α значеніе съ недостаткомъ, напр., 1,732, а для β значеніе съ избыткомъ, напр., 1,415; тогда для разности $\alpha-\beta$ мы получимъ значеніе съ недостаткомъ, именно 0,317. Послѣ этого возьмемъ для α зна-

ченіе съ избыткомъ, напр. 1,733, а для β значеніе съ недостаткомъ, 1,414; тогда для $\alpha-\beta$ мы получимъ значеніе съ избыткомъ, именно 0,319. Слѣдовательно, $0{,}317<\alpha-\beta<0{,}319$. Поэтому, положивъ $\alpha-\beta=0{,}31$, мы будемъ имѣть приближенное значеніе этой разности съ недостаткомъ, при чемъ ошибка менѣе 0,01 (положивъ $\alpha-\beta=0{,}317$, получимъ приближенное значеніе съ недостаткомъ съ точностью до $^2/_{1000}$). Такъ же надо поступать при вычисленіи частнаго $\alpha:\beta$.

ГЛАВА VII.

Несоизмѣримыя значенія радикаловъ.

203. Приближенные m-ые корни. Приближеннымъ ариѳметическимъ корнемъ m-ой степени, съ точностью до $\frac{1}{n}$, изъ положительнаго числа A называется каждая изъ двухъ такихъ ариѳметическихъ дробей: $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, между m-ыми степенями которыхъ заключается число A; такимъ образомъ, дроби эти должны удовлетворять двойному неравенству:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^m \leqslant A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^m.$$

Здѣсь знакъ $=$ (въ соединеніи со знакомъ $<$) мы поставили для того, чтобы не дѣлать исключенія для случая, когда число A есть точная m-ая степень, и цѣлое число n взято такимъ, что степень $\left(\frac{x}{n}\right)^m$ оказывается равной A; тогда, конечно, число $\frac{x}{n}$ будетъ точнымъ корнемъ m-ой степени изъ A.

При $n=1$ указанное неравенство даетъ:

$$x^m \leqslant A < (x+1)^m.$$

Тогда цѣлыя числа x и $x+1$ будутъ приближенными корнями m-ой степени изъ A съ точностью до 1.

Можно также сказать, что приближенный корень m-ой степени изъ числа A съ точностью до $\frac{1}{n}$, взятый съ недостаткомъ, есть наибольшее кратное дроби $\frac{1}{n}$, котораго m-ая степень не превосходитъ A.

Докажемъ, что, какъ бы мала ни была дробь $\frac{1}{n}$, всегда возможно найти съ точностью до этой дроби приближенные корни любой степени изъ всякаго положительнаго числа A. Съ этою цѣлью вообразимъ, что числа натуральнаго ряда возвышены въ m-ую степень и полученные результаты выписаны въ возрастающій рядъ:

$$0^m=0,\quad 1^m=1,\quad 2^m,\quad 3^m,\quad 4^m \ldots a^m,\quad (a+1)^m \ldots$$

Будемъ въ этомъ ряду искать число, равное произведенію An^m, или близкое къ нему. Очевидно, что переходя въ ряду слѣва направо все далѣе и далѣе, мы всегда встрѣтимъ въ немъ два такихъ рядомъ стоящихъ числа, что, первое будетъ равно или меньше An^m, а второе больше этого произведенія. Пусть эти числа будутъ a^m и $(a+1)^m$, такъ что:

$$a^m \leqslant An^m < (a+1)^m.$$

Тогда, раздѣливъ всѣ числа на n^m, получимъ:

$$\frac{a^m}{n^m} \leqslant A < \frac{(a+1)^m}{n^m}\,,\ \text{т.-е}\ \left(\frac{a}{n}\right)^m \leqslant A < \left(\frac{a+1}{n}\right)^m.$$

Такимъ образомъ, мы найдемъ двѣ дроби: $\frac{a}{n}$ и $\frac{a+1}{n}$, которыя, согласно опредѣленію, и будутъ приближенными корнями m-ой степени изъ числа A.

204. Точное значеніе $\sqrt[m]{A}$ въ томъ случаѣ, когда A не есть точная m-ая степень. Разъяснимъ, что въ этомъ случаѣ точная величина $\sqrt[m]{A}$ есть нѣкоторое несоизмѣримое число α, которое больше всякаго приближеннаго

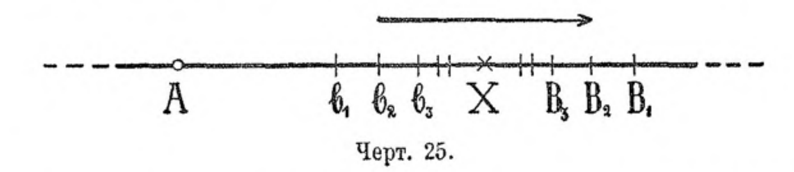
корня m-ой степени изъ A, если этотъ корень взятъ съ недостаткомъ, и меньше всякаго приближеннаго корня m-ой степени изъ A, если этотъ корень взятъ съ избыткомъ.

```
√3=1,7320...
 1
27|20'0
 7|18 9
343|1 10'0
  3|1 02 9
 3462|7 10'0
    2|6 92 4
  34640|1760,0
  ......|......
```

Для бо́льшей ясности мы будемъ говорить не о корнѣ m-ой степени вообще, а о корнѣ квадратномъ, и не изъ какого-нибудь положительнаго числа A, а изъ одного опредѣленнаго числа; напр., мы будемъ говорить о $\sqrt{3}$. Вообразимъ, что мы вычислили неограниченный рядъ приближенныхъ корней квадратныхъ изъ трехъ съ точностью: до 0,1, до 0,01, до 0,001, до 0,0001 и т. д. Эти значенія будутъ:

Съ недостаткомъ:	1,7	1,73	1,732	1,7320	....
Съ избыткомъ:	1,8	1,74	1,733	1,7321	....

Отнесемъ всѣ эти числа къ числовой прямой, на которой точка A принята за начало отрѣзковъ (черт. 25). Пусть точки: b_1, b_2, b_3... (и вобоще точки b) будутъ соотвѣтствовать числамъ верхней строки (т.-е. $Ab_1=1,7$, $Ab_2=1,73$... и т. д.), а точки B_1, B_2, B_3... (и вообще точки B) будутъ соотвѣтствовать числамъ нижней строки (т.-е. $AB_1=1,8$, $AB_2=1,74$..., и т. д.). Такъ



Черт. 25.

какъ каждый корень съ недостаткомъ всегда меньше каждаго корня съ избыткомъ (потому что квадратъ перваго меньше 3-хъ, а квадратъ второго больше 3-хъ), то каждая точка b должна лежать налѣво отъ каждой точки B. Съ другой стороны, разность между приближеннымъ корнемъ съ избыткомъ и соотвѣтствующимъ приближеннымъ корнемъ съ недостаткомъ

$\left(\text{т.-е. число } \frac{1}{n}\right)$ можетъ быть сдѣлана какъ угодно мала; поэтому при неограниченномъ увеличеніи степени точности, съ какою мы находимъ приближенные квадратные корни изъ 3-хъ, промежутокъ на числовой прямой, отдѣляющій точки b отъ точекъ B, (т.-е. промежутокъ b_1B_1, b_2B_2, b_3B_3...), становится все меньше и меньше и можетъ сдѣлаться какъ угодно малымъ. При этихъ условіяхъ мы должны допустить, что на прямой существуетъ нѣкоторая точка X (и только одна), которая служитъ границею, отдѣляющею ту часть прямой, на которой лежатъ всѣ точки b, отъ той части ея, на которой расположены всѣ точки B.

Чтобы сдѣлать нагляднымъ существованіе такой точки X, вообразимъ, что всѣ точки b, а также и вся часть прямой, лежащая налѣво отъ любой точки b, окрашена въ какой-нибудь одинаковый цвѣтъ, напр., въ зеленый, а всѣ точки B, а также и вся часть прямой, лежащая направо отъ любой точки B, окрашены въ другой цвѣтъ, напр., въ красный.

Такъ какъ каждая точка b лежитъ налѣво отъ каждой точки B, то ясно, что зеленая часть прямой не можетъ зайти на красную часть, и потому между этими частями должна быть какая-нибудь граница. Предположимъ, что зеленая часть будетъ отдѣляться отъ красной какимъ-нибудь неокрашеннымъ отрѣзкомъ прямой (напр., отрѣзкомъ b_3B_3, черт. 25); тогда, очевидно, промежутокъ между точками b и точками B не можетъ сдѣлаться меньше этого отрѣзка; между тѣмъ, какъ мы видѣли, этотъ промежутокъ можетъ сдѣлаться какъ угодно малымъ. Слѣдовательно, нельзя допустить, чтобы между зеленою и красною частями прямой былъ какой-нибудь, хотя бы и очень малый, отрѣзокъ прямой; но тогда остается только одно предположеніе, что границею между этими частями служитъ точка, напр., точка X (черт. 25) [1].

Обозначимъ буквою α положительное число, соотвѣтствующее этой точкѣ (т.-е. число, служащее мѣрой отрѣзка AX). Покажемъ, что квадратъ этого числа долженъ быть

[1]) Это наглядное поясненіе заимствовано нами изъ книги «Leçons d'algèbre et d'analyse» par Jules Tannery; tome premier, 1906.

въ точности равенъ 3. Пусть a и A будутъ какія-нибудь приближенныя значенія числа α, первое съ недостаткомъ, а второе съ избыткомъ. Тогда α^2, согласно опредѣленію степени (§ 201, 3°), есть такое число, которое больше каждаго a^2 и меньше каждаго A^2. Но приближенными значеніями числа α называются приближенные результаты измѣренія отрѣзка AX, которому мѣрой служитъ число α; эти же результаты суть тѣ числа, которыми выражаются отрѣзки Ab_1, Ab_2..., AB_1, AB_2... (черт. 25), т.-е. тѣ числа, которыя составляютъ приближенные квадратные корни изъ 3-хъ. Число же, бо́льшее квадрата каждаго приближеннаго квадратнаго корня изъ 3-хъ, взятаго съ недостаткомъ, и меньшее квадрата каждаго приближеннаго квадратнаго корня изъ 3-хъ, взятаго изъ избыткомъ, есть 3 (согласно опредѣленію приближенныхъ квадратныхъ корней изъ 3-хъ). Значитъ, α^2 и есть 3. Отсюда, конечно, слѣдуетъ, что число α должно быть несоизмѣримое, такъ какъ не существуетъ соизмѣримаго числа, квадратъ котораго равнялся бы 3.

Мы говорили о $\sqrt{3}$ только для простоты. Все сказанное объ этомъ частномъ случаѣ корня можно повторить о корнѣ любой m-ой степени изъ любого положительнаго числа A.

Такимъ образомъ, будетъ ли A точная или неточная m-ая степень, всегда можно сказать, что $\sqrt[m]{A}$ **есть нѣкоторое число** (соизмѣримое или несоизмѣримое), **m-ая степень котораго въ точности равна A.** Поэтому всѣ свойства радикаловъ, основанныя на этомъ опредѣленіи корня (эти свойства выражены 3-мя теоремами § 166-го), примѣнимы также и къ несоизмѣримымъ ихъ значеніямъ. Такимъ образомъ, каковы бы ни были положительныя числа a, b, c..., всегда можемъ писать:

$$\sqrt[m]{abc\ldots}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}\cdot\sqrt[m]{c}\ldots;\quad \sqrt[m]{a^{mn}}=a^n;\quad \sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

ГЛАВА VIII.

Дѣйствія надъ радикалами.

Предварительное замѣчаніе. Всѣ корни, о которыхъ говорится въ этой главѣ, предполагаются ариѳметическими (§ 162).

205. Теорема. Величина корня не измѣнится, если показателя его и показателя подкоренного числа:

1°, умножимъ на одно и то же цѣлое и положительное число или, 2°, раздѣлимъ на одно и то же цѣлое и положительное число, если таковое дѣленіе совершается нацѣло.

Доказательство. 1°. Требуется доказать, что

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}},$$

гдѣ m, n и p какія-нибудь цѣлыя положительныя числа. Для доказательства возвысимъ обѣ части этого предполагаемаго равенства въ np-ю степень. Отъ возвышенія правой части равенства получимъ a^{mp} (такъ какъ извлеченіе корня np-й степени и возвышеніе въ np-ю степень суть дѣйствія, взаимно уничтожающіяся). Чтобы возвысить лѣвую часть равенства въ np-ю степень, мы можемъ (§155, теор. 2) возвысить ее сначала въ n-ую степень (получимъ a^m), а потомъ въ p-ую степень (получимъ a^{mp}). Мы видимъ, такимъ образомъ, что два числа: $\sqrt[n]{a^m}$ и $\sqrt[np]{a^{mp}}$, отъ возвышенія въ одну и ту же np-ю степень, даютъ одно и то же число a^{mp}; слѣдов., оба эти числа представляютъ собою ариѳметическій корень np-й степени изъ числа a^{mp}. Но ариѳметическій корень данной степени изъ даннаго числа можетъ быть только одинъ (§ 163, III); поэтому $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$.

2°. Читая доказанное равенство справа налѣво, т.-е. такъ:

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m},$$

мы замѣчаемъ, что величина корня не измѣняется отъ дѣленія его показателя и показателя подкоренного числа на одно и то же цѣлое и положительное число, когда такое дѣленіе совершается нацѣло.

Замѣчаніе. Число p, на которое мы умножаемъ или дѣлимъ показателей корня и подкоренного числа, предполагалось нами ц ѣ л ы м ъ и п о л о ж и т е л ь н ы м ъ, потому что если бы оно было дробное или отрицательное, то мы получили бы корень (и подкоренное число) съ показателемъ дробнымъ или отрицательнымъ, а корней съ такими показателями мы не разсматриваемъ. По той же причинѣ при дѣленіи показателей корня и подкоренного числа на p предполагается, что это дѣленіе выполняется нацѣло.

206. Слѣдствія. 1°. **Показателей нѣсколькихъ корней можно сдѣлать одинаковыми** (подобно тому, какъ знаменателей нѣсколькихъ дробей можно сдѣлать равными). Для этого достаточно найти общее кратное (лучше всего, наименьшее) показателей всѣхъ радикаловъ и помножить показателя каждаго изъ нихъ и показателя подкоренного числа на соотвѣтствующаго дополнительнаго множителя.

Примѣръ. $\sqrt{ax}, \sqrt[3]{a^2}, \sqrt[12]{x}.$

Наименьшее кратное показателей этихъ радикаловъ есть 12; дополнительными множителями будутъ: для перваго радикала 6, для второго 4 и для третьяго 1; на основаніи доказанной теоремы можемъ написать:

$$\sqrt{ax}=\sqrt[12]{(ax)^6}=\sqrt[12]{a^6x^6};\ \sqrt[3]{a^2}=\sqrt[12]{a^8};\ \sqrt[12]{x}=\sqrt[12]{x}.$$

2°. **Показателя корня и показателя подкоренного числа можно сократить на ихъ общаго множителя, если онъ есть.**

Примѣры. 1) $\sqrt[8]{a^6}=\sqrt[4]{a^3}$; 2) $\sqrt[6]{(1+x)^3}=\sqrt{1+x}.$

3°. **Если подкоренное выраженіе представляетъ собою произведеніе степеней, показатели которыхъ имѣютъ одного и того же общаго множителя съ показателемъ корня, то на этого множителя можно сократить всѣхъ показателей.**

Примѣръ. $\sqrt[12]{64a^{12}b^6x^{18}}=\sqrt[12]{(2a^2bx^3)^6}=\sqrt{2a^2bx^3}.$

207. Подобные радикалы. Подобными радикалами наз. такіе, у которыхъ одинаковы подкоренныя выраженія и одинаковы показатели радикаловъ (различаться могутъ, слѣдовательно, только множители, стоящіе передъ знакомъ радикала). Таковы, напр., выраженія: $+3a\sqrt[3]{xy}$ и $-5b\sqrt[3]{xy}$.

Чтобы опредѣлить, подобны ли между собою данные радикалы, слѣдуетъ предварительно упростить ихъ, т.-е. если возможно:

1) вынести изъ-подъ знака радикала тѣхъ множителей, изъ которыхъ возможно извлечь корень (§ 168, 1°);

2) освободиться подъ радикалами отъ знаменателей дробей (§ 168, 3°);

3) понизить степень радикала, сокративъ показателей корня и подкоренного числа на общаго множителя (§ 206, 3°).

Примѣръ 1. Радикалы: $\sqrt[3]{8ax^3}$, $\sqrt[6]{64a^2y^{12}}$ окажутся подобными, если ихъ упростимъ такъ:

$$\sqrt[3]{8ax^3}=2x\sqrt[3]{a};\ \sqrt[6]{64a^2y^{12}}=2y^2\sqrt[6]{a^2}=2y^2\sqrt[3]{a}.$$

Примѣръ 2. Три радикала $\sqrt{\frac{2x}{3}}$, $\sqrt{\frac{6}{x}}$ и $\sqrt{6x}$ окажутся подобными, если освободимся подъ радикалами отъ знаменателей:

$$\sqrt{\frac{2x}{3}}=\sqrt{\frac{2x\,.\,3}{3\,.\,3}}=\sqrt{\frac{6x}{9}}=\frac{\sqrt{6x}}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{6x},$$

$$\sqrt{\frac{6}{x}}=\sqrt{\frac{6\,.\,x}{x\,.\,x}}=\sqrt{\frac{6x}{x^2}}=\frac{\sqrt{6x}}{x}=\frac{1}{x}\sqrt{6x}.$$

208. Дѣйствія надъ ирраціональными одночленами.

1°. **Сложеніе и вычитаніе.** Чтобы сложить или вычесть ирраціональные одночлены (т.-е. одночлены, въ которые входитъ дѣйствіе извлеченія корня), соединяютъ ихъ знаками + или — и, если возможно, дѣлаютъ приведеніе подобныхъ радикаловъ.

Примѣры.

1) $a\sqrt[3]{a^4bc}+b\sqrt[3]{ab^7c}+c\sqrt[3]{abc^{10}}=a^2\sqrt[3]{abc}+b^3\sqrt[3]{abc}+c^4\sqrt[3]{abc}=$
$=(a^2+b^3+c^4)\sqrt[3]{abc};$

2) $15\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{32}-16\sqrt[3]{\frac{1}{16}}-\sqrt[3]{108}=15\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{4}-4\sqrt[3]{4}-$
$-3\sqrt[3]{4}=2\sqrt[3]{4};$

3) $\frac{2}{3}x\sqrt{9x}+6x\sqrt{\frac{x}{4}}-x^2\sqrt{\frac{1}{x}}=2x\sqrt{x}+3x\sqrt{x}-x\sqrt{x}=4x\sqrt{x}.$

2°. **Умноженіе.** Такъ какъ $\sqrt[n]{abc\ldots}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\ldots$ (§ 166, теор. 1), то и наоборотъ: $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\ldots=\sqrt[n]{abc\ldots}$; значитъ, **чтобы перемножить нѣсколько радикаловъ съ одинаковыми показателями, достаточно перемножить подкоренныя числа.**

Если для перемноженія даны радикалы съ различными показателями, то ихъ предварительно приводятъ къ одинаковому показателю.

Если передъ радикалами есть коэффиціенты, то ихъ перемножаютъ.

Примѣры.

1) $ab\sqrt{2a}\cdot\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{2}}\cdot 2b\sqrt{ab}=2a^2b\sqrt{a^2b^2}=2a^3b^2;$

2) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{2}}=\sqrt[12]{3^3}\sqrt[12]{\left(\frac{1}{3}\right)^4}\cdot\sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt[12]{3^3\cdot\frac{1}{3^4}\cdot\frac{1}{2^2}}=\sqrt[12]{\frac{1}{12}}.$

3°. **Дѣленіе.** Такъ какъ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (§ 166, теор. 3), то и наоборотъ: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$; значитъ, **чтобы раздѣлить радикалы съ одинаковыми показателями, достаточно раздѣлить ихъ подкоренныя числа.**

Радикалы съ различными показателями предварительно приводятъ къ одинаковому показателю.

Если есть коэффиціенты, то ихъ дѣлятъ.

Примѣры.

1) $-6\sqrt{\frac{2a-2b}{x^2}}:\frac{4}{5}\sqrt{\frac{a-b}{2bx^2}}=-\frac{6.5}{4}\sqrt{\frac{2(a-b)2bx^2}{x^2(a-b)}}=-15\sqrt{b}.$

2) $\sqrt[5]{\frac{2a+b}{a+b}-1}:\sqrt[5]{1-\frac{b}{a+b}}=\sqrt[5]{\frac{a}{a+b}}:\sqrt[5]{\frac{a}{a+b}}=1.$

3) $\frac{3a^2}{25b}\sqrt[4]{\frac{a^2}{a-x}}:\frac{2a}{5b}\sqrt{\frac{2a^3}{a-x}}=\frac{15a^2b}{50ab}\sqrt[4]{\frac{a^2(a-x)^2}{(a-x)4a^6}}=\frac{3}{10}\sqrt[4]{\frac{a-x}{4}}.$

4°. **Возвышеніе въ степень. Чтобы возвысить радикалъ въ степень, достаточно возвысить въ эту степень подкоренное число.** Дѣйствительно, если показатель степени есть цѣлое положительное число m, то:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{a}\ldots=\sqrt[n]{aaa\ldots}=\sqrt[n]{a^m}.$$

Эта теорема остается вѣрной и для отрицательнаго показателя $-m$; дѣйствительно, тогда:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{-m}=\frac{1}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}},$$

и $\sqrt[n]{a^{-m}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$, значитъ: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{-m}=\sqrt[n]{a^{-m}}.$

Наконецъ, если показатель степени есть 0, то

$$(\sqrt[n]{a})^0=1 \text{ и } \sqrt[n]{a^0}=\sqrt[n]{1}=1\text{: слѣд., } \left(\sqrt[n]{a}\right)^0=\sqrt[n]{a^0}.$$

Примѣры.

1) $\left(\sqrt[4]{2ab^3x^2}\right)^3=\sqrt[4]{(2ab^3x^2)^3}=\sqrt[4]{8a^3b^9x^6}=b^2x\sqrt[4]{8a^3bx^2};$

2) $\left(\sqrt[6]{\frac{2x}{1+x}}\right)^3=\sqrt[6]{\left(\frac{2x}{1+x}\right)^3}=\sqrt{\frac{2x}{1+x}};$

3) $\left(a\sqrt{a\sqrt[3]{b}}\right)^3 = a^3\left(\sqrt{a\sqrt[3]{b}}\right)^3 = a^3\sqrt{\left(a\sqrt[3]{b}\right)^3} = a^3\sqrt{a^3\left(\sqrt[3]{b}\right)^3} =$
$= a^3\sqrt{a^3b} = a^4\sqrt{ab}.$

5⁰. **Извлеченіе корня. Чтобы извлечь корень изъ радикала, достаточно перемножить ихъ показателей.**

Требуется доказать, что $\sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}$, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$ и вообще:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Для доказательства возвысимъ обѣ части этого предполагаемаго равенства въ mn-ую степень. Отъ возвышенія правой части получимъ, по опредѣленію корня, a; чтобы возвысить лѣвую часть въ mn-ую степень, можно возвысить сначала въ n-ую степень, потомъ результатъ въ m-ую степень:

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n\right]^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a.$$

Отсюда видно, что предполагаемое равенство вѣрно.

Слѣдствія. 1⁰. Результатъ нѣсколькихъ послѣдовательныхъ извлеченій корней не зависитъ отъ порядка дѣйствій; такъ:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} \text{ и } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \text{ слѣд., } \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

2⁰. Извлеченіе корня, у котораго показатель число составное, сводится къ послѣдовательному извлеченію корней, у которыхъ показатели простые множители этого составного числа. Такъ:

$$\sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{a}};\quad \sqrt[18]{a} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{a}}};\quad \sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}.$$

Примѣръ. Преобразовать выраженіе $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{2x^2\sqrt{\frac{3}{4}x^3}}}$.

Подведемъ множителя $2x^2$ подъ знакъ квадратнаго радикала, для чего предварительно возвысимъ его въ квадратъ; тогда получимъ:

$$\sqrt[4]{x\sqrt[3]{\sqrt{(2x^2)^2\cdot\frac{3}{4}x^3}}}=\sqrt[4]{x\sqrt[3]{\sqrt{4x^4\cdot\frac{3}{4}x^3}}}=\sqrt[4]{x\sqrt[3]{\sqrt{3x^7}}}=\sqrt[4]{x\sqrt[6]{3x^7}}$$

Теперь подведемъ множителя x подъ знакъ радикала 6-й степени; тогда получимъ:

$$\sqrt[4]{\sqrt[6]{x^6\cdot 3x^7}}=\sqrt[4]{\sqrt[6]{3x^{13}}}=\sqrt[24]{3x^{13}}.$$

209. Дѣйствія надъ ирраціональными многочленами производятся по тѣмъ же правиламъ, какія были выведены раньше для многочленовъ раціональныхъ. Напр.:

1) $\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}-5\sqrt{0,3}\right)^2=\frac{4}{5}-4\sqrt{1,5}+7,5=8,3-4\sqrt{1,5};$

2) $\left(n\sqrt[3]{nx^2}-2n^2x\sqrt[3]{n^2x}+x\sqrt[3]{\frac{n}{x}}\right):n^2\sqrt[3]{nx^2}=$

$$=\frac{1}{n}-2x\sqrt[3]{\frac{n}{x}}+\frac{x}{n^2}\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{n}-2\sqrt[3]{nx^2}+\frac{1}{n^2}.$$

210. Освобожденіе знаменателя дроби отъ радикаловъ. При вычисленіи дробныхъ выраженій, знаменатели которыхъ содержатъ радикалы, бываетъ полезно предварительно преобразовать дробь такъ, чтобы знаменатель ея не содержалъ радикаловъ. Чтобы указать пользу такого преобразованія, положимъ для примѣра, что намъ нужно вычислить:

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \qquad (1)$$

Мы можемъ производить вычисленія или прямо по этой формулѣ, или же предварительно сдѣлать ея знаменателя раціональнымъ, для чего достаточно умножить оба члена дроби (1) на сумму $\sqrt{3}+\sqrt{2}$:

$$x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}. \qquad (2)$$

Формула (2), очевидно, удобнѣе для вычисленія, чѣмъ формула (1) [1]).

Приведемъ простѣйшіе примѣры освобожденія знаменателя дроби отъ радикаловъ [2]):

1) $\frac{m}{n\sqrt{a}}$. Умноживъ числителя и знаменателя на $\sqrt{a}$, получимъ:

$$\frac{m}{n\sqrt{a}}=\frac{m\sqrt{a}}{na}.$$

Когда a есть число цѣлое составное, то полезно разложить его на простыхъ множителей съ цѣлью опредѣлить, какихъ множителей недостаетъ въ немъ для того, чтобы a было точнымъ квадратомъ. Тогда достаточно умножить оба члена дроби на квадратный корень изъ произведенія только недостающихъ множителей; такъ, напр.:

$$\frac{m}{\sqrt{40}}=\frac{m}{\sqrt{2.2.2.5}}=\frac{m\sqrt{2.5}}{\sqrt{2^3.5.}\ \sqrt{2.5}}=\frac{m\sqrt{10}}{\sqrt{2^4.5^2}}=\frac{m\sqrt{10}}{2^2.5}=\frac{m\sqrt{10}}{20}.$$

2) $\frac{m}{a+\sqrt{b}}$ Умножимъ числителя и знаменателя на $a-\sqrt{b}$:

$$\frac{m}{a+\sqrt{b}}=\frac{m(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}=\frac{ma-m\sqrt{b}}{a^2-b}.$$

3) Подобно этому для освобожденія отъ радикала знаменателя дроби $\frac{m}{a-\sqrt{b}}$ достаточно умножить оба ея члена на $a+\sqrt{b}$.

---

[1]) *Удобнѣе не только потому*, что она содержитъ 3 дѣйствія, а не 4, какъ формула (1), но также и потому, что при вычисленіи, которое по необходимости можетъ быть только приближенное, степень погрѣшности результата сравнительно просто опредѣляется по формулѣ (2) Такъ, вычисливъ $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$ съ точностью до $\frac{1}{1000}$, т.-е. положивъ $\sqrt{3}=1{,}732\ldots$ и $\sqrt{2}=1{,}414\ldots$, мы получимъ по формулѣ (2) число $3{,}146\ldots$, которое, какъ легко сообразить, точно до $\frac{2}{1000}$ (слѣд., въ этомъ числѣ нельзя ручаться за правильность цифры тысячныхъ).

[2]) *Общій способъ* освобожденія знаменателя дроби отъ радикаловъ указанъ ниже, въ § 236.

4) $\frac{m}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$. Умножимъ числителя и знаменателя на $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$:

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{m\sqrt{a}-m\sqrt{b}}{a-b}.$$

$$\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{m\sqrt{a}+m\sqrt{b}}{a-b}.$$

5) $\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$. Желая сначала освободить знаменателя отъ радикала $\sqrt{c}$, примемъ совокупность остальныхъ членовъ за одночленъ; тогда знаменатель приметъ видъ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}$. Умножимъ теперь числителя и знаменателя дроби на $(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}$. Тогда въ знаменателѣ получимъ: $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c=(a+b-c)+2\sqrt{ab}$. Умноживъ опять числителя и знаменателя на $(a+b-c)-2\sqrt{ab}$, получимъ въ знаменателѣ раціональное выраженіе $(a+b-c)^2-4ab$.

6) Подобнымъ пріемомъ можно уничтожить въ знаменателѣ сколько угодно квадратныхъ радикаловъ. Пусть, напримѣръ, знаменатель есть: $\sqrt{a}+\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}$. Представивъ его въ видѣ: $\sqrt{a}+\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{a}\sqrt{c}+\sqrt{b}\sqrt{c}$, замѣчаемъ, что имѣемъ дѣло съ тремя различными радикалами: $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$. Желая освободиться отъ радикала $\sqrt{a}$, вынесемъ его за скобки изъ всѣхъ членовъ, гдѣ онъ встрѣчается: $\sqrt{a}(1+\sqrt{b}+\sqrt{c})+\sqrt{bc}$. Теперь очевидно, что для уничтоженія $\sqrt{a}$ достаточно умножить знаменателя (а слѣд., и числителя) на $\sqrt{a}(1+\sqrt{b}+\sqrt{c})-\sqrt{bc}$; тогда въ знаменателѣ получимъ:

$$a(1+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-bc=a+ab+ac+2a\sqrt{b}+2a\sqrt{c}+2a\sqrt{bc}-bc.$$

Желая теперь освободиться отъ $\sqrt{b}$, представимъ знаменателя въ видѣ двучлена:

$$\sqrt{b}(2a+2a\sqrt{c})+(a+ab+ac-bc+2a\sqrt{c})$$

и умножимъ числителя и знаменателя дроби на разность этихъ членовъ; тогда въ знаменателѣ получимъ:

$$b(2a+2a\sqrt{c})^2-(a+ab+ac-bc+2a\sqrt{c})^2.$$

Раскрывъ скобки и поступая съ $\sqrt{c}$ совершенно такъ же, освободимся и отъ него.

7) Если знаменатель имѣетъ видъ: $\sqrt[3]{a} \mp b$, или $a \mp \sqrt[3]{b}$, или $\sqrt[3]{a} \mp \sqrt[3]{b}$, то мы можемъ сдѣлать его раціональнымъ, основываясь на тождествахъ (§ 80, VI):

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$$
$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3.$$

Пусть, напр., дана дробь $\frac{m}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$. Обозначивъ для краткости $\sqrt[3]{a}$ черезъ x и $\sqrt[3]{b}$ черезъ y, умножимъ числителя и знаменателя на x^2+xy+y^2:

$$\frac{m}{x-y}=\frac{m(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{mx^2+mxy+my^2}{x^3-y^3}.$$

Но $x^3=a$ и $y^3=b$; слѣд.:

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{m(\sqrt[3]{a})^2+m\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+m(\sqrt[3]{b})^2}{a-b}=\frac{m\sqrt[3]{a^2}+m\sqrt[3]{ab}+m\sqrt[3]{b^2}}{a-b}.$$

8. Вообще, когда знаменатель дроби есть биномъ, представляющій сумму или разность двухъ радикаловъ какой угодно степени, то его можно сдѣлать раціональнымъ, основываясь на тождествѣ (§ 79):

$$(x-y)\ (x^{n-1}+yx^{n-2}+y^2x^{n-3}+\ldots+y^{n-1})=x^n-y^n.$$

Пусть, напр., знаменатель имѣетъ видъ:

$$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}=x-y, \text{ гдѣ } x=\sqrt[n]{a},\ y=\sqrt[n]{b},$$

Умноживъ числителя и знаменателя на

$$x^{n-1}+yx^{n-2}+y^2x^{n-3}+\ldots+y^{n-1},$$

получимъ въ знаменателѣ $x^n-y^n=a-b$

Если знаменатель есть $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$, то, представивъ его въ видѣ:

$$\sqrt[n]{a}-(-\sqrt[n]{b})=x-y, \text{ гдѣ } x=\sqrt[n]{a},\ y=-\sqrt[n]{b},$$

сведемъ этотъ случай на предыдущій.

Подобнымъ же образомъ поступаемъ, когда знаменатель имѣетъ видъ $m \mp \sqrt{b}$

Если знаменатель есть биномъ $\sqrt[n]{a} \mp \sqrt[m]{b}$, то можно предварительно привести эти радикалы къ одинаковымъ показателямъ:

$$\sqrt[n]{a} \mp \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m} \mp \sqrt[nm]{b^n}$$

и потомъ поступать по предыдущему.

Примѣръ. $\dfrac{M}{\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{M}{\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[6]{b^3}} =$

$$= \frac{M\left[(\sqrt[6]{a^2})^5+\sqrt[6]{b^3}(\sqrt[6]{a^2})^4+ba+(\sqrt[6]{b^3})^3(\sqrt[6]{a^2})^2+(\sqrt[3]{b^3})\sqrt[6]{a^2}+(\sqrt[6]{b^3})^5\right]}{a^2-b^3} =$$

$$= M\left(a\sqrt[3]{a^2}+a\sqrt{b}\sqrt[3]{a}+ba+b\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b}+b^2\sqrt[3]{a}+b^2\sqrt{b}\right):(a^2-b^3).$$

Примѣры.

1) $$\frac{\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{6})(2\sqrt{2}-\sqrt{6})}{8-6} =$$

$$= \frac{4-\frac{2}{3}\sqrt{12}-\sqrt{12}+2}{2} = 3-\frac{5}{6}\sqrt{21} = 3-\frac{5}{3}\sqrt{3}.$$

2) $$\frac{4\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{2}(2+\sqrt{2}-\sqrt{6})}{(2+\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{8\sqrt{2}+8-4\sqrt{12}}{4+4\sqrt{2}+2-6} =$$

$$= \frac{8\sqrt{2}+8-8\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{16+8\sqrt{2}-8\sqrt{6}}{8} = 2+\sqrt{2}-\sqrt{6};$$

3) $$\frac{1-a}{\sqrt{1-\sqrt{a}}} = \frac{(1-a)\sqrt{1+\sqrt{a}}}{\sqrt{1-\sqrt{a}}\sqrt{1+\sqrt{a}}} = \frac{(1-a)\sqrt{1+\sqrt{a}}}{\sqrt{1-a}} =$$

$$= \sqrt{1-a}\sqrt{1+\sqrt{a}} = \sqrt{(1-a)(1+\sqrt{a})};$$

4) $$\frac{5}{\sqrt[4]{3}-2\sqrt{3}} = \frac{5(\sqrt[4]{3}+2\sqrt{3})}{\sqrt{3}-12} = \frac{5(\sqrt[4]{3}+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+12)}{-141}.$$

ОТДѢЛЪ V.

Уравненія степени выше первой.

ГЛАВА I.

Квадратное уравненіе.

211. Нормальный видъ квадратнаго уравненія.

Чтобы судить о степени уравненія, въ немъ надо предварительно сдѣлать слѣдующія преобразованія (§ 115): раскрыть скобки, освободиться отъ знаменателей, перенести всѣ члены, содержащіе неизвѣстное, въ одну часть уравненія и, наконецъ, сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ. Къ этимъ преобразованіямъ мы теперь добавимъ еще одно: если въ уравненіе входятъ радикалы, подкоренныя выраженія которыхъ содержатъ неизвѣстное, то отъ такихъ радикаловъ уравненіе надо освободить (какъ это сдѣлать, будетъ указано впослѣдствіи). Предположимъ, что всѣ эти преобразованія сдѣланы. Если послѣ этого въ уравненіи съ однимъ неизвѣстнымъ x окажется членъ, содержащій x^2, но не будетъ членовъ, содержащихъ x въ болѣе высокой степени, то такое уравненіе наз. уравненіемъ второй степени или квадратнымъ.

Въ уравненіи второй степени (а также и въ уравненіяхъ болѣе высокихъ степеней) обыкновенно переносятъ всѣ члены уравненія въ одну лѣвую часть, такъ что правая часть уравненія дѣлается равной нулю; тогда квадратное уравненіе получаетъ слѣдующій видъ, называемый нормальнымъ:

$$ax^2+bx+c=0,$$

въ которомъ буквы a, b и c означаютъ какія-нибудь данныя алгебраическія числа или же алгебраическія выраженія, составленныя изъ данныхъ чиселъ. Числа a, b и c называются коэффиціентами квадратнаго уравненія; изъ нихъ c наз. также свободнымъ членомъ. Когда ни одинъ изъ этихъ коэффиціентовъ не равенъ нулю, квадратное уравненіе наз. полнымъ.

Замѣтимъ, что коэффиціентъ a мы всегда можемъ сдѣлать положительнымъ, перемѣнивъ въ случаѣ надобности передъ всѣми членами уравненія знаки на противоположные.

Примѣръ 1. $\frac{6}{x}+\frac{x}{6}=\frac{5(x+1)}{4}$.

Раскрываемъ скобки: $\frac{6}{x}+\frac{x}{6}=\frac{5x+5}{4}$.

Уничтожаемъ знаменателей: $72+2x^2=15x^2+15x$.

Переносимъ всѣ члены въ лѣвую часть: $72+2x^2-15x^2-15x=0$.

Дѣлаемъ приведеніе: $-13x^2-15x+72=0$.

Перемѣняемъ знаки: $13x^2+15x-72=0$.

Коэффиціенты a, b и c общаго вида квадратнаго уравненія приняли въ этомъ примѣрѣ такія частныя значенія: $a=13$, $b=15$ и $c=-72$.

Примѣръ 2. $\frac{x}{a-b}-\frac{1}{2\sqrt{a}-x}=0$.

$$x(2\sqrt{a}-x)-(a-b)=0;\quad 2x\sqrt{a}-x^2-(a-b)=0.$$

$$x^2-2x\sqrt{a}+(a-b)=0.$$

Коэффиціенты общаго вида квадратнаго уравненія здѣсь приняли такія частныя значенія: $a=1$, $b=-2\sqrt{a}$, $c=a-b$.

Замѣчаніе. Такъ какъ въ этихъ примѣрахъ намъ пришлось отбросить общаго знаменателя, содержащаго неизвѣстное, то надо рѣшить вопросъ, не ввели ли мы этимъ посторонняго рѣшенія, обращающаго въ нуль отброшеннаго знаменателя. Въ примѣрѣ 1-мъ общій знаменатель $12x$ обращается въ 0 при $x=0$; въ примѣрѣ 2-мъ общій знаменатель $(a-b)(2\sqrt{a}-x)$,

если $a \neq b$, обращается въ 0 при $x=2\sqrt{a}$. Подставивъ эти значенія x въ получившіяся квадратныя уравненія, находимъ, что они имъ не удовлетворяютъ; слѣд., отбрасываніе общаго знаменателя не ввело постороннихъ рѣшеній.

212. Болѣе простой видъ квадратнаго уравненія. Уравненію $ax^2+bx+c=0$ часто придаютъ болѣе простой видъ, раздѣливъ всѣ его члены на коэффиціентъ при x^2. Обозначивъ для краткости $\frac{b}{a}$ черезъ p, а $\frac{c}{a}$ черезъ q, получимъ:

$$x^2+px+q=0.$$

Такъ, уравненіе $3x^2-15x+2=0$, по раздѣленіи всѣхъ его членовъ на 3, приметъ видъ: $x^2-5x+\frac{2}{3}=0$. Здѣсь $p=-5$, $q=\frac{2}{3}$.

213. Неполныя квадратныя уравненія. Рѣшеніе ихъ. Квадратное уравненіе наз. неполнымъ, когда въ немъ нѣтъ члена, содержащаго x въ первой степени, или нѣтъ свободнаго члена, или нѣтъ ни того, ни другого. Значитъ, неполныя квадратныя уравненія могутъ быть только трехъ слѣдующихъ видовъ:

1) $ax^2+c=0$ (когда $b=0$);
2) $ax^2+bx=0$ (когда $c=0$);
3) $ax^2=0$ (когда $b=c=0$).

Разсмотримъ рѣшеніе каждаго изъ нихъ.

I. Изъ уравненія $ax^2+c=0$ находимъ слѣдующія равносильныя уравненія:

$$ax^2=-c \text{ и } x^2=-\frac{c}{a}.$$

Послѣднее уравненіе требуетъ, чтобы квадратъ неизвѣстнаго равнялся числу $-\frac{c}{a}$; значитъ, неизвѣстное должно равняться квадратному корню изъ этого числа. Это возможно только тогда, когда численная величина выраженія $-\frac{c}{a}$ положительна, что будетъ тогда, когда численная величина дроби $\frac{c}{a}$ отрицательна,

т.-е. когда буквы c и a означаютъ числа съ противоположными знаками (если, напримѣръ, $c=-8$, $a=+2$, то $-\frac{c}{a}=-\frac{-8}{+2}=+4$).

Условимся обозначать знакомъ $\sqrt{\ }$ только ариѳметическое значеніе квадратнаго корня и примемъ во вниманіе, что квадратный корень изъ положительнаго числа имѣетъ два значенія (§ 165, III); тогда уравненіе $x^2=-\frac{c}{a}$ равносильно такому:

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Обозначая одно значеніе корня черезъ x_1, а другое черезъ x_2, мы можемъ послѣднее уравненіе подробнѣе выразить такъ:

$$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}};\quad x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ получаются 2 различныхъ рѣшенія квадратнаго уравненія.

Если же буквы c и a означаютъ числа съ одинаковыми знаками, то выраженіе $-\frac{c}{a}$ представляетъ собою отрицательное число; тогда уравненіе $ax^2+c=0$ не можетъ быть удовлетворено никакимъ вещественнымъ числомъ; въ этомъ случаѣ говорятъ, что уравненіе имѣетъ два мнимыхъ корня.

Примѣръ 1. Рѣшить уравненіе $3x^2-27=0$.

$$3x^2=27;\quad x^2=9;\quad x=\pm\sqrt{9}=\pm3.$$

(подробнѣе: $x_1=3$, $x_2=-3$).

Примѣръ 2. Рѣшить уравненіе $x^2+25=0$.

$$x^2=-25;\quad x=\pm\sqrt{-25};\ \text{корни мнимые.}$$

II. Чтобы рѣшить уравненіе $ax^2+bx=0$, представимъ его такъ: $x(ax+b)=0$. Въ этомъ видѣ лѣвая часть уравненія представляетъ собою произведеніе двухъ сомножителей: x и $ax+b$. Но чтобы произведеніе равнялось нулю, необходимо и достаточно,

чтобы какой-нибудь изъ сомножителей равнялся нулю; слѣд., разсматриваемое уравненіе удовлетворится, когда положимъ, что $x=0$, или $ax+b=0$. Второе уравненіе даетъ: $x=-\frac{b}{a}$. Значитъ, уравненіе $ax^2+bx=0$ имѣетъ два вещественные корня: $x_1=0$ и $x_2=-\frac{b}{a}$.

Примѣръ. $2x^2-7x=0$, $x(2x-7)=0$; $x_1=0$; $x_2=\frac{7}{2}$.

III. Наконецъ, квадратное уравненіе $ax^2=0$ имѣетъ (если $a\neq 0$) только одно рѣшеніе: $x=0$.

214. Рѣшеніе уравненія вида $x^2+px+q=0$. Перенеся свободный членъ въ правую часть, получимъ: $x^2+px=-q$. Двучленъ x^2+px можно разсматривать, какъ выраженіе $x^2+2\cdot\frac{p}{2}x$, т.-е. какъ сумму квадрата x съ удвоеннымъ произведеніемъ x на $\frac{p}{2}$. Отсюда заключаемъ, что если къ этому двучлену придадимъ число $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, то получимъ трехчленъ, представляющій собою квадратъ суммы $x+\frac{p}{2}$. Замѣтивъ это, приложимъ къ обѣимъ частямъ уравненія по $\left(\frac{p}{2}\right)^2$; тогда получимъ такое равносильное уравненіе:

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ или } \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

Послѣднее уравненіе требуетъ, чтобы квадратъ числа $x+\frac{p}{2}$ равнялся $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$; это значитъ, что первое число есть корень квадратный изъ второго. Обозначая попрежнему знакомъ $\sqrt{}$ только ариѳметическое значеніе квадратнаго корня и принявъ во вниманіе, что квадратный корень имѣетъ два значенія, отличающіяся знаками, мы можемъ написать:

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

и, слѣдов.: $$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},$$

или подробнѣе:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},\quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Никакого третьяго значенія x имѣть не можетъ, такъ какъ сумма $x+\frac{p}{2}$, будучи такимъ числомъ, квадратъ котораго долженъ равняться числу $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$, можетъ имѣть только 2 указанныхъ значенія.

Полученныя 2 формулы для неизвѣстнаго x мы можемъ высказать такъ:

неизвѣстное квадратнаго уравненія, у котораго коэффиціентъ при x^2 есть 1, равно половинѣ коэффиціента при неизвѣстномъ въ 1-й степени съ противоположнымъ знакомъ, плюсъ, минусъ корень квадратный изъ квадрата этой половины безъ свободнаго члена.

Замѣчаніе. Если p есть число отрицательное, то выраженіе $-\frac{p}{2}$ должно быть числомъ положительнымъ; точно такъ же если q число отрицательное, то $-q$ число положительное.

Примѣры. 1) $x^2-7x+10=0$; здѣсь $p=-7$, $q=+10$;

поэтому: $$x=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2-10}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{7}{2}\pm\frac{3}{2}.$$

Слѣдовательно: $x_1=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=5$, $x_2=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}=2$.

Повѣрка: $5^2-7\,.\,5+10=0$; $2^2-7\,.\,2+10=0$.

2) $x^2-x-6=0$; здѣсь $p=-1$, $q=-6$, поэтому:

$$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2};$$

$$x_1=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3,\quad x_2=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-2.$$

Повѣрка: $3^2-3-6=0$; $(-2)^2-(-2)-6=0$.

3) $x^2-2x+5=0$; $x=1\pm\sqrt{1-5}=1\pm\sqrt{-4}$. Корни мнимые.

4) $x^2-18x+81=0$; $x=9\pm\sqrt{81-81}=9$. Уравненіе имѣетъ только одинъ корень.

215. Рѣшеніе уравненія вида $ax^2+bx+c=0$.

Раздѣливъ всѣ члены этого уравненія на a, получимъ:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Примѣнимъ къ этому виду уравненія формулу, выведенную раньше для уравненія $x^2+px+q=0$, и упростимъ ее:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=$$

$$=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Полученную формулу можно выразить словами такъ: **неизвѣстное квадратнаго уравненія равно дроби, у которой числитель есть коэффиціентъ при неизвѣстномъ въ первой степени съ противоположнымъ знакомъ, плюсъ, минусъ корень квадратный изъ квадрата того же коэффиціента безъ учетвереннаго произведенія коэффиціента при неизвѣстномъ во второй степени на свободный членъ, а знаменатель есть удвоенный коэффиціентъ при неизвѣстномъ во второй степени.**

Замѣчаніе. Выведенная формула представляетъ собою общее рѣшеніе квадратнаго уравненія, потому что изъ нея можно получить какъ рѣшеніе упрощеннаго полнаго уравненія $x^2+px+q=0$ (полагая $a=1$), такъ и рѣшеніе неполныхъ квадратныхъ уравненій (полагая $b=0$ или $c=0$).

Примѣры.

1) $3x^2-7x+4=0$; здѣсь $a=3$, $b=-7$, $c=4$.

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\,.\,3\,.\,4}}{2\,.\,3}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{6}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{6}.$$

$$x_1=\frac{8}{6}=\frac{4}{3},\ x_2=1.$$

2) $2x^2-3x+10=0$; здѣсь $a=2$, $b=-3$, $c=10$.

$$x_1=\frac{3+\sqrt{-71}}{4},\ x_2=\frac{3-\sqrt{-71}}{4}.$$

Оба корня оказываются мнимыми.

216. Упрощеніе общей формулы, когда коэффиціентъ b есть четное число. Пусть $b=2k$, то-есть уравненіе имѣетъ видъ:

$$ax^2+2kx+c=0.$$

Примѣняя общую формулу, получимъ:

$$x=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a}=\frac{-2k\pm\sqrt{4(k^2-ac)}}{2a};$$

$$x=\frac{-2k\pm2\sqrt{k^2-ac}}{2a}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Эту сокращенную формулу полезно также запомнить.

Примѣры.

1) $5x^2-8x-2=0$; здѣсь $a=5$, $b=-8=-2\,.\,4$, $c=-2$.

Примѣняя сокращенную формулу, получаемъ:

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+10}}{5}=\frac{4\pm\sqrt{26}}{5}.$$

$$\sqrt{26}=5{,}09\ (\text{до } \tfrac{1}{100});\ x_1=\frac{9{,}09}{5}=18{,}18;\ x_2=\frac{-1{,}09}{5}=-0{,}218.$$

2) $(a^2-b^2)x^2-2(2a^2-b^2)x+4a^2-b^2=0$.

По сокращенной формулѣ находимъ:

$$x=\frac{2a^2-b^2\pm\sqrt{(2a^2-b^2)^2-(a^2-b^2)(4a^2-b^2)}}{a^2-b^2}.$$

Подк. величина $=4a^4-4a^2b^2+b^4-4a^4+4a^2b^2+a^2b^2-b^4=a^2b^2$

$$x_1=\frac{2a^2-b^2+ab}{a^2-b^2},\ x_2=\frac{2a^2-b^2-ab}{a^2-b^2},$$

$$x_1=\frac{a^2-b^2+a^2+ab}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)(a-b)+a(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{2a-b}{a-b},$$

$$x^2=\frac{a^2-b^2+a^2-ab}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)(a-b)+a(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{2a+b}{a+b}.$$

217. Число корней квадратнаго уравненія. Разсматривая рѣшеніе квадратныхъ уравненій, мы видимъ, что эти уравненія иногда имѣютъ два корня, иногда одинъ, иногда ни одного (случай мнимыхъ корней). Однако *согласились приписывать квадратнымъ уравненіямъ во всѣхъ случаяхъ два корня*, разумѣя при этомъ, что корни могутъ быть иногда равными, иногда мнимыми. Причина такого соглашенія состоитъ въ томъ, что формулы, выражающія мнимые корни уравненія, обладаютъ тѣми же свойствами, какія принадлежатъ вещественнымъ корнямъ, стоитъ только, совершая дѣйствія надъ мнимыми числами, руководиться правилами, выведенными для вещественныхъ чиселъ, принимая притомъ, что $(\quad -a)^2=-a$. Точно также, когда уравненіе имѣетъ *одинъ* корень, мы можемъ, разсматривая этотъ корень, *какъ два одинаковыхъ*, приписать имъ тѣ же свойства, какія принадлежатъ разнымъ корнямъ уравненія. Простѣйшія изъ этихъ свойствъ выражаются въ слѣдующей теоремѣ.

218. Теорема, выражающая два свойства корней квадратнаго уравненія. Если α и β суть корни уравненія $x^2+px+q=0$, то

$$\alpha+\beta=-p \text{ и } \alpha\beta=q,$$

т.-е. сумма корней квадратнаго уравненія, у котораго коэффиціентъ при x^2 есть 1, равна коэффиціенту при неизвѣстномъ въ первой степени, взятому съ противоположнымъ знакомъ, а произведеніе корней этого уравненія равно его свободному члену.

Док. Каковы бы ни были корни α и β, они опредѣляются формулами:

$$\alpha=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},\quad \beta=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Отсюда находимъ:

$$\alpha+\beta=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)+\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)=-p$$

$$\alpha\beta=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right).$$

Это произведеніе можно найти сокращеннымъ путемъ, основываясь на тождествѣ: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;

$$\alpha\beta=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=q.$$

Замѣчаніе. Если α и β суть корни ур-нія $ax^2+bx+c=0$, или, что то же, уравненія $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{c}=0$, то

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a};\ \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

Слѣдствіе. *Не рѣшая квадратнаго уравненія, мы можемъ опредѣлить знаки его корней, если эти корни вещественные.* Пусть, напр., имѣемъ уравненіе $x^2+8x+12=0$. Такъ какъ въ этомъ примѣрѣ выраженіе $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ даетъ положительное число, то оба корня должны быть вещественные. Опредѣлимъ, не рѣшая уравненія, знаки этихъ корней. Для этого разсуждаемъ такъ: обращая вниманіе сначала на свободный членъ (+12), видимъ, что онъ имѣетъ знакъ +; значитъ, произведеніе корней должно быть *положительнымъ*, т.-е. оба корня имѣютъ *одинаковые знаки*. Чтобы опредѣлить, какіе именно, обратимъ вниманіе на коэффиціентъ при x (т.-е. на +8); онъ имѣетъ знакъ +; слѣд., сумма коэффиціентовъ *отрицательна*; поэтому одинаковые знаки у корней должны быть *минусы*.

Подобными разсужденіями нетрудно опредѣлить знаки корней и во всякомъ другомъ случаѣ. Такъ, ур-ніе $x^2+8-12=0$ имѣетъ корни съ разными знаками (потому что ихъ произведеніе отрицательно), при чемъ отрицательный корень имѣетъ боль-

шую абсолютную величину (потому что ихъ сумма отрицательна); уравненіе $x^2-8x-12=0$ имѣетъ тоже корни съ разными знаками, но бо́льшая абсолютная величина принадлежитъ положительному корню.

219. Обратная теорема. **Если между 4 числами: α, β, p и q существуютъ такія двѣ зависимости: $p=-(\alpha+\beta)$ и $q=\alpha\beta$, то числа α и β суть корни уравненія $x^2+px+q=0$.**

Д о к. Требуется доказать, что каждое изъ чиселъ α и β, при данныхъ въ теоремѣ условіяхъ, удовлетворяетъ уравненію $x^2+px+q=0$. Для этого подставимъ въ него на мѣсто p выраженіе $-(\alpha+\beta)$ и на мѣсто q произведеніе $\alpha\beta$:

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0.$$

Преобразуя это уравненіе, послѣдовательно получаемъ:

$$x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta=0; \quad x(x-\alpha)-\beta(x-\alpha)=0;$$
$$(x-\alpha)(x-\beta)=0.$$

Если въ послѣднее уравненіе на мѣсто x подставимъ число α или число β, то замѣтимъ, что числа эти обращаютъ уравненіе въ тождество:

$$0.(\alpha-\beta)=0 \text{ и } (\beta-\alpha).0=0.$$

Слѣд., α и β суть корни уравненія $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ и, значитъ, также и корни равносильнаго уравненія $x^2+px+q=0$.

Слѣдствіе. П о д а н н ы м ъ к о р н я м ъ м о ж н о с о с т а в и т ь к в а д р а т н о е у р а в н е н і е. Пусть требуется составить уравненіе, котораго корни были бы 2 и —3. Положивъ, что $p=-[2+(-3)]$ и $q=2\,.\,(-3)$, находимъ $p=1$, $q=-6$. Значитъ, искомое уравненіе будетъ:

$$x^2+x-6=0.$$

Подобно этому найдемъ, что числа —2 и —2 суть корни уравненія $x^2+4x+4=0$, числа 3 и 0—корни уравненія $x^2-3x=0$, и т. п.

220. Трехчленъ второй степени. Разложенія его на множителей первой степени. Выраженіе ax^2+bx+c, въ которомъ x означаетъ п р о и з в о л ь н о е

число (перемѣнное), а a, b и c какія-нибудь данныя (постоянныя) числа, наз. трехчленомъ 2-й степени. Не должно смѣшивать трехчлена 2-й степени съ лѣвою частью уравненія $ax^2+bx+c=0$, такъ какъ въ трехчленѣ буква x означаетъ какое угодно число, тогда какъ въ уравненіи она означаетъ только тѣ числа, которыя удовлетворяютъ уравненію. Значенія x, обращающія трехчленъ въ 0, наз. его корнями; эти корни вмѣстѣ съ тѣмъ и корни уравненія $ax^2+bx+c=0$. Найдя ихъ, мы легко можемъ разложить трехчленъ на множителей первой степени относительно x. Дѣйствительно, пусть эти корни будутъ α и β. Такъ какъ эти числа представляютъ собою корни уравненія $ax^2+bx+c=0$, то по свойству корней квадратнаго уравненія будемъ имѣть:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ и } \alpha\beta=\frac{c}{a}; \text{ откуда } \frac{b}{a}=-(\alpha+\beta) \text{ и } \frac{c}{a}=\alpha\beta;$$

поэтому:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta=$$
$$=x(x-\alpha)-\beta(x-\alpha)=(x-\alpha)(x-\beta).$$

Умноживъ обѣ части равенства на a, получимъ:

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

Такимъ образомъ, трехчленъ ax^2+bx+c разлагается на три множителя, изъ которыхъ первый равенъ коэффиціенту при x^2, второй есть разность между x и однимъ корнемъ трехчлена, а третій—разность между x и другимъ его корнемъ.

Трехчленъ x^2+px+q, у котораго коэффиціентъ при x^2 есть 1, разлагается на 2 множителя первой степени относительно x:

$$x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta).$$

Слѣдствіе. По 2 даннымъ корнямъ квадратнаго уравненія можно составить само это уравненіе (иначе, чѣмъ это было указано въ концѣ § 219); напр., уравненіе, имѣющее корни 4 и 5, есть $(x-5)(x-4)=0$; раскрывъ скобки и сдѣлавъ приведеніе подобныхъ членовъ, получимъ

16

$x^2-9x+20=0$. Уравненіе, имѣющее корни -2 и -1, есть: $[x-(-2)][x-(-1)]=0$, т.-е. $(x+2)(x+1)=0$ или $x^2+3x+2=0$.

Примѣръ 1. Разложить на множителей трехчленъ

$$2x^2-2x-12.$$

Рѣшивъ уравненіе: $2x^2-2x-12=0$, мы найдемъ корни даннаго трехчлена; это будутъ 3 и -2. Теперь выполнимъ разложеніе:

$$2x^2-2x-12=2(x-3)[x-(-2)]=2(x-3)(x+2).$$

Примѣръ 2. Разложить на множителей трехчленъ

$$3x^2+x+1.$$

Такъ какъ корни трехчлена суть

$$\frac{-1+\sqrt{-11}}{6} \text{ и } \frac{-1-\sqrt{-11}}{6},$$

то $$3x^2+x+1=3\left(x-\frac{-1+\sqrt{-11}}{6}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{-11}}{6}\right)=$$

$$=3\left(\frac{6x+1-\sqrt{-11}}{6}\right)\left(\frac{6x+1+\sqrt{-11}}{6}\right)=$$

$$=\tfrac{1}{12}\left(6x+1-\sqrt{-11}\right)\left(6x+1+\sqrt{-11}\right).$$

Примѣръ 3. Разложить на множителей

$$6abx^2-(3b^3+2a^3)x+a^2b^2.$$

Найдя корни этого трехчлена, получимъ:

$$x_1=\frac{b^2}{2a}, \qquad x_2=\frac{a^2}{3b}.$$

Поэтому: $6abx^2-(3b^3+2a^3)x+a^2b^2=6ab\left(x-\frac{b^2}{2a}\right)\left(x-\frac{a^2}{3b}\right)=$

$$=6ab\left(\frac{2ax-b^2}{2a}\right)\left(\frac{3bx-a^2}{3b}\right)=(2ax-b^2)(3bx-a^2).$$

Примѣръ 4. Разложить на множителей

$$(a^2-1)(b^2+1)-2b(a^2+1).$$

Замѣтивъ, что данное выраженіе есть трехчленъ 2-й степени относительно буквы b, расположимъ его по степенямъ этой буквы:

$$(a^2-1)b^2-2(a^2+1)b+(a^2-1).$$

Корни этого трехчлена будутъ (§ 216):

$$b_1=\frac{a^2+1+\sqrt{(a^2+1)^2-(a^2-1)^2}}{a^2-1}=\frac{a^2+1+2a}{a^2-1}=\frac{a+1}{a-1},$$

$$b_{11}=\frac{a^2+1-\sqrt{(a^2+1)^2-(a^2-1)^2}}{a^2-1}=\frac{a^2+1-2a}{a^2-1}=\frac{a-1}{a+1}.$$

Слѣд., данный трехчленъ представится такъ:

$$(a^2-1)\left(b-\frac{a+1}{a-1}\right)\left(b-\frac{a-1}{a+1}\right)=[b(a-1)-(a+1)][b(a+1)-(a-1)]=$$

$$=(ab-b-a-1)(ab+b-a+1).$$

Примѣръ 5. Найти значеніе x, выражаемое дробью:

$$x=\frac{2a^2-2a-12}{3a^2+a-10}$$

при $a=-2$ (см. § 146).

Подставивъ на мѣсто a число -2, находимъ, что дробь принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$. Для избѣжанія этой неопредѣленности, разложимъ числителя и знаменателя на множителей. Такъ какъ корни числителя суть 3 и -2, а корни знаменателя $\frac{5}{3}$ и -2, то дробь представится такъ:

$$x=\frac{2(a-3)(a+2)}{3(a-\frac{5}{3})(a+2)}.$$

Мы видимъ теперь, что числитель и знаменатель нашей дроби имѣютъ общаго множителя $a+2$. Множитель этотъ при всѣхъ значеніяхъ a, не равныхъ -2, не равенъ нулю; поэтому при всѣхъ такихъ значеніяхъ a дробь можно сократить на $a+2$:

$$x=\frac{2(a-3)}{3(a-\frac{5}{3})}=\frac{2a-6}{3a-5}.$$

Если по условіямъ вопроса, при рѣшеніи котораго получилась данная дробь, возможно допустить, чтобы величина x и при $a=-2$ выражалась тою же сокращенною дробью, какою она выражается при $a\neq-2$,[1]) то тогда найдемъ:

$$x=\frac{2(-2)-6}{3(-2)-5}=\frac{-10}{-11}=\frac{10}{11}.$$

ГЛАВА II.

Нѣкоторые частные случаи квадратнаго уравненія.

221. Случай, когда коэффиціентъ a очень малъ. Вычисленіе корней ур. $ax^2+bx+c=0$ по общей формулѣ затруднительно въ томъ случаѣ, когда коэффиціентъ a очень малое число сравнительно съ b и c. Въ самомъ дѣлѣ, вычисляя корни по формулѣ:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

мы въ большинствѣ случаевъ должны довольствоваться приближенной величиной $\sqrt{b^2-4ac}$, а слѣд., и всего числителя. Раздѣливъ эту приближенную величину на $2a$, мы тѣмъ самымъ раздѣлимъ на $2a$ и погрѣшность, съ которой вычисленъ числитель формулы. Но такъ какъ, по предположенію, $2a$ очень малая дробь, а дѣленіе на малую дробь равносильно умноженію на большое число, то погрѣшность значительно возрастетъ, вслѣдствіе чего окончательный результатъ будетъ далекъ отъ истиннаго. Если, напримѣръ, $2a=0{,}00001$, и мы вычислили $\sqrt{b^2-4ac}$ до четвертаго десятичнаго знака, то предѣлъ погрѣшности въ окончательномъ результатѣ будетъ $0{,}0001:0{,}00001=10$

Для вычисленія корней уравненія въ этомъ случаѣ употребляется болѣе удобный способъ такъ называемаго последовательнаго приближенія.

Замѣтимъ, что при очень малой величинѣ a одинъ изъ корней уравненія немного отличается отъ $-\frac{c}{b}$, а другой — весьма большое число (по абсолютной своей величинѣ). Дѣйствительно, уравненіе $ax^2+bx+c=0$

---

[1]) Если напр., извѣстно, что значеніе величины x при $a=-2$ должно служить *предѣломъ* тѣхъ значеній, которыя x получаетъ, когда a стремится къ равенству съ -2.

авносильно такому уравненію:

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^2}=0,$$

оторому можно придать видъ:

$$\frac{1}{x}\left(b+\frac{c}{x}\right)=-a.$$

Такъ какъ $-a$ близко къ нулю, то послѣднее уравненіе можетъ быть довлетворено такими значеніями x, при которыхъ одинъ изъ сомножителей лѣвой части уравненія окажется очень малымъ числомъ, а другой—е очень большимъ; это будетъ имѣть мѣсто или тогда, когда придамъ x весьма большое абсолютное значеніе, или же тогда, когда x буетъ близокъ къ $-\frac{c}{b}$.

Покажемъ, какъ вычислить тотъ изъ корней, который мало отличается отъ $-\frac{c}{b}$ $\left(\text{другой корень найдемъ, вычитая первый изъ } -\frac{b}{a}\right)$

Изъ уравненія выводимъ:

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ax^2}{b}. \qquad (1)$$

Такъ какъ a очень малое число, а x и b не очень велики и не очень малы, то абсолютная величина дроби $\frac{ax^2}{b}$ очень мала. Пренебрегая этимъ членомъ, получимъ для x первое приближеніе:

$$x=-\frac{c}{b}.$$

Вставивъ это значеніе въ правую часть ур. (1), получимъ второе приближеніе, болѣе точное, чѣмъ первое:

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}.$$

Вставивъ эту величину въ правую часть ур. (1), получимъ третье приближеніе, еще болѣе точное. Подобнымъ же путемъ можемъ получить, если нужно, четвертое и слѣдующія приближенія.

Примѣры. 1) Рѣшить уравненіе $0{,}003x^2+5x-2=0$.

$$x=\frac{2}{5}-\frac{0{,}003x^2}{5}=0{,}4-0{,}0006x^2.$$

Первое приближеніе$=0{,}4$. Это число болѣе истиннаго значенія x потому что намъ пришлось отбросить отрицательный членъ $-0{,}0006x^2$.

Второе приближеніе$=0{,}4-0{,}0006\,.\,(0{,}4)^2=0{,}399904$. Это число менѣе истиннаго значенія x, потому что для полученія его мы подставили вмѣсто x^2 число, бо̀льшее x^2, отчего вычитаемое увеличилось, а разность уменьшилась.

Третье приближеніе$=0,4-0,0006\,.\,(0,399904)^2=0,399904046...$; оно должно быть больше истиннаго значенія, такъ какъ для полученія его мы подставили на мѣсто x^2 число, меньше x^2, отчего вычитаемое уменьшилось, а разность увеличилась. Четвертое приближеніе оказалось бы меньше истиннаго значенія, и т. д.

Такимъ образомъ, $0,4 > x > 0,399904$
$0,399904 < x < 0,399904046.$

Отсюда видно, что, взявъ вмѣсто x первое приближеніе 0,4, сдѣлаемъ ошибку менѣе разности $0,4-0,399904$, т.-е. менѣе 0,0001. Взявъ вмѣсто x второе приближеніе 0,399904, сдѣлаемъ ошибку менѣе разности $0,399904046...-0,399904$, т.-е. менѣе 1-й десятимилліонной. Такимъ образомъ, послѣдовательныя приближенія оказываются все болѣе и болѣе точными.

Другой корень получается вычитаніемъ найденнаго корня изъ $\frac{-5}{0,003}=$ $=-1666,(6)$. Если для перваго корня возьмемъ число 0,4, то другой$=$ $=-1667,0(6)$.

2) Рѣшить уравненіе $0,007x^2-x+2=0$.

$$x=2+0,007x^2$$

Первое приближеніе$=2$ (съ недостаткомъ).

Второе приближеніе$=2+0,007\,.\,2^2=2,028$ (съ недостаткомъ).

Третье приближеніе$=2,028789488$ (съ недост.). Такъ какъ эти приближенія всѣ съ недостаткомъ и идутъ, увеличиваясь, то, значитъ, они все болѣе и болѣе приближаются къ точной величинѣ x

Сравнивая второе приближеніе съ третьимъ, видимъ, что у нихъ первые три десятичные знака одинаковы; отсюда заключаемъ, что, положивъ $x=2,028$, сдѣлаемъ ошибку менѣе 0,001.

222. Случай, когда c очень малое число. Способъ послѣдовательнаго приближенія примѣнимъ и тогда, когда свободный членъ уравненія очень малое число сравнительно съ a и b. Въ этомъ случаѣ одинъ изъ корней близокъ къ $-\frac{b}{a}$, а другой — весьма малое число. Въ этомъ нетрудно убѣдиться, если уравненію придать такой видъ:

$$x(ax+b)=-c.$$

Такъ какъ по предположенію, абсолютная величина $-c$ очень мала, то уравненіе, очевидно, удовлетворится при x, или очень близкомъ къ 0, или мало отличающемся отъ $-\frac{b}{a}$.

Чтобы найти корень, имѣющій очень малую величину, представимъ уравненіе снова въ видѣ:

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ax^2}{b} \qquad (1)$$

Такъ какъ a и b суть числа не очень большія и не очень малыя, а абсолютная величина x^2 очень мала, то для перваго приближенія можно пренебречь членомъ $\frac{ax^2}{b}$; тогда получимъ:

$$x=-\frac{c}{b}.$$

Вставивъ это значеніе на мѣсто x въ правую часть уравненія (1), получимъ второе приближеніе; подобнымъ же образомъ найдемъ, если нужно, и слѣдующія приближенія.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $2x^2+x-0{,}003=0$.

$$x=0{,}0003-2x^2.$$

Первое приближеніе=0.003 (съ избыткомъ).

Второе приближеніе$=0{,}0003-2.(0{,}003)^2=0{,}002982$ (съ недостаткомъ).

Третье приближеніе=0,002982215352 (съ избыткомъ).

Положивъ $x=0{,}002982$, сдѣлаемъ ошибку менѣе одной милліонной. Другой корень уравненія$=-0{,}5-0{,}002982=-0{,}502982$.

ГЛАВА III.

Изслѣдованіе квадратнаго уравненія.

223. Когда корни бываютъ вещественные и когда они мнимые. Мы видѣли, что корни уравненія $ax^2+bx+c=0$ выражаются формулами:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Разсмотримъ, какія рѣшенія получаются изъ этихъ формулъ при различныхъ частныхъ значеніяхъ коэффиціентовъ a, b и c.

Характеръ этихъ рѣшеній зависитъ отъ подкоренного выраженія b^2-4ac[1]). Дѣйствительно, изъ формулъ видно, что:

1) если $b^2-4ac>0$, то оба корня вещественные и неравные;

2) если $b^2-4ac=0$, то корни вещественные и равные;

и 3) если $b^2-4ac<0$, то оба корня мнимые.

---

[1]) Это выраженіе наз. дискриминантомъ трехчлена ax^2+bx+c

Полезно замѣтить, что когда числа a и c противоположныхъ знаковъ, то произведеніе ac представляетъ собою отрицательное число и, слѣд., выраженіе $-4ac$ есть тогда число положительное; такъ какъ, кромѣ того, при всякомъ численномъ значеніи коэффиціента b, не равномъ нулю, число b^2 всегда положительно, то выраженіе b^2-ac дастъ въ этомъ случаѣ положительное число, и поэтому оба корня должны быть вещественные неравные. Напр., мы можемъ утверждать заранѣе (a priori), что ур. $3x^2+2x-8=0$ имѣемъ вещественные неравные корни, такъ какъ первый и третій его коэффиціенты имѣютъ противоположные знаки (корни этого уравненія суть $\frac{4}{3}$ и -2).

Вещественные корни квадратнаго уравненія могутъ быть оба положительные, или оба отрицательные, или одинъ положительный, а другой отрицательный. О значеніи этихъ рѣшеній здѣсь можетъ быть сказано то же самое, что говорилось раньше при изслѣдованіи уравненія первой степени.

Мнимые корни, конечно, означаютъ невозможность задачи, изъ условій которой выведено квадратное уравненіе.

224. Значенія общихъ формулъ корней квадратнаго уравненія при $a=0$. При выводѣ общей формулы для корней уравненія $ax^2+bx+c=0$ мы приводили его къ виду $x^2+px+q=0$, для чего намъ нужно было раздѣлить всѣ члены уравненія на a. Но дѣленіе на a возможно лишь въ томъ случаѣ, когда a не равно 0. Слѣд., формулы:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_{11}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

выведены въ предположеніи, что коэффиціентъ a не равенъ 0, и потому, конечно, нельзя заранѣе требовать, чтобы онѣ давали вѣрные результаты и при $a=0$. Однако посмотримъ, во что онѣ обратятся при этомъ предположеніи. Подставивъ въ нихъ на мѣсто a нуль, получимъ:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2}}{0},\quad x_{11}=\frac{-b-\sqrt{b^2}}{0}.$$

Такъ какъ знакомъ $\sqrt{}$ мы условились обозначать только ариѳметическое значеніе корня, то $\sqrt{b^2}=b$ въ томъ случаѣ, когда b число положительное; если же b число отрицательное, то $\sqrt{b^2}=-b$ (напр., если $b=-5$, то $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5=-(-5)$). Поэтому:

при $a=0$ и при b положительномъ
$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+b}{0}=\dfrac{0}{0}, \\ x_{11}=\dfrac{-b-b}{0}=\dfrac{-2b}{0}=\infty, \end{cases}$$

при $a=0$ и при b отрицательномъ
$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b-b}{0}=\dfrac{-2b}{0}=\infty; \\ x_{11}=\dfrac{-b+b}{0}=\dfrac{0}{0}. \end{cases}$$

Значитъ, при $a=0$ общая формула даетъ для одного изъ корней неопредѣленное выраженіе $\dfrac{0}{0}$, а для другого — выраженіе ∞. Между тѣмъ, когда $a=0$, квадратное уравненіе обращается въ уравненіе 1-й степени: $bx+c=0$, дающее для x только одно значеніе: $x=-\dfrac{c}{b}$. Мы видимъ такимъ образомъ, что общія формулы не даютъ правильнаго рѣшенія для случая, когда $a=0$.

224,а. Какъ измѣняются корни квадратнаго уравненія, когда коэффиціентъ a приближается къ нулю. Поставимъ теперь такой вопросъ: если коэффиціентъ a не равенъ 0, а только приближается къ 0 какъ угодно близко, то къ чему будутъ приближаться (къ какому предѣлу) величины корней квадр. уравненія? Пока $a\neq 0$ мы имѣемъ право примѣнять наши общія формулы. Изъ нихъ усматриваемъ, что, когда a приближатся къ 0, одинъ изъ корней долженъ увеличиваться (по абсолютной величинѣ) безгранично, а именно это будетъ x_{11} при $b>0$ и x_1 при $b<0$. Дѣйствительно, по мѣрѣ приближенія a къ 0 величина радикала $\sqrt{b^2-4ac}$ будетъ все болѣе и болѣе приближаться къ $\sqrt{b^2}$,

т.-е. къ b, если это число положительно, и къ $-b$, если b число отрицательное; слѣд., числитель дроби, выведенной для x_{11} въ первомъ случаѣ, или для x_1 во второмъ случаѣ, будетъ стремиться къ $-2b$, тогда какъ знаменатель ея безпредѣльно уменьшается; при этихъ условіяхъ величина дроби должна безпредѣльно возрастать.

Что же касается другого корня (т.-е. x_1 при $b>0$, или x_{11} при $b<0$), то изъ общихъ формулъ мы прямо не усматриваемъ, къ чему стремится этотъ корень, когда a приближается къ 0; не усматриваемъ потому, что въ дроби, опредѣляющей этотъ другой корень, и числитель, и знаменатель оба приближаются къ 0, и потому о величинѣ самой дроби мы не можемъ ничего сказать опредѣленнаго. Попробуемъ преобразовать наши общія формулы такимъ образомъ, чтобы буква a не входила заразъ и въ числителя, и въ знаменателя дроби, а только въ одинъ какой-нибудь изъ этихъ членовъ. Такое преобразованіе возможно выполнить. Для этого стоитъ только дробь, опредѣляющую x_1, освободить отъ радикала въ числителѣ такимъ же пріемомъ, какой былъ нами указанъ ранѣе (§ 210) для освобожденія отъ радикаловъ знаменателя дроби:

$$x_1=\frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a\left(-b-\sqrt{b^2-ac}\right)}=$$

$$=\frac{4ac}{2a\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Сократить дробь на $2a$ мы имѣли право, такъ какъ число a мы предполагаемъ не равнымъ нулю, а только приближающимся къ нулю.

Подобно этому для x_{11} мы получимъ:

$$x_{11}=\frac{\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}=$$

$$=\frac{4ac}{2a\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Изъ этихъ преобразованныхъ формулъ легко видѣть, что

когда a приближается къ 0, то при $b>0$ величина x_1 и при $b<0$ величина x_{11} приближаются все ближе и ближе къ числу $\frac{2c}{-2b}$, т.-е. къ числу $-\frac{c}{b}$.

Такимъ образомъ: если въ уравненіи $ax^2+bx+c=0$ коэффиціентъ a приближается какъ угодно близко къ 0, то абсолютная величина одного изъ корней безпредѣльно увеличивается, а другой корень приближается къ числу $-\frac{c}{b}$.

Подтвержденіе этому мы увидимъ на слѣдующемъ численномъ примѣрѣ.

Примѣръ. Возьмемъ уравненіе $0{,}001x^2+8x-5=0$, въ которомъ коэффиціентъ при x^2 очень малъ. Примѣняя сокращенную формулу (§ 216), получимъ:

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+0{,}005}}{0{,}001}=\frac{-4\pm\sqrt{16\ 005}}{0{,}001}=\frac{-4\pm4{,}000624\ldots}{0{,}001}.$$

Откуда:

$$x_1=\frac{0{,}000624\ldots}{0{,}001}=0{,}624\ldots;\ x_{11}=\frac{-8{,}000624\ldots}{0{,}001}=-8000{,}624\ldots$$

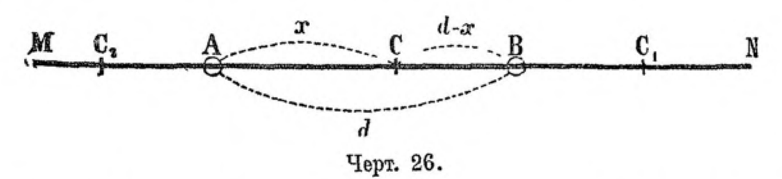
Мы видимъ, такимъ образомъ, что одинъ корень весьма близокъ къ числу $-\frac{c}{b}$, которое въ этомъ примѣрѣ равно $-\frac{-5}{8}=$ $=+\frac{5}{8}=0{,}625$; другой же корень имѣетъ очень большую абсолютную величину.

Если въ томъ же уравненіи еще уменьшимъ коэффиціентъ при x^2, напр., возьмемъ уравненіе такое: $0{,}0001x^2+8x-5=0$, то для x_1 получимъ число 0,6249, еще болѣе близкое къ $-\frac{c}{b}$, а для x_{11} найдемъ число —80000,6249..., абсолютная величина котораго еще больше.

225. Задача о двухъ источникахъ свѣта. Чтобы на примѣрѣ указать значеніе различныхъ случаевъ, какіе могутъ представиться при рѣшеніи квадратнаго уравненія, изслѣдуемъ слѣдующую задачу о двухъ источникахъ свѣта.

Задача. На прямой MN (черт. 26) въ точкахъ A и B находятся два источника свѣта. На разстояніи одного метра сила свѣта перваго источника равна a свѣчамъ, а сила свѣта второго равна b свѣчамъ. Разстояніе между A и B равно d метрамъ. Найти на прямой MN такую точку, въ которой освѣщеніе отъ обоихъ источниковъ было бы одинаковое.

Искомая точка можетъ находиться: или направо отъ A, или налѣво отъ A, при чемъ въ первомъ случаѣ она можетъ оказаться или между A и B, или за B. Сдѣлаемъ спачала предположеніе, что она находится направо отъ A, между A и B; напр., пусть это будетъ точка C, отстоящая отъ A на x футовъ.



Черт. 26.

Изъ физики извѣстно, что степень освѣщенія, при одинаковыхъ прочихъ условіяхъ, обратно пропорціональна квадрату разстоянія отъ источника свѣта, т.-е., если освѣщаемый предметъ удалить отъ источника свѣта па разстояніе въ 2 раза, 3 раза, 4 раза и т. д. бо́льшее, то степень освѣщенія уменьшится въ 4 раза, въ 9 разъ, въ 16 разъ и т. д. Согласно этому закону, если бы точка C отстояла отъ A только на 1 метръ, то она освѣщалась бы этимъ источникомъ такъ, какъ-будто на нее падали лучи отъ a свѣчей; но такъ какъ она отстоитъ отъ A на x метр., то степень ея освѣщенія этимъ источникомъ будетъ $\frac{a}{x^2}$. Подобнымъ же разсужденіемъ найдемъ, что точка C, отстоя отъ источ-

ника свѣта B на $d-x$ метр., будетъ освѣщаться имъ съ силою $\frac{b}{(d-x)^2}$. Вопросъ задачи требуетъ, чтобы

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d-x)^2} \qquad (1)$$

Таково будетъ уравненіе, если равноосвѣщенная точка лежитъ между A и B. Допустимъ теперь, что она находится направо отъ B (напр., въ C_1), на разстояніи x отъ A. Тогда, попрежнему, степень освѣщенія ея источникомъ A будетъ $\frac{a}{x^2}$; отъ источника B точка C_1 находится на разстояніи $x-d$ метр.; поэтому степень освѣщенія ея этимъ источникомъ выразится $\frac{b}{(x-d)^2}$, и уравненіе будетъ:

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(x-d)^2}. \qquad (2)$$

Сравнивая это уравненіе съ ур. (1), находимъ, что они одинаковы, такъ какъ $(d-x)^2=(x-d)^2$. Замѣтивъ это, можемъ утверждать, что уравненіе (1) включаетъ въ себѣ и этотъ второй случай: если окажется, что уравненію (1) можетъ удовлетворить такое значеніе x, которое больше d (разстояніе между A и B), то это значеніе x и будетъ означать разстояніе отъ A до C_1.

Теперь сдѣлаемъ третье предположеніе, что искомая точка находится налѣво отъ A; пусть это будетъ точка C_2, отстоящая отъ A на x футовъ. Тогда степень освѣщенія ея источникомъ A равна $\frac{a}{x^2}$, а источникомъ B равна $\frac{b}{(d+x)^2}$; слѣд., для этого случая мы будемъ имѣть уравненіе:

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d+x)^2}. \qquad (3)$$

Это уравненіе можно получить изъ ур. (1), если въ послѣднемъ замѣнимъ x на $-x$. Дѣйствительно, сдѣлавъ такую замѣну, получимъ:

$$\frac{a}{(-x)^2}=\frac{b}{[d-(-x)]^2}.$$

Но $(-x)^2=x^2$ и $d-(-x)=d+x$; слѣд., получившееся послѣ замѣны уравненіе и есть ур. (3).

Теперь мы можемъ утверждать, что уравненіе (1) соотвѣтствуетъ всѣмъ тремъ предположеніямъ, если только допустимъ, что буква x въ немъ есть алгебраическое число, т.-е. что она можетъ означать и положительное число, и отрицательное (и нуль). Если, рѣшивъ это уравненіе, мы увидимъ, что ему удовлетворяетъ какое-нибудь положительное число, то это число будетъ означать разстояніе искомой точки отъ A направо, при чемъ она можетъ лежать или между A и B, или за B, смотря по тому, будетъ ли это положительное число меньше числа d, или больше его; если же уравненію (1) будетъ удовлетворять какое-нибудь отрицательное число, то это будетъ означать, что равноосвѣщенная точка находится налѣво отъ A на разстояніи, равномъ абсолютной величинѣ этого отрицательнаго числа.

Рѣшимъ теперь уравненіе (1):

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d-x)^2};\quad a(d-x)^2=bx^2;$$

$$ad^2-2adx+ax^2=bx^2;\quad (a-b)x^2-2adx+ad^2=0.$$

Такъ какъ коэффиціентъ при x дѣлится на 2, то по сокращенной формулѣ (§ 216) находимъ:

$$x=\frac{ad\pm\sqrt{a^2d^2-(a-b)ad^2}}{a-b}=\frac{ad\pm d\sqrt{ab}}{a-b}.$$

Если примемъ во вниманіе, что $a=(\sqrt{a})^2$, $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ и $b=(\sqrt{b})^2$, то въ числителѣ полученной дроби мы можемъ вынести за скобки $d\sqrt{a}$, а знаменателя можемъ разложить на 2 множителя:

$$x=\frac{d\sqrt{a}(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}.$$

Слѣдовательно: $x_1=\dfrac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}},\ x_{11}=\dfrac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$

Такъ какъ, освобождая уравненіе отъ знаменателей, мы должны были умножить обѣ части его на выраженіе $x^2(d-x)^2$, содержащее неизвѣстное, то мы должны еще рѣшить вопросъ, не ввели ли мы тѣмъ самымъ посторонних ъ рѣшеній, обращающихъ въ нуль выраженіе, на которое умножали. Это выраженіе обращается въ нуль при $x=0$ и при $x=d$; ни то, ни другое изъ этихъ значеній x не значится въ числѣ найденныхъ нами рѣшеній квадратнаго уравненія; значитъ, постороннихъ рѣшеній мы не ввели [1]).

Разсмотримъ теперь различные случаи, какіе могутъ представиться при тѣхъ или другихъ численныхъ значеніяхъ буквъ a, b и d. Прежде всего находимъ, что такъ какъ эти числа по смыслу своему положительныя, то мнимыхъ рѣшеній въ нашей задачѣ быть не можетъ (подъ знакомъ радикала стоятъ лишь числа a и b). Всѣхъ различныхъ случаевъ можетъ представиться пять:

1) Если $a>b$, то оба корня положительные, при чемъ такъ какъ $\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$, то $x_1>d$, а $x_{11}<d$.

Значитъ, въ этомъ случаѣ двѣ точки удовлетворяютъ вопросу задачи; обѣ онѣ расположены направо отъ A, одна между A и B, другая за B.

2) Если $a<b$, то x_{I} отрицательное число, а x_{II} положительное, при чемъ $x_{\text{II}}<d$. Положительное рѣшеніе показываетъ, что искомая точка лежитъ направо отъ A, именно между A и B; отрицательное же рѣшеніе означаетъ, что есть еще другая равноосвѣщенная точка, лежащая на-

[1]) Кромѣ того, мы должны рѣшить еще вопросъ, не имѣетъ ли данное уравненіе особаго корня $x=\infty$ (см. § 114). Приведя члены уравненія къ одному знаменателю и перенеся ихъ въ одну часть, получимъ уравненіе:

$$\frac{a(d-x)^2-bx^2}{x^2(d-x)^2}=0 \quad \text{или} \quad \frac{(a-b)x^2-2adx+ad^2}{x^4-2dx^3+d^2x^2}=0.$$

Такъ какъ степень знаменателя выше степени числителя, то уравненіе сверхъ корней, разсмотрѣнныхъ выше, имѣетъ еще корень, $x=\pm\infty$. Это третье рѣшеніе разсматриваемой задачи означаетъ, что если брать точки, все болѣе и болѣе удаленныя отъ A вправо или влѣво, то разность освѣщеній въ этихъ точкахъ двумя источниками свѣта будетъ все болѣе и болѣе уменьшаться, приближаясь къ 0.

лѣво отъ A на разстояніи, равномъ абсолютной величинѣ отрицательнаго рѣшенія.

3) Если $a=b$, то $x_{I}=\pm\infty$ и $x_{II}=\frac{d}{2}$. Второе рѣшеніе означаетъ, что при равенствѣ силъ источниковъ свѣта равноосвѣщенная точка должна лежать посрединѣ между ними; первое же рѣшеніе показываетъ, что по мѣрѣ того, какъ a приближается къ равенству съ b, искомая точка безпредѣльно удаляется или направо отъ A, или налѣво отъ A, смотря по тому, будетъ ли a, приближаясь къ b, оставаться больше или меньше b; при этомъ другая равноосвѣщенная точка будетъ приближаться все болѣе и болѣе къ серединѣ разстоянія между A и B.

4) Если $d=0$, при чемъ $a \neq b$, то $x_{I}=x_{II}=0$. Это значитъ, что если разстояніе между двумя неравными источниками свѣта уменьшается, приближаясь къ 0, то обѣ равноосвѣщенныя точки неограниченно приближаются къ источнику A.

5) Если $d=0$ и $a=b$, то $x_{I}=\frac{0}{0}$, $x_{II}=0$ Такъ какъ числитель и знаменатель дроби, опредѣляющей величину x_{I}, не содержатъ никакого общаго множителя, обращающагося въ 0 при сдѣланныхъ предположеніяхъ, то надо ожидать, что значеніе x_{I} означаетъ неопредѣленность задачи. И дѣйствительно, если источники свѣта одинаковой силы и помѣщены въ одномъ мѣстѣ, то всякая произвольная точка будетъ ими одинаково освѣщена.

ГЛАВА IV.

Комплексныя числа.

226. Цѣль введенія въ алгебру мнимыхъ чиселъ. Корень четной степени изъ отрицательнаго числа, какъ мы видѣли (§ 165, IV), не можетъ быть выраженъ ни положительнымъ, ни отрицательнымъ числомъ; такой корень называется мнимымъ числомъ.

Введеніе въ алгебру мнимыхъ чиселъ вызвано соображеніями, подобными тѣмъ, по которымъ въ нее допущены отрицательныя числа: и тѣ, и другія имѣютъ цѣлью обобщить нѣкоторыя алгебраическія предложенія и формулы. Напр., допустивъ мнимыя числа, мы можемъ принимать, что квадрат-

ное уравненіе имѣетъ всегда два корня, что трехчленъ 2-й степени разлагается всегда на два множителя первой степени, и т. п. Особенно важное значеніе имѣютъ мнимыя числа въ теоріи уравненій высшихъ степеней.

Замѣтимъ, что корень всякой четной степени изъ отрицательнаго числа сводится къ нахожденію корня изъ квадратнаго корня изъ отрицательнаго числа; такъ $\sqrt[6]{-2}=\sqrt[3]{\sqrt{-2}}$ и вообще $\sqrt[2n]{-a}=\sqrt[n]{\sqrt{-a}}$. Поэтому въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ говорить только о квадратномъ корнѣ изъ отрицательнаго числа.

227. Условія, подъ которыми вводятъ мнимыя числа. Этихъ условій два:

1) согласились разсматривать $\sqrt{-a}$, гдѣ $-a$ какое угодно отрицательное число, какъ число особаго рода, квадратъ котораго равенъ $-a$;

2) согласились производить надъ мнимыми числами дѣйствія и преобразованія по тѣмъ же правиламъ, по какимъ они производятся надъ числами вещественными, принимая всегда, что $(\sqrt{-a})^2=-a$.

228. Приведеніе $\sqrt{-a}$ къ виду $\sqrt{a}\sqrt{-1}$. Мнимое число вида $\sqrt{-a}$ можно замѣнить другимъ: $\sqrt{a}\sqrt{-1}$. Дѣйствительно, $\sqrt{-a}$, согласно первому условію, есть такое число, квадратъ котораго равенъ $-a$. Но $\sqrt{a}\sqrt{-1}$ также есть такое число, квадратъ котораго равенъ $-a$, потому что, примѣняя къ этому выраженію правило о возвышеніи въ степень произведенія (согласно второму условію), получимъ:

$$(\sqrt{a}\sqrt{-1})^2=(\sqrt{a})^2(\sqrt{-1})^2=a(-1)=-a.$$

Условились сокращенно обозначать выраженіе $\sqrt{-1}$ одною буквою i (начальная буква слова *imaginaire*, что значитъ *мнимый*). Такимъ образомъ, пишутъ:

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4}\sqrt{-1}=2i;\ \sqrt{-3}=\sqrt{3}\sqrt{-1}=i\sqrt{3}.$$

Приведеніе мнимаго числа къ виду, содержащему множителя i, яснѣе обозначаетъ мнимость радикала, которая безъ того можетъ быть не вполнѣ явною.

229. Комплексныя числа. Общій видъ всякаго вещественнаго или мнимаго числа есть $a+bi$, гдѣ a и b суть какія-либо вещественныя числа, положительныя, отрицательныя, или равныя нулю, а i обозначеніе $\sqrt{-1}$. Число вида $a+bi$ наз. комплекснымъ числомъ [1]

---

[1]) Слово «комплексный» означаетъ по-русски «сложный» «составной»; такое названіе числу вида $a+bi$ было дано впервые нѣмецкимъ математикомъ Гауссомъ (1777—1855). Названіе «мнимый» (imaginaire) было введено французскимъ математикомъ Декартомъ въ 1637 г.

въ немъ a есть **вещественная** часть, bi **мнимая** часть. При $a=0$ оно обращается въ мнимое число $bi=b\sqrt{-1}=\sqrt{-b^2}$, при $b=0$ оно даетъ $a+0.i$, что равно одному вещественному числу a, такъ какъ произведенiе $0.i$, согласно условiю второму § 227-го, должно приниматься равнымъ нулю.

Два комплексныхъ числа вида $a+bi$, $a-bi$ наз. **сопряженными.** Подъ такимъ видомъ представляются корни квадратнаго уравненiя, когда они мнимые. Два комплексныя числа вида $a+bi$ $-a-bi$ наз. **противоположными.**

230. Основное начало, которому должны быть подчинены комплексныя числа. Условившись надъ комплексными числами производить дѣйствiя и преобразованiя по правиламъ, выведеннымъ для вещественныхъ чиселъ, при условiи, что $i^2=-1$, мы должны будемъ подчинить комплексныя числа слѣдующему началу:

Для того, чтобы комплексное число $a+bi$ равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы $a=0$ и $b=0$.

Хотя предложенiе это можно было бы разсматривать, какъ **условiе**, которое мы ставимъ относительно комплекснаго числа, и которое, слѣд., не нуждается въ доказательствѣ, однако полезно обнаружить, что оно не находится въ противорѣчiи съ поставленными нами ранѣе двумя условiями (§ 227), а составляетъ естественное слѣдствiе ихъ. Дѣйствительно, положимъ, что $a+bi=0$. Тогда, совершая надъ этимъ равенствомъ преобразованiя, дозволительныя для равенствъ съ вещественными числами, и принимая $i^2=-1$, мы будемъ имѣть:

$$a=-bi;\ a^2=(-bi)^2=b^2i^2=-b^2,\ a^2+b^2=0.$$

Такъ какъ a^2 и b^2 суть числа положительныя, а сумма двухъ положительныхъ чиселъ равняется нулю только тогда, когда каждое изъ нихъ отдѣльно равно нулю, то, значитъ, необходимо: $a=0$, $b=0$. Обратно, если положимъ, что $a=0$ и $b=0$, то $a+bi=0+0.i$; принимая умноженiе на нуль и сложенiе съ нулемъ въ томъ же условномъ смыслѣ, какой принятъ для вещественныхъ чиселъ, мы должны принять, что $0+0.i=0$

Слѣдствiе. Для того, чтобы числа $a+bi$ и $a'+b'i$ были равны, необходимо и достаточно, чтобы $a=a'$ и $b=b'$.

Дѣйствительно, если $a+bi=a'+b'i$, то $(a-a')+(b-b')i=0$ и, слѣдовательно, $a-a'=0$ и $b-b'=0$, т.-е. $a=a'$ и $b=b'$.

Обратно, если $a=a'$ и $b=b'$, то число $a+bi$ мы должны принимать равнымъ числу $a'+b'i$, такъ какъ эти комплексныя выраженiя въ этомъ случаѣ ничѣмъ другъ отъ друга не отличаются.

Изъ равенства комплексныхъ чиселъ непосредственно слѣдуетъ, что если 2 числа равны одному и тому же 3-му, то они равны и между собою.

Замѣчанiе. Относительно комплексныхъ чиселъ не принято никакого соглашенiя, какое изъ нихъ считать **большимъ** другого.

231. Дѣйствія надъ комплексными числами. Чтобы произвести к кое-нибудь дѣйствіе надъ мнимыми числами, надо прежде всего каждое изъ нихъ приве ти къ виду комплекснаго числа $a+bi$, затѣмъ произвести дѣйствія надъ двучленами такого вида по тѣмъ правиламъ, которыя выведены были для двучленовъ съ вещественными членами (согласно условію второму § 227 го и наконецъ, въ результатѣ замѣнить вездѣ i^2 черезъ -1 (согласно условію первому того же §).

Сложеніе. $(a+bi)+(a_1+b_1i)=(a+a_1)+(b+b_1)i;$

$$(a+bi)+(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a+a_1+a_2)+(b+b_1+b_2)i.$$

Отсюда легко усмотрѣть, что сумма комплексныхъ чиселъ обладаетъ тѣми же свойствами, какія принадлежатъ суммѣ вещественныхъ чиселъ (§ 20) т. е. свойствами перемѣстительнымъ и сочетательнымъ.

Вычитаніе. $(a+bi)-(a_1+b_1i)=(a-a_1)+(b-b_1)i.$

Отсюда видно, что къ вычитанію комплексныхъ чиселъ можно примѣнять общее правило вычитанія алгебраическихъ чиселъ (§ 23), т.-е., чтобы вычесть какое-нибудь число, достаточно прибавить число противоположное; такъ, вмѣсто того, чтобы отъ $a+bi$ вычесть a_1+b_1i, можно къ $a+bi$ прибавить $-a_1-b_1i$.

Замѣтимъ, что сумма или разность двухъ комплексныхъ чиселъ можетъ иногда оказаться числомъ вещественнымъ (напр., сумма сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ).

Умноженіе. $(a+bi)(a_1+b_1i)=aa_1+a_1bi+ab_1i+bb_1i^2=(aa_1-bb_1)+$
$+(a_1b+ab_1)i.$

Подобнымъ образомъ можно составить произведеніе трехъ и болѣе комплексныхъ чиселъ.

Легко убѣдиться (повѣркой), что произведеніе комплексныхъ чиселъ такъ же, какъ и вещественныхъ (§ 36), обладаетъ свойствами: перемѣстительнымъ, сочетательнымъ и распредѣлительнымъ (относительно сложенія). Напр., чтобы провѣрить послѣднее свойство, выражаемое равенствомъ:

$$[(a+bi)+(a_1+b_1i)](a_2+b_2i)=(a+bi)(a_2+b_2i)+(a_1+b_1i)(a_2+b_2i),$$

выполнимъ дѣйствія, указанныя въ каждой части этого равенства. Лѣвая часть даетъ:

$$[(a+a_1)a_2-(b+b_1)b_2]+[(b+b_1)a_2+(a+a_1)b_2]i=(aa_2+a_1a_2-bb_2-b_1b_2)+$$
$$+(ba_2+b_1a_2+ab_2+a_1b_2)i.$$

Въ правой части получается то же самое выраженіе.

Провѣримъ еще слѣдующее важное свойство произведенія:

для того, чтобы произведеніе комплексныхъ чиселъ равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы одно изъ этихъ чиселъ равнялось нулю.

Дѣйствительно, если $(a+bi)(a_1+b_1i)=0,$

то $(aa_1-bb_1)+(a_1b+ab_1)i=0$

и слѣд.,

$$\begin{cases} aa_1-bb_1=0, \\ a_1b+ab_1=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Умноживъ первое уравненіе этой системы на a и второе на b, сложимъ ихъ:

$$a^2a_1+b^2a_1=0 \text{ или } a_1(a^2+b^2)=0. \qquad (2)$$

Умноживъ первое уравненіе системы (1) на b и второе на a, вычтемъ изъ второго первое:

$$a^2b_1+b^2b_1=0 \text{ или } b_1(a^2+b^2)=0. \qquad (3)$$

Изъ равенствъ (2) и (3) заключаемъ, что или $a^2+b^2=0$, или $a_1=0$, $b_1=0$. Если первое, то $a=0$ и $b=0$ и, слѣд., $a+bi=0$; если второе, то $a_1+b_1i=0$.

Обратно, пусть $a+bi=0$, т.-е. $a=0$ и $b=0$; но тогда и $aa_1-bb_1=0$, и $a_1b+ab_1=0$; слѣд., и произведеніе $(a+bi)$ на (a_1+b_1i) равно 0.

Замѣтимъ, что произведеніе двухъ сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ $(a+bi)(a-bi)$ равно положительному вещественному числу a^2+b^2.

Дѣленіе. Обозначимъ частное $(a+bi):(a_1+b_1i)$ черезъ $x+yi$, гдѣ x и y предположимъ вещественными числами. Тогда, по опредѣленію дѣленія, будемъ имѣть:

$$(a_1+b_1i)(x+yi)=a+bi,$$

т.-е. $(a_1x-b_1y)+(b_1x+a_1y)i=a+bi,$

Откуда:

$$\begin{cases} a_1x-b_1y=a, \\ b_1x+a_1y=b. \end{cases}$$

Умноживъ первое уравненіе на a_1, а второе на b_1 и сложивъ оба уравненія, получимъ:

$$(a_1^2+b_1^2)x=aa_1+bb_1 \text{ и } x=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Умноживъ первое уравненіе на b_1, а второе на a_1 и вычтя изъ второго первое, получимъ:

$$(a_1^2+b_1^2)y=a_1b-ab_1 \text{ и } y=\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Формулы, найденныя для x и y, даютъ возможное рѣшеніе, если только $a_1^2+b_1^2 \neq 0$, т.-е. если a_1 и b_1 не равны одновременно нулю; другими словами, если дѣлитель a_1+bi не равенъ нулю.

Въ этомъ случаѣ, слѣд., будемъ имѣть:

$$(a+bi):(a_1+b_1i)=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+i\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Замѣчаніе. Это же частное мы могли бы получить проще, умноживъ въ дроби $\frac{a+bi}{a_1+b_1i}$ числителя и знаменателя на комплексное число a_1-b_1i,

сопряженное съ знаменателемъ:

$$\frac{(a+bi)(a_1-b_1i)}{(a_1+b_1i)(a_1-b_1i)}=\frac{aa_1-bb_1i^2+(a_1b-ab_1)i}{a_1^2-(b_1i)^2}=\frac{aa_1+bb_1+(a_1b-ab_1)i}{a_1^2+b_1^2}=$$
$$=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+i\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Возвышеніе въ степень. Предварительно найдемъ результаты отъ возвышенія въ степень мнимаго числа i, зная, что, согласно условію, i^2 должно принимать равнымъ -1.

$$i^1=i;\ i^2=-1;\ i^3=i^2\,.\,i=(-1)i=-i;\ i^4=i^3\,.\,i=-i^2=+1;$$
$$i^5=i^4\,.\,i=(+1)i=i;\ i^6=i^5\,.\,i=i^2=-1;\ i^7=i^6\,.\,i=(-1)i=-i, \text{ и т. д.}$$

Такимъ образомъ, послѣдовательныя степени i даютъ повторяющіеся результаты, а именно, слѣдующіе четыре: i, -1, $-i$, $+1$. Чтобы узнать, какой изъ этихъ результатовъ получится при возвышеніи i въ степень съ, показателемъ n, достаточно раздѣлить n на 4 и обратить вниманіе только на остатокъ отъ дѣленія. Такъ:

$$i^{27}=i^{4\,\cdot\,6+3}=i^3=-i,$$
$$i^{17}=i^{4\,\cdot\,4+1}=i.$$

Замѣтимъ еще, что i^0 мы будемъ принимать равнымъ 1.

Теперь легко найдемъ результаты возвышенія $a+bi$ въ степень съ цѣлымъ положительнымъ показателемъ; такъ:

$$(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=(a^2-b^2)+2abi.$$
$$(a+bi)^3=a^3+3a^2(bi)+3a(bi)^2+(bi)^3=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i \text{ и т. д.}$$

Извлеченіе квадратнаго корня. Положимъ, что

$$\sqrt{a+bi}=x+yi.$$

Откуда:

$$a+bi=(x^2-y^2)+2xyi.$$

Слѣд.

$$\begin{cases}x^2-y^2=a\\2xy=b.\end{cases}\qquad(1)$$

Вопросъ приводится къ нахожденію вещественныхъ корней этой системы. Возвысивъ оба уравненія въ квадратъ и затѣмъ сложивъ ихъ, получимъ:

$$(x^2+y^2)^2=a^2+b^2 \text{ и } x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}.$$

(Знакъ — передъ радикаломъ отброшенъ, такъ какъ при вещественныхъ значеніяхъ x и y выраженіе x^2+y^2 не можетъ быть отрицательнымъ). Возьмемъ послѣднее уравненіе совмѣстно съ первымъ уравненіемъ системы (1); складывая ихъ и вычитая, получимъ:

$$x^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \text{ и } x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}},$$
$$y^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \text{ и } y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

Изъ второго уравненія системы (1) усматриваемъ, что знаки у x и y должны быть одинаковые, если $b>0$, и разные, если $b<0$. Поэтому:

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right] \text{ при } b>0$$

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right] \text{ при } b<0$$

Примѣры:

1) $$\sqrt{5+12\sqrt{-1}}=\sqrt{5+12i}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}\right]=$$
$$=\pm\left(\sqrt{\frac{18}{2}}+i\sqrt{\frac{8}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{9}+i\sqrt{4}\right)=\pm\left(3+2i\right).$$

2) $$\sqrt{\sqrt{-1}}=\sqrt{i}=\sqrt{0+1\,.\,i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}-0}{2}}\right)=$$
$$=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\pm\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right).$$

3) $$\sqrt{-\sqrt{-1}}=\sqrt{-i}=\sqrt{0-1\,.\,i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}-0}{2}}\right)=$$
$$=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\pm\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right).$$

Замѣчаніе. Чтобы изъ комплексныхъ чиселъ можно было извлечь корень третьей или высшей степени, имъ надо придать иной видъ (тригонометрическій), о чемъ мы здѣсь говорить не будемъ.

232. Приведемъ два примѣра, показывающіе, какъ просто иногда доказываются нѣкоторыя истины при помощи комплексныхъ чиселъ.

Теорема 1. Если данное число есть сумма двухъ квадратовъ, то и квадратъ его есть также сумма двухъ квадратовъ.

Пусть $N=a^2+b^2$, замѣтивъ, что $a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$ можемъ писать:

$$N^2=(a+bi)^2(a-bi)^2=(a^2-b^2+2abi)(a^2-b^2-2abi)=(a^2-b^2)^2+4a^2b^2=$$
$$=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2.$$

Теорема, такимъ образомъ, доказана.

Теорема 2. Произведеніе двухъ чиселъ, изъ которыхъ каждое есть сумма двухъ квадратовъ, также равно суммѣ двухъ квадратовъ.

Пусть $N=a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$ и $N_1=a_1^2+b_1^2=(a_1+b_1i)(a_1-b_1i)$.

Въ такомъ случаѣ:

$$NN_1=(a+bi)(a-bi)(a_1+b_1i)(a_1-b_1i)$$

Помноживъ въ этомъ произведенія перваго сомножителя на третьяго, а второго на четвертаго, найдемъ:

$$NN_1=[aa_1-bb_1+(ab_1+ba_1)i]\,[aa_1-bb_1-(ab_1+ba_1)i]=$$
$$=(aa_1-bb_1)^2+(ab_1+a_1b)^2. \qquad (1)$$

Теорема, такимъ образомъ, доказана

Если въ томъ же произведеніи помножимъ перваго сомножителя на четвертаго, а второго на третьяго, то получимъ:

$$NN_1=[aa_1+bb_1+(a_1b-ab_1)i]\,[aa_1+bb_1-(a_1b-ab_1)i]=$$
$$=(aa_1+bb_1)^2+(a_1b-ab_1)^2. \qquad (2)$$

Равенства (1) и (2) показываютъ, что произведеніе NN_1 можетъ быть разложено на сумму двухъ квадратовъ двоякимъ образомъ.

ГЛАВА V.

Освобожденіе уравненія отъ радикаловъ.

233. Теорема. Отъ возвышенія обѣихъ частей уравненія въ одну и ту же степень получаемъ новое уравненіе, которое, сверхъ корней перваго уравненія, можетъ имѣть еще и посторонніе корни.

Док. Пусть имѣемъ уравненіе $A=B$. Возвысимъ обѣ его части въ одну и ту же степень, напр., въ квадратъ. Тогда получимъ: $A^2=B^2$. Представимъ это уравненіе въ такомъ видѣ:

$$A^2+B^2=0 \text{ или } (A-B)(A+B)=0.$$

Чтобы произведеніе равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ сомножителей равнялся нулю; значитъ, послѣднее уравненіе удовлетворяется и такими значеніями x, при которыхъ $A-B=0$, и такими, при которыхъ $A+B=0$. Первыя значенія удовлетворяютъ данному уравненію, такъ какъ если $A-B=0$, то это значитъ, что $A=B$. Вторыя значенія x окажутся посторонними для даннаго уравненія, такъ какъ если $A+B=0$, то это значитъ, что $A=-B$, тогда какъ данное уравненіе требуетъ, чтобы $A=B$.

Вообще, возвысивъ обѣ части уравненія $A=B$ въ n-ую степень, получимъ:

$$A^n=B^n \text{ или } A^n-B^n=0.$$

Разность одинаковыхъ степеней двухъ чиселъ можетъ быть представлена въ видѣ произведенія двухъ множителей (§ 79):

$$A^n-B^n=(A-B)(A^{n-1}+BA^{n-2}+B^2A^{n-3}+\ldots+B^{n-1}).$$

Слѣд., данное уравненіе распадается на два уравненія:

$$A-B=0 \text{ и } A^{n-1}+BA^{n-2}+B^2A^{n-3}+\ldots+B^{n-1}=0$$

Первое изъ нихъ есть данное уравненіе; второе доставляетъ постороннія рѣшенія. Если случится, что это второе уравненіе совсѣмъ не имѣетъ рѣшеній, то тогда постороннихъ рѣшеній не будетъ.

Примѣръ.

Уравненіе $3x-2=2x$ имѣетъ одинъ корень $x=2$. Послѣ возвышенія его частей въ квадратъ, получаемъ новое уравненіе

$$(3x-2)^2=(2x)^2, \text{ т.-е. } 9x^2-12x+4=4x^2,$$

или $$5x^2-12x+4=0,$$

которое имѣетъ два корня (§ 216):

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{5}=\frac{6\pm\sqrt{16}}{5}=\frac{6\pm4}{5};$$

$$x_1=2; \quad x_2=\tfrac{2}{5}.$$

Первый корень удовлетворяетъ данному уравненію, а второй для него посторонній; онъ удовлетворяетъ измѣненному уравненію:

$$3x-2=-2x.$$

Слѣдствіе. Если для рѣшенія уравненія приходится обѣ его части возвысить въ одну и ту же степень, то, найдя корни полученнаго уравненія, мы должны особымъ изслѣдованіемъ опредѣлить, какіе изъ нихъ годятся для даннаго уравненія; для этого каждый изъ корней подставляемъ въ данное уравненіе и такимъ образомъ находимъ тѣ изъ нихъ, которые обращаютъ это уравненіе въ тождество.

234. Рѣшеніе уравненія, въ которомъ неизвѣстное входитъ подъ знаки радикаловъ. Чтобы рѣшить такое уравненіе, его должно предварительно освободить отъ радикаловъ. Ограничимся указа-

ніемъ, какъ это достигнуть въ двухъ простѣйшихъ случаяхъ.

Замѣтимъ, что во всѣхъ приводимыхъ ниже примѣрахъ знакъ $\sqrt{\ }$ означаетъ ариѳметическое значеніе корня.

Случай 1, когда уравненіе содержитъ только одинъ радикалъ какой-нибудь степени. Переносятъ всѣ раціональные члены въ одну часть уравненія, оставивъ радикалъ въ другой (уединяютъ радикалъ); затѣмъ возвышаютъ обѣ части уравненія въ степень, показатель которой равенъ показателю радикала.

Примѣръ 1. $\sqrt{x+7}-x-1=0.$

Уединимъ радикалъ: $\sqrt{x+7}=x+1.$

Возвысимъ обѣ части уравненія въ квадратъ: $x+7=x^2+2x+1.$ Рѣшивъ это уравненіе, получимъ; $x_1=2$, $x_2=-3$. Испытавъ эти значенія, находимъ, что данному уравненію удовлетворяетъ только x_1; второе рѣшеніе принадлежитъ уравненію: $-\sqrt{x+7}=x+1.$

Примѣръ 2. $1+\frac{2}{\sqrt[4]{x^2-9}}=0.$

Приведя уравненіе къ цѣлому виду и уединивъ радикалъ, получимъ: $\sqrt[4]{x^2-9}=-2$. Возвысивъ обѣ части въ четвертую степень, найдемъ:

$$x^2-9=16;\ \text{откуда: } x=\pm 5.$$

Ни одно изъ этихъ рѣшеній не удовлетворяетъ данному уравненію Оба они принадлежатъ ур. $-\sqrt[4]{x^2-9}=-2.$

Примѣръ 3. $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\sqrt{\frac{1}{a^2x^2}+\frac{5}{x^4}}}.$

Возвысимъ обѣ части уравненія въ квадратъ и отбросимъ въ обѣихъ частяхъ одинаковые члены $\frac{1}{a^2}$:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{2}{ax}=\sqrt{\frac{1}{a^2x^2}+\frac{5}{x^4}}.$$

Послѣ вторичнаго возвышенія въ квадратъ, получаемъ:

$$\frac{1}{x^4}+\frac{4}{ax^3}+\frac{4}{a^2x^2}=\frac{1}{a^2x^2}+\frac{5}{x^4}.$$

Откуда:
$$3x^2+4ax-4a^2=0.$$

Слѣдов.,
$$x=\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2+12a^2}}{3}=\frac{-2a\pm4a}{3},$$

$$x_1=\frac{2a}{3},\qquad x_2=-2a.$$

Подстановкою убѣждаемся, что рѣшеніе x_1 удовлетворяетъ данному уравненію, а рѣшеніе x_2 для него постороннее.

Случай 2, когда уравненіе содержитъ нѣсколько квадратныхъ радикаловъ. Напримѣръ, пусть уравненіе, приведенное къ цѣлому виду, содержитъ три радикала: $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$, гдѣ a, b и c, обозначаютъ какія-либо алгебраическія выраженія, содержащія неизвѣстныя. Желая освободить уравненіе отъ $\sqrt{a}$, вынесемъ этотъ радикалъ за скобки изъ всѣхъ членовъ, гдѣ онъ встрѣчается, затѣмъ уединимъ его и возвысимъ обѣ части уравненія въ квадратъ; этимъ освободимъ уравненіе отъ $\sqrt{a}$ и не введемъ никакихъ новыхъ радикаловъ. Подобно этому освобождаемъ уравненіе отъ $\sqrt{b}$ и затѣмъ отъ $\sqrt{c}$.

Примѣръ. $\sqrt{x+x^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x-x^2}+\sqrt{1+x}=0.$

Такъ какъ $x+x^2=x(1+x)$, $1-x^2=(1+x)(1-x)$, $x-x^2=x(1-x)$, то, положивъ для краткости: $1+x=a$, $x=b$, $1-x=c$, получимъ уравненіе такого вида:

$$\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}+\sqrt{a}=0.$$

Выносимъ $\sqrt{a}$ за скобки и уединяемъ его:

$$\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c}+1)=-\sqrt{bc}.$$

Возвышеніе въ квадратъ даетъ:

$$a(b+c+1+2\sqrt{bc}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c})=bc.$$

Выносимъ $\sqrt{b}$ за скобки и уединяемъ его:

$$2a\sqrt{b}(1+\sqrt{c})=bc-ab-ac-a-2a\sqrt{c}=A-2a\sqrt{c},$$

гдѣ
$$A=bc-ab-ac-a.$$

Возвышеніе въ квадратъ даетъ:

$$4a^2b(1+c+2\sqrt{c})=A^2-4aA\sqrt{c}+4a^2c.$$

Выносимъ за скобки $\sqrt{c}$ и уединяемъ его:

$$4a\sqrt{c}(2ab+A)=A^2+4a^2c-4a^2b-4a^2bc.$$

Возвысивъ въ квадратъ, окончательно находимъ:

$$16a^2c(2ab+A)^2=(A^2+4a^2c-4a^2b-4a^2bc)^2.$$

Подставивъ вмѣсто a, b и c ихъ выраженія, получимъ раціональное уравненіе съ неизвѣстнымъ x.

235. Освобожденіе уравненія отъ знаковъ радикала помощью неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Укажемъ наиболѣе простой способъ приведенія уравненія къ раціональному виду. Пусть данное уравненіе содержитъ $\sqrt[n]{q}$ (гдѣ q есть какое-нибудь выраженіе, заключающее неизвѣстныя), при чемъ этотъ радикалъ можетъ входить въ уравненіе въ различныхъ степеняхъ, т.-е. въ немъ могутъ встрѣчаться: $\sqrt[n]{q}$, $\sqrt[n]{q^2}=(\sqrt[n]{q})^2$, $\sqrt[n]{q^3}=(\sqrt[n]{q})^3$ и т. д. Обозначивъ для краткости $\sqrt[n]{q}$ черезъ r можемъ положить:

$$\sqrt[n]{q}=r, \sqrt[n]{q^2}=r^2, \sqrt[n]{q^3}=r^3...$$

Предположимъ далѣе, что, замѣнивъ въ уравненіи различныя степени $\sqrt[n]{q}$ соотвѣтственными степенями r, мы получимъ уравненіе вида **раціональнаго и цѣлаго относительно** r. Къ такому виду всегда можетъ быть приведено уравненіе. Въ самомъ дѣлѣ, если бы въ немъ были члены, дробные относительно $\sqrt[n]{q}$, мы могли бы предварительно освободить его отъ знаменателей; далѣе, если бы $\sqrt[n]{q}$ стоялъ подъ знакомъ другого радикала (т.-е. уравненіе содержало бы **сложные** радикалы), мы тогда обозначили бы черезъ r этотъ сложный радикалъ, съ цѣлью предварительно освободиться отъ него.

Если въ уравненіи встрѣтятся члены, содержащіе r съ показателемъ, бо́льшимъ или равнымъ n, мы можемъ въ каждомъ изъ нихъ сдѣлать по-

казателя меньшимъ n, основываясь на равенствѣ: $r^n=q$. Такъ:

$$r^{n+1}=r^n r=qr;\ r^{n+2}=r^n r^2=qr^2; \text{ и т. д.}$$

Понизивъ, такимъ образомъ, показателей при r вездѣ, гдѣ можно, мы приведемъ уравненіе къ виду:

$$ar^{n-1}+br^{n-2}+cr^{n-3}+\ldots+kr+l=0, \tag{1}$$

гдѣ коэффиціенты a, b, c... k и l могутъ содержать другіе радикалы (нѣкоторые изъ этихъ коэффиціентовъ могутъ равняться 0).

Чтобы освободить это уравненіе отъ всѣхъ степеней радикала r, умножимъ обѣ его части на многочленъ степени $n-1$:

$$r^{n-1}+Ar^{n-2}+Br^{n-3}+\ldots+K, \tag{2}$$

въ которомъ всѣ $n-1$ коэффиціентовъ оставимъ пока **неопредѣленными**. Послѣ умноженія правая часть уравненія будетъ 0, а лѣвая обратится въ многочленъ:

$$ar^{2n-2}+(aA+b)r^{2n-3}+(aB+bA+c)r^{2n-4}+\ldots+lK.$$

Понизимъ въ этомъ многочленѣ показателей при r во всѣхъ членахъ, гдѣ эти показатели больше или равны n, и соединимъ въ одинъ всѣ члены, содержащіе одинаковыя степени r; тогда получимъ уравненіе вида:

$$Mr^{n-1}+Nr^{n-2}+\ldots+Rr+S=0, \tag{3}$$

гдѣ M, N... и S суть выраженія первой степени относительно неопредѣленныхъ коэффиціентовъ A, B, C... K (какъ легко видѣть изъ разсмотрѣнія процесса полученія этихъ выраженій).

Составимъ теперь систему $n-1$ уравненій первой степени съ $n-1$ неизвѣстными A, B, C... K:

$$M=0,\ N=0, \ldots\ R=0 \tag{4}$$

Рѣшивъ эту систему и вставивъ найденныя значенія неопредѣленныхъ коэффиціентовъ въ ур. (3), получимъ уравненіе, не содержащее $\sqrt[n]{q}$:

$$S=0.$$

Полезно замѣтить, что это уравненіе обладаетъ вообще посторонними рѣшеніями, именно тѣми, которыя удовлетворяютъ уравненію:

$$r^{n-1}+Ar^{n-2}+Br^{n-3}+\ldots+K=0.$$

Если въ уравненіи встрѣчаются другіе радикалы, мы тѣмъ же пріемомъ уничтожимъ послѣдовательно и ихъ.

Примѣръ.

$$\sqrt[4]{(2-x)^3}-\sqrt[4]{2-x}+1=0.$$

Для краткости обозначимъ $2-x$ черезъ q; тогда уравненіе будетъ: $\sqrt[4]{q^3}-\sqrt[4]{q}+1=0$. Если положимъ: $\sqrt[4]{q}=r$, то уравненіе приметъ видъ:

$$r^3-r+1=0.$$

Умножимъ обѣ части уравненія на многочленъ:

$$r^3+Ar^2+Br+C$$

съ 3-мя неопредѣленными коэффиціентами A, B и C. Послѣ умноженія будемъ имѣть:

$$r^6+Ar^5+(B-1)r^4+(C-A+1)r^3+(A-B)r^2+(B-C)r+C=0,$$

т.-е. $$qr^2+Aqr+(B-1)q+(C-A+1)r^3+\ldots\ldots\ldots\ldots=0;$$

$$(C-A+1)r^3+(A-B+q)r^2+(B-C+Aq)r+[C+(B-1)q]=0.$$

Положимъ, что $\begin{cases} C-A+1=0 \\ A-B+q=0 \\ B-C+Aq=0 \end{cases}$ или $\begin{cases} C=A-1 \\ B=A+q \\ A+q-A+1+Aq=0 \end{cases}$

Откуда находимъ:

$$A=-\frac{q+1}{q};\ B=\frac{q^2-q-1}{q}\quad C=-\frac{2q+1}{q}$$

и $$C+(B-1)q=-\frac{2q+1}{q}+\left(\frac{q^2-q-1}{q}-1\right)q=\frac{q^3-2q^2-3q-1}{q}.$$

Теперь уравненіе приводится къ виду:

$$q^3-2q^2-3q-1=0.$$

Подставивъ на мѣсто q разность $2-x$ и произведя упрощенія, окончательно получимъ уравненіе:

$$x^3-4x^2+x+7=0.$$

Замѣчаніе. Можетъ случиться, что уравненія системы (4) окажутся несовмѣстными; въ этомъ случаѣ, значитъ, не существуетъ многочленъ (2) степени ($n-1$)-й, способный обратить въ нули всѣ коэффиціенты при r въ ур. ($'$). Тогда пробуемъ тѣмъ же пріемомъ найти многочленъ степени ($n-2$)-й, достигающій той же цѣли. Если и такого многочлена не окажется, будемъ искать многочленъ степени ($n-3$)-й и т. д.

Примѣръ.

$$\sqrt[3]{q^2}-2\sqrt[3]{q}+4=0.$$

$$\sqrt[3]{q}=r;\ \sqrt[3]{q^2}=r^2,\ r^2-2r+4=0.$$

$$(r^2-2r+4)(r^2+Ar+B)=r^4+(A-2)r^3+(B-2A+4)r^2+$$
$$+(4A-2B)r+4B=qr+(A-2)q+(B-2A+4)r^2+\ldots$$
$$=(B-2A+4)r^2+(4A-2B+q)r+[4B+(A-2)q]=0$$

Положимъ, что $\begin{cases} B-2A+4=0 \\ 4A-2B+q=0 \end{cases}$ т.-е. $\begin{cases} 2A-B=4 \\ 4A-2B=-q. \end{cases}$

Уравненія этой системы оказываются несовмѣстными. Посмотримъ, нельзя ли найти многочленъ 1-й степени: $r+A$, достигающій той же цѣли:

$$(r^3-2r+4)(r+A)=r^3+(A-2)r^2+(4-2A)r+4A=$$
$$=q+(A-2)r^2+\ldots\ldots=(A-2)r^2+(4-2A)r+4A+q=0.$$

Оказывается, что при $A=2$ коэффиціенты при r^2 и при r обращаются въ нули, и уравненіе принимаетъ раціональный видъ: $8+q=0$.

236. Приведеніе знаменателя дроби къ раціональному виду. Для этой цѣли можетъ служить тотъ же пріемъ, который въ предыдущемъ параграфѣ былъ нами указанъ для освобожденія уравненія отъ знаковъ радикала. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что если для уничтоженія различныхъ степеней $\sqrt[n]{q}$ въ уравненіи $F=O$ достаточно умножить обѣ его части на прилично выбранный многочленъ F_1, то для уничтоженія различныхъ степеней $\sqrt[n]{q}$ въ знаменателѣ F дроби достаточно умножить числителя и знаменателя на F_1;

Пусть, напр., имѣемъ дробь:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{2}+1}=\frac{1}{r^3-r+1},$$

гдѣ $r=\sqrt[4]{2}$. Множитель, обращающій знаменателя этой дроби въ раціональное выраженіе, есть многочленъ r^3+Ar^2+Br+C, коэффиціенты котораго мы уже опредѣлили въ примѣрѣ предыдущаго параграфа. Они равны (полагаемъ $q=2$).

$$A=-\frac{3}{2},\ \ B=\frac{1}{2},\ \ C=-\frac{5}{2}\cdot$$

Значитъ,
$$r^3+Ar^2+Br+C=\sqrt[4]{8}-\frac{3}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}-\frac{5}{2}\cdot$$

Послѣ умноженія въ знаменателѣ получимъ:

$$C+(B-1)q=-\frac{5}{2}+\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot 2=-\frac{5}{2}-1=-\frac{7}{2}\cdot$$

Значитъ, дробь приметъ видъ:

$$\frac{-2\sqrt[4]{8}+3\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}+5}{7}.$$

ГЛАВА VI.

Уравненія высшихъ степеней, приводимыя къ квадратнымъ или къ уравненіямъ первой степени.

237. Биквадратное уравненіе. Такъ наз. уравненіе четвертой степени, содержащее неизвѣстное только въ четныхъ степеняхъ. Общій видъ его слѣдующій:

$$ax^4+bx^2+c=0. \qquad (1)$$

Такое уравненіе легко приводится къ квадратному посредствомъ введенія вспомогательнаго неизвѣстнаго. Положимъ, что $x^2=y$; тогда $x^4=(x^2)^2=y^2$, и уравненіе приметъ видъ:

$$ay^2+by+c=0. \qquad (2)$$

Уравненіе это имѣетъ два корня:

$$y_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad y_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Подставивъ каждое изъ этихъ значеній въ уравненіе $x^2=y$, найдемъ, что биквадратное уравненіе имѣетъ слѣдующіе 4 корня:

$$x_1=+\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.\quad x_3=+\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

$$x_2=-\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.\quad x_4=-\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Если корни y_1 и y_2 вспомогательнаго квадратнаго уравненія (2) окажутся мнимыми (что будетъ при $b^2-4ac<0$), то всѣ 4 корня биквадратнаго уравненія (1) будутъ также мнимые. Если y_1 и y_2 окажутся вещественные неравные (что будетъ при $b^2-4ac>0$), то могутъ представиться слѣдующіе 3 случая: 1) одинъ изъ корней y_1 и y_2 положителенъ, другой отрицателенъ; въ этомъ случаѣ 2 корня биквадратнаго уравненія вещественные, а два

мнимые: 2) оба корня y_1 и y_2 положительны; тогда всѣ 4 корня биквадратнаго уравненія вещественные; 3) оба корня y_1 и y_2 отрицательны; тогда всѣ 4 корня биквадратнаго уравненія мнимые. Наконецъ, если корни y_1 и y_2 равны (что будетъ при $b^2-4ac=0$), то 4 корня биквадратнаго уравненія дѣлаются попарно равными:

$$x_1=x_3=+\sqrt{\frac{-b}{2a}};\quad x_2=x_4=-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$$

и будутъ всѣ или вещественные, или всѣ мнимые.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $x^4-13x^2+36=0$.

$$x^2=y;\quad x^4=y^2;\quad y^2-13y+36=0;$$

$$y=\frac{13}{2}\pm\sqrt{\frac{169}{4}-36}=\frac{13}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{13\pm5}{2}.$$

$$y_1=\frac{13+5}{2}=9;\quad y_2=\frac{13-5}{2}=4;$$

$$x=\pm\sqrt{y};\ x_1=+\sqrt{9}=3;\ x_2=-\sqrt{9}=-3;\ x_3=+\sqrt{4}=2;$$

$$x_4=-\sqrt{4}=-2.$$

238. Преобразованіе сложнаго радикала $\sqrt{A+\sqrt{B}}$. Корни биквадратнаго уравненія, какъ мы видѣли, выражаются подъ видомъ сложнаго радикала $\sqrt{A+\sqrt{B}}$. Такой радикалъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ возможно представить въ видѣ суммы или разности двухъ простыхъ радикаловъ. Покажемъ, какъ и при какихъ условіяхъ это можно сдѣлать.

Пусть въ сложномъ радикалѣ $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ числа A и B будутъ соизмѣримыя, при чемъ $\sqrt{B}$ число вещественное несоизмѣримое (и, слѣд., B число положительное). Предположимъ, что возможно равенство:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y},$$

въ которомъ числа x и y положительныя соизмѣримыя. Возвысивъ обѣ части этого равенства въ квадратъ, получимъ:

$$A+\sqrt{B}=x+y+2\sqrt{xy}=x+y+\sqrt{4xy}.$$

Откуда: $$\sqrt{4xy}=(A-x-y)+\sqrt{B}$$

и слѣд. $$4\,xy=(A-x-y)^2+B+2\,(A-x-y)\sqrt{B}.$$

Лѣвая часть этого уравненія есть число соизмѣримое; значитъ, и правая часть должна быть числомъ соизмѣримымъ. Но это возможно только тогда, когда коэффиціентъ при $\sqrt{B}$ будетъ равенъ нулю. Положивъ

$$A-x-y=0, \text{ находимъ: } x+y=A; \text{ тогда } 4\,xy=\sqrt{B},$$

или:

$$x+y=A,\ xy=\frac{B}{4}\,.$$

Изъ этихъ равенствъ видно, что x и y можно разсматривать, какъ корни такого квадратнаго уравненія, у котораго коэффиціентъ при неизвѣстномъ во 2-й степени есть 1, коэффиціентъ при неизвѣстномъ въ 1-й степени есть $-A$, а свободный членъ равенъ $\frac{B}{4}$ (§ 219). Значитъ, рѣшивъ уравненіе:

$$z^2-Az+\frac{B}{4}=0,$$

найдемъ x и y.

$$x=z_1=\frac{A}{2}+\sqrt{\frac{A^2}{4}-\frac{B}{4}}=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}\,.$$

$$y=z_2=\frac{A}{2}-\sqrt{\frac{A^2}{4}-\frac{B}{4}}=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}\,.$$

Отсюда видно, что x и y только тогда будутъ числа положительныя соизмѣримыя, когда 1) A есть число положительное, 2) A^2-B есть точный квадратъ; значитъ, только при этихъ условіяхъ радикалъ $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ можно представить въ видѣ суммы двухъ простыхъ радикаловъ:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\,. \qquad (1)$$

Подобнымъ же образомъ выведемъ, что при тѣхъ же условіяхъ:

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\,. \qquad (2)$$

Примѣры:

1) $\sqrt{10+\sqrt{51}}=\sqrt{\frac{10+7}{2}}+\sqrt{\frac{10-7}{2}}=\frac{\sqrt{34}+\sqrt{6}}{2}$;

2) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{8-\sqrt{60}}=\sqrt{\frac{8+2}{2}}-\sqrt{\frac{8-2}{2}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$;

3) $\sqrt{\frac{9}{11}+\frac{4}{11}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{9+\sqrt{32}}}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{\frac{9+7}{2}}+\sqrt{\frac{9-7}{2}}}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{8}+1}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{88}+\sqrt{11}}{11}$.

4) $a_{2n}=\sqrt{2r^2-2r\sqrt{r^2-\frac{a_n^2}{4}}}=\sqrt{2r^2-\sqrt{4r^4-a_n^2r^2}}$.

(Извѣстная геометрическая формула удвоенія числа сторонъ правильнаго вписаннаго многоугольника).

Здѣсь $A=2r^2$, $B=4r^4-a^2_nb^2$, $\sqrt{A^2-B}=a_nr$; поэтому

$$a_{2n}=\sqrt{\frac{2r^2+a_nr}{2}}-\sqrt{\frac{2r^2-a_nr}{2}}=\sqrt{r\left(r+\frac{a_n}{2}\right)}-\sqrt{r\left(r-\frac{a_n}{2}\right)}.$$

Замѣчаніе. Равенства (1) и (2) остаются вѣрными и тогда, когда A^2-B не есть точный квадратъ и даже тогда, когда A и B числа несоизмѣримыя; но тогда эти равенства не представляютъ практическаго интереса.

239. Возвратное уравненіе 4-й степени. Возвратнымъ уравненіемъ вообще называется уравненіе, у котораго коэффиціенты, равноотстоящіе отъ начала и конца, одинаковы Такимъ образомъ, возвратное уравненіе 4-й степени есть уравненіе вида:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0.$$

Чтобы рѣшить такое уравненіе, раздѣлимъ обѣ его части на x^2 (мы имѣемъ право это сдѣлать, такъ какъ x не равно 0:

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$$

или

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

Введемъ вспомогательное неизвѣстное y, опредѣляемое равенствомъ:

$$x+\frac{1}{x}=y;\text{ тогда } x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2 \text{ и, слѣд., } x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2;$$

подставивъ эти выраженія въ уравненіе, получимъ:

$$a(y^2-2)+by+c=0.$$

Рѣшивъ это квадратное уравненіе, найдемъ два значенія для y; пусть это будутъ: $y_1=\alpha$ и $y_2=\beta$; тогда

$$x+\frac{1}{x}=\alpha \text{ и } x+\frac{1}{x}=\beta,$$

и слѣд.:

$$x^2-\alpha x+1=0 \text{ и } x^2-\beta x+1=0$$

Изъ этихъ двухъ уравненій найдемъ 4 рѣшенія даннаго уравненія

240. Болѣе общій случай уравненія 4-й степени. Подобнымъ же пріемомъ можно рѣшить уравненіе 4-й степени:

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0.$$

если коэффиціенты a, b, d и e удовлетворяютъ пропорціи:

$$a\cdot e=b^2:d^2.$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ этой пропорціи находимъ: $e=\frac{ad^2}{b^2}$; слѣд., уравненіе

принимаетъ видъ: $ax^4+bx^3+cx^2+dx+\frac{ad^2}{b^2}=0$. Раздѣливъ всѣ его члены на x^2, можемъ уравненіе представить такъ:

$$a\left(x^2+\frac{d^2}{b^2x^2}\right)+b\left(x+\frac{d}{bx}\right)+c=0.$$

Если положимъ, что $x+\frac{d}{bx}=y$, то $x^2+\frac{d^2}{b^2x^2}=y^2-\frac{2d}{b}$, и уравненіе превращается въ квадратное:

$$a^2\left(y^2-\frac{2d}{b}\right)+by+c=0.$$

Найдя y, легко опредѣлимъ потомъ и x

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $2x^4-15x^3+40x^2-45x+18=0$

Замѣтивъ, что $2:18=(-15)^2:(-45)^2$, раздѣлимъ всѣ члены уравненія на x^2 и представимъ, его въ видѣ:

$$2\left(x^2+\frac{9}{x^2}\right)-15\left[x+\frac{3}{x}\right]+40=0$$

Если положимъ, что $x+\frac{3}{x}=y$, то $x^2+\frac{9}{x^2}=y^2-6$, и уравненіе будетъ:

$$2(y^2-6)-15y+40=0 \text{ или } 2y^2-15y+28=0.$$

Откуда:

$$y_1=4 \text{ и } y_2=\frac{7}{2}.$$

Значенія x опредѣляются уравненіями:

$$x+\frac{3}{x}=4 \text{ и } x+\frac{3}{x}=\frac{7}{2},$$

изъ которыхъ находимъ: $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=2$, $x_4=\frac{3}{2}$.

241. Уравненія, у которыхъ лѣвая часть разлагается на множителей, а правая есть 0.

Такъ какъ произведеніе можетъ равняться 0 только тогда, когда, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ сомножителей равенъ 0, то рѣшеніе уравненія вида: $ABC\ldots=0$ приводится къ рѣшенію уравненій болѣе низкихъ степеней: $A=0$, $B=0$, $C=0\ldots$

Примѣры.

1) $ax^3+bx^2+cx=0$. Представивъ уравненіе въ видѣ:

$$x(ax^2+bx+c)=0,$$

замѣтимъ, что оно распадается на два уравненія:

$$x=0 \quad \text{и} \quad ax^2+bx+c=0.$$

2) $ax^3+bx^2+bx+a=0$. Это возвратное уравненіе 3-й степени можно представить такъ:

$$a(x^3+1)+bx(x+1)=0.$$

Но $x^3+1=x^3+x^2-x^2+1=x^2(x+1)-(x+1)(x-1)=$
$$=(x+1)(x^2-x+1);$$

поэтому уравненіе можемъ написать такъ:

$$(x+1)[a(x^2-x+1)+bx]=0.$$

Слѣдов., оно распадается на два уравненія:

$$x+1=0 \quad \text{и} \quad ax^2-(a-b)x+a=0.$$

Откуда легко получимъ три значенія для x.

242. Зная одинъ корень уравненія, можемъ понизить его степень на 1. Пусть имѣемъ уравненіе $ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+...=0$ и положимъ, что одинъ корень его извѣстенъ, напр., $x=\alpha$. Въ такомъ случаѣ лѣвая часть уравненія дѣлится на $x-\alpha$ (§ 76, слѣдствіе 2-е). Раздѣливъ на самомъ дѣлѣ, получимъ въ частномъ нѣкоторый многочленъ Q степени $(m-1)$ й. Такъ какъ дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное, то предложенное уравненіе можно представить такъ: $(x-\alpha)\,Q=0$. Теперь очевидно, что уравненіе распадается на два: $x-\alpha=0$ и $Q=0$. Послѣднее уравненіе есть $(m-1)$-й степени.

Примѣръ: $x^3-15x^2+56x-60=0$

Замѣтивъ, что уравненіе удовлетворяется при $x=10$, дѣлимъ его лѣвую часть на $x-10$; въ частномъ получаемъ x^2-5x+6; послѣ этого уравненіе представляемъ такъ:

$$(x-10)\,(x^2-5x+6)=0,$$

откуда:

$$x_1=10,\ x_2=2,\ x_3=3.$$

243. Упрощеніе двучленнаго уравненія. Двучленнымъ уравненіемъ наз. уравненіе вида: $ax^m+b=0$, или, что то же самое, вида $x^m+\frac{b}{a}=0$ [1]). Обозначивъ абсолютную величину дроби $\frac{b}{a}$ черезъ q, мы можемъ двучленное уравненіе

---

[1]) *Когда двучленное* уравненіе имѣетъ видъ $ax^m+bx^n=0$, гдѣ $m>n$, то его можно представить такъ: $x^n(ax^{m-n}+b)=0$ и, слѣд., оно распадается на два уравненія: $x=0$ и $ax^{m-n}+b=0$.

написать: или $x^m+q=0$, или $x^m-q=0$. При помощи вспомогательнаго неизвѣстнаго эти уравненія всегда можно упростить такъ, что свободный членъ у перваго обратится въ $+1$, а у второго въ -1. Дѣйствительно, положимъ, что $x=y\sqrt[m]{q}$, гдѣ $\sqrt[m]{q}$ есть ариөметическій корень m-й степени изъ q; тогда $x^m=qy^m$, и уравненія примутъ видъ:

$$qy^m+q=0,\quad \text{т.-е.}\quad q(y^m+1)=0;\ \text{откуда:}\ y^m+1=0;$$
или
$$qy^m-q=0,\quad \text{т.-е.}\quad q(y^m-1)=0;\ \text{откуда:}\ y^m-1=0.$$

Итакъ, рѣшеніе двучленныхъ уравненій приводится къ рѣшенію уравненій вида $y^m\pm 1=0$. Рѣшеніе такихъ уравненій элементарными способами можетъ быть выполнено только при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ показателя m, напримѣръ, при $m=3$, 4, 5, 6, 8, 9 и при нѣкоторыхъ другихъ. Общій пріемъ, употребляемый при этомъ, состоитъ въ разложеніи лѣвой части уравненія на множителей, послѣ чего уравненіе приводится къ виду $ABC...=0$, разсмотрѣнному нами раньше.

244. Рѣшеніе двучленныхъ уравненій третьей степени. Эти уравненія слѣдующія:

$$x^3-1=0 \text{ и } x^3+1=0.$$

Замѣтивъ, что

$$x^3-1=x^3-x^2+x^2-1=x^2(x-1)+(x+1)(x-1)=(x-1)(x^2+x+1)$$
$$\text{и } x^3+1=(x+1)(x^2-x+1),$$

мы можемъ предложенныя уравненія написать такъ:

$$(x-1)(x^2+x+1)=0 \quad \text{и} \quad (x+1)(x^2-x+1)=0.$$

Значитъ, первое изъ нихъ имѣетъ корни, удовлетворяющіе уравненіямъ:

$$x-1=0 \quad \text{и} \quad x^2+x+1=0,$$

а второе—корни, удовлетворяющіе уравненіямъ:

$$x+1=0 \quad \text{и} \quad x^2-x+1=0.$$

Рѣшивъ ихъ, находимъ, что уравненіе $x^3-1=0$ имѣетъ слѣ-

дующіе три корня:

$$x_1=1,\ x_2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ x_3=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

изъ которыхъ одинъ вещественный, а два мнимыхъ; уравненіе $x^3+1=0$ имѣетъ три корня:

$$x_1=-1,\ x_2=\frac{1+\sqrt{-3}}{2},\ x_3=\frac{1-\sqrt{-3}}{2},$$

изъ которыхъ также одинъ вещественный, а два мнимыхъ.

245. Другіе примѣры двучленныхъ уравненій, разрѣшимыхъ элементарно. 1) $x^4-1=0$, это уравненіе можно написать такъ:

$$(x^2-1)(x^2+1)=0.$$

Слѣд., оно распадается на два: $x^2-1=0$ и $x^2+1=0$, отсюда находимъ: $x=\pm1$ и $x=\pm\sqrt{-1}$.

2) $x^4+1=0$, уравненіе можно написать такъ:

$$(x^2+1)^2-2x^2=0 \text{ или } (x^2+1-x\sqrt{2})(x^2+1+x\sqrt{2})=0.$$

Слѣд., оно распадается на 2 уравненія второй степени

3) $x^5-1=0$; уравненіе можно написать такъ:

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0.$$

Слѣд., оно распадается на два уравненія, изъ которыхъ послѣднее есть возвратное уравненіе 4-й степени, рѣшаемое элементарно

4) $x^5+1=0$, уравненіе можно написать такъ:

$$(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)=0$$

Слѣд., оно распадается на два уравненія, изъ которыхъ послѣднее есть возвратное 4-й степени

Подобнымъ же образомъ рѣшаются уравненія

$$x^6\pm1=0,\ x^8\pm1=0,\ x^9\pm1=0$$

и нѣкоторыя другія

246. Различныя значенія корня. Рѣшеніе двучленныхъ уравненій m-й степени имѣетъ тѣсную связь съ нахожденіемъ всѣхъ значеній корня той же степени изъ даннаго числа. Въ самомъ дѣлѣ, если черезъ x обозначимъ какое угодно значеніе $\sqrt[m]{A}$, то, согласно опредѣленію корня, мы будемъ имѣть: $x^m=A$ и, слѣдов., $x^m-A=0$; такимъ образомъ, каждое рѣшеніе этого двучленнаго уравненія пред-

ставляетъ собою m-й корень изъ числа A; слѣд., сколько двучленное уравненіе имѣетъ различныхъ рѣшеній, столько $\sqrt[m]{A}$ имѣетъ различныхъ значеній.

Основываясь на этомъ замѣчаніи, докажемъ, что корень кубичный изъ всякаго числа имѣетъ три различныхъ значенія. Найти всѣ значенія $\sqrt[3]{A}$ значитъ, другими словами, рѣшить уравненіе $x^3-A=0$. Обозначивъ ариѳметическое значеніе $\sqrt[3]{A}$ черезъ q (оно можетъ быть только одно, § 163, III), введемъ вспомогательное неизвѣстное y, связанное съ x такимъ равенствомъ: $x=qy$. Тогда уравненіе $x^3-A=0$ представится такъ: $q^3y^3-A=0$; но $q^3=A$; поэтому $q^3y^3-A=A\ (y^3-1)$; слѣдов., уравненіе окончательно приметъ видъ: $y^3-1=0$. Мы видѣли, что это уравненіе имѣетъ три корня:

$$y_1=1,\ \ y_2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \ y_3=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Каждое изъ этихъ значеній, удовлетворяя уравненію $y^3=1$, представляетъ собою кубичный корень изъ 1. Такъ какъ $x=qy$, то

$$x_1=q.1,\quad x_2=q.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad x_3=q.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Это и будутъ три значенія $\sqrt[3]{A}$; одно изъ нихъ вещественное, а два мнимыя. Всѣ они получатся, если ариѳметическое значеніе кубичнаго корня изъ A умножимъ на каждое изъ трехъ значеній кубичнаго корня изъ 1. Напримѣръ, кубичный корень изъ 8, ариѳметическое значеніе котораго есть 2, имѣетъ слѣдующія три значенія:

$$2;\ 2.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=-1+\sqrt{-3};\quad 2.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=-1-\sqrt{-3}.$$

Замѣчаніе. Въ высшей алгебрѣ доказывается, что двучленное уравненіе $x^m-A=0$ имѣетъ m различныхъ корней; вслѣдствіе этого $\sqrt[m]{A}$ имѣетъ m различныхъ значеній, при чемъ, если m число четное и A отри-

цательное, то всѣ эти значенія мнимыя; если m четное и A положительное, то два значенія вещественныя (изъ нихъ одно положительное, другое отрицательное, съ одинаковой абсолютной величиной); наконецъ, если m нечетное число, то изъ всѣхъ значеній $\sqrt[m]{A}$ только одно вещественное.

247. Трехчленное уравненіе. Такъ наз. уравненіе вида: $ax^{2n}+bx^n+c=0$, т.-е. уравненіе, содержащее 3 члена: одинъ свободный (c), другой съ неизвѣстнымъ въ нѣкоторой степени n и третій съ неизвѣстнымъ въ степени, которой показатель есть $2n$. Рѣшеніе такого уравненія посредствомъ введенія вспомогательнаго неизвѣстнаго приводится къ рѣшенію квадратнаго и двучленнаго уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, если положимъ, что $x^n=y$, то тогда $x^{2n}=(x^n)^2=y^2$ и уравненіе приметъ видъ: $$ay^2+by+c=0;$$

откуда: $$y_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad y_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

и, слѣдов., $$x^n=y_1 \text{ и } x^n=y_2.$$

Рѣшивъ эти двучленныя уравненія, найдемъ всѣ значенія x.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $x^6-9x^3+8=0$.

$$x^3=y;\quad y^2-9y+8=0;\quad y=\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}-8}=\frac{9\pm 7}{2};$$

$$y_1=8;\quad y_2=1;\quad \text{слѣдов., } x^3=8 \text{ и } x^3=1.$$

Рѣшивъ эти двучленныя уравненія, получимъ слѣдующія 6 значеній для x:

$$x_1=2;\quad x_2=-1+\sqrt{-3};\quad x_3=-1-\sqrt{-3};$$

$$x_4=1;\quad x_5=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad x_6=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

248. Уравненія, сходныя съ трехчленными. Подобно трехчленнымъ, рѣшаются также уравненія вида:

$$aQ^2+bQ+c=0 \text{ и } aQ^4+bQ^2+c=0,$$

если Q есть такое выраженіе, содержащее x, которое, будучи приравнено какому-нибудь данному числу, составитъ уравненіе, разрѣшимое элементарно. Въ самомъ дѣлѣ, замѣнивъ въ данныхъ уравненіяхъ Q на y, полу-

чимъ квадратное или биквадратное уравненіе относительно y. Найдя всѣ значенія y и подставивъ каждое изъ нихъ въ ур. $Q=y$, найдемъ изъ этого уравненія всѣ значенія x

Примѣръ. $(x^2-5x+11)^2-12(x^2-5x+11)+35=0.$

Положивъ $x^2-5x+11=y$, получимъ: $y^2-12y+35=0$,

откуда: $y_1=7,\ y_2=5,$

слѣд., $x^2-5x+11=7$ и $x^2-5x+11=5.$

Рѣшивъ эти уравненія, находимъ: $x_1=4,\ x_2=1,\ x_3=3,\ x_4=2.$

249. Введеніе вспомогательныхъ неизвѣстныхъ. Иногда уравненіе удается рѣшить посредствомъ введенія двухъ или болѣе вспомогательныхъ неизвѣстныхъ; въ такомъ случаѣ данное уравненіе приводится къ системѣ уравненій съ вспомогательными неизвѣстными.

Примѣръ. $(x+a)^4+(x+b)^4=c.$

Положимъ, что $x+a=y,\ x+b=z$; тогда рѣшеніе даннаго уравненія сводится къ рѣшенію такой системы:

$$y^4+z^4=c,\ y-z=a-b$$

Чтобы рѣшить эту систему, возвысимъ второе уравненіе въ 4-ю степень и вычтемъ изъ него первое; тогда получимъ:

$$-4y^3z+6y^2z^2-4yz^3=(a-b)^4-c$$

или $$2yz\,(2y^2-3yz+2z^2)=c-(a-b)^4,$$

т.-е $$2yz[2(y-z)^2+yz]=c-(a-b)^4.$$

Но $y-z=a-b$; подставивъ, найдемъ:

$$2yz[2(a-b)^2+yz]=c-(a-b)^4.$$

Изъ этого уравненія опредѣлимъ yz; зная yz и $y-z$, легко затѣмъ найдемъ y и z

---

ГЛАВА VII.

Нѣкоторыя замѣчанія объ алгебраическихъ уравненіяхъ.

250. Общій видъ всякаго алгебраическаго уравненія. Мы видѣли (§ 114) что уравненіе, содержащее неизвѣстное въ знаменателяхъ, можетъ быть приведено къ цѣлому виду. Далѣе мы знаемъ (§§ 234, 235), что уравненіе, содержащее неизвѣстное подъ знакомъ радикала, можетъ быть приведено къ раціональному виду. Вслѣдствіе этого можемъ сказать, что всякое уравненіе, въ которомъ неизвѣстное связано

съ данными числами посредствомъ конечнаго числа 6-ти алгебраическихъ дѣйствій (сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня[1]), можетъ быть приведено къ такому **цѣлому** и **раціональному** виду:

$$ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\ldots+kx+l=0,$$

гдѣ коэффиціенты уравненія $a, b, c\ldots k$ и l суть постоянныя вещественныя или комплексныя числа, а m есть показатель степени уравненія. Нѣкоторые коэффиціенты въ частныхъ случаяхъ могутъ равняться 0.

Уравненіе такого вида наз. **алгебраическимъ**. Алгебраическія уравненія степени выше 2-й наз. уравненіями **высшихъ степеней**.

251. Нѣкоторыя свойства алгебраическаго уравненія. Уравненія высшихъ степеней составляютъ предметъ высшей алгебры, элементарная же разсматриваетъ только нѣкоторые частные случаи этихъ уравненій.

Высшая алгебра устанавливаетъ слѣдующую важную истину объ уравненіяхъ: **всякое алгебраическое уравненіе съ вещественными коэффиціентами имѣетъ вещественный или комплексный корень** (Теорема **Гаусса**[2]) (1799). Допустивъ эту истину (доказательство которой въ элементарной алгебрѣ было бы затруднительно), не трудно показать, что **алгебраическое уравненіе имѣетъ столько корней, вещественныхъ или комплексныхъ, сколько единицъ въ показателѣ его степени**. Дѣйствительно, пусть имѣемъ уравненіе:

$$ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\ldots+kx+l=0. \qquad (1)$$

Согласно теоремѣ Гаусса это уравненіе должно имѣть вещественный или комплексный корень; пусть этотъ корень будетъ α. Тогда многочленъ стоящій въ лѣвой части уравненія (1), долженъ дѣлиться на $x-\alpha$ (§ 76, слѣд. 2-е). Если сдѣлаемъ дѣленіе, то въ частномъ получимъ многочленъ степени $m-1$, у котораго первый коэффиціентъ будетъ a. Обозначивъ другіе его коэффиціенты соотвѣтственно буквами: $b_1, c_1 \ldots k_1$ и, принявъ во вниманіе, что дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное, можемъ представить уравненіе (1) такъ:

$$(x-\alpha)\,(ax^{m-1}+b_1x^{m-2}+c_1x^{m-3}+\ldots+k_1)=0. \qquad (2)$$

Приравнявъ 0 многочленъ, стоящій во вторыхъ скобкахъ, получимъ новое уравненіе, которое, по той же теоремѣ должно имѣть нѣкоторый корень β; вслѣдствіе этого лѣвая его часть можетъ быть разложена на два

[1]) Въ предположеніи, что при возвышеніи въ степень и при извлеченіи корня неизвѣстное не входитъ ни въ показателя степени, ни въ показателя корня.

[2]) Карлъ-Фридрихъ **Гауссъ** — знаменитый нѣмецкій математикъ (1777 — 1855).

множителя: $x-\beta$ и многочленъ степени $m-2$, у котораго первый коэффиціентъ попрежнему будетъ a. Поэтому уравненіе (1) можно переписать такъ:

$$(x-\alpha)(x-\beta)(ax^{m-2}+b_2x^{m-3}+\ldots)=0. \qquad (3)$$

Продолжая эти разсужденія далѣе дойдемъ, наконецъ, до того, что многочленъ, заключенный въ послѣднихъ скобкахъ, будетъ 2-й степени, при чемъ первый его коэффиціентъ останется a. Разложивъ этотъ трехчленъ на множителей (§ 220), приведемъ уравненіе (1) окончательно къ виду:

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)=0, \qquad (4)$$

гдѣ всѣхъ разностей: $x-\alpha$, $x-\beta\ldots$ будетъ m. Очевидно, что ур. (4) обращается въ тождество при каждомъ изъ значеній: $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma\ldots x=\lambda$ и не удовлетворяется никакими иными значеніями x, значитъ, уравненіе (1) имѣетъ m корней $\alpha, \beta, \gamma\ldots\lambda$. Въ частныхъ случаяхъ нѣкоторые и даже всѣ корни могутъ оказаться одинаковыми.

Полезно замѣтить еще слѣдующія истины, доказываемыя въ высшей алгебрѣ.

Сумма корней всякаго алгебраическаго уравненія $ax^m+bx^{m-1}+\ldots+kx+l=0$ равна $-\frac{b}{a}$, а произведеніе корней равно $\frac{l}{a}$ (примѣромъ можетъ служить квадратное уравненіе).

Если алгебраическое уравненіе съ вещественными коэффиціентами имѣетъ комплексные корни, то число этихъ корней четное (примѣромъ можетъ служить биквадратное уравненіе).

Если алгебраическое уравненіе съ вещественными коэффиціентами имѣетъ n корней вида $p+qi$, то оно имѣетъ n корней вида $p-qi$ (примѣромъ можетъ служить биквадратное уравненіе, комплексные корни котораго всегда сопряженные), и такъ какъ:

$$[x-(p+qi)][x-(p-qi)]=[(x-p)-qi][(x-p)+qi]=$$
$$=(x-p)^2-q^2i^2=(x-p)^2+q^2=x^2-2px+(p^2+q^2),$$

то лѣвая часть уравненія содержитъ въ этомъ случаѣ n вещественныхъ множителей вида ax^2+bx+c.

Алгебраическое уравненіе нечетной степени съ вещественными коэффиціентами имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ вещественный корень.

Уравненія съ произвольными буквенными коэффиціентами степени 3-й и 4-й разрѣшены алгебраически, т.-е. *для* корней этихъ уравненій найдены общія формулы, составленныя изъ коэффиціентовъ уравненія посредствомъ алгебраическихъ дѣйствій.

Въ этомъ смыслѣ уравненія съ произвольными буквенными коэффиціентами степени выше 4-й не могутъ быть разрѣшены алгебраически (теорема **Абеля**[1]); однако, когда коэффиціенты уравненія какой угодно степени выражены числами, всегда есть возможность вычислить съ желаемой степенью приближенія всѣ его корни, какъ вещественные, такъ и мнимые. Указаніе способовъ такого вычисленія составляетъ важную часть предмета высшей алгебры.

---

[1]) Норвежскій математикъ начала XIX столѣтія (1802—1829).

ГЛАВА VIII.

Система уравненій второй степени.

252. Нормальный видъ уравненія второй степени съ двумя неизвѣстными. Полное уравненіе второй степени съ 2 неизвѣстными x и y, послѣ раскрытія въ немъ скобокъ, освобожденія отъ знаменателей и отъ радикаловъ и приведенія подобныхъ членовъ, можетъ содержать въ себѣ только члены слѣдующихъ 6 видовъ:

члены 2-й степени:	члены 1-й степени:
содержащіе x^2	содержащіе x
» y^2	» y
» xy	

и членъ, не содержащій неизвѣстнаго (членъ нулевой степени).

Перенеся всѣ члены уравненія въ одну его лѣвую часть, мы приведемъ уравненіе къ такому нормальному виду:

$$ax^2+bxy+cx^2+dx+ey+f=0,$$

гдѣ коэффиціенты a, b, c, d, e, f суть данныя алгебраическія числа, положительныя или отрицательныя; нѣкоторыя изъ нихъ могутъ равняться 0.

Одно уравненіе съ двумя неизвѣстными допускаетъ безчисленное множество рѣшеній, т.-е. принадлежитъ къ числу неопредѣленныхъ (см. § 118).

253. Система двухъ уравненій, изъ которыхъ одно первой, а другое второй степени. Общій видъ такой системы слѣдующій:

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \\ mx+ny=p. \end{cases}$$

Чтобы рѣшить эту систему, опредѣлимъ изъ того уравненія, которое первой степени, какое-нибудь одно неизвѣстное въ зависимости отъ другого, напр., y въ зависимости отъ x, и вставимъ полученное выраженіе въ уравненіе второй степени;

тогда вмѣсто данной системы получимъ такую равносильную систему:

$$y=\frac{p-mx}{n},$$

$$ax^2+bx.\frac{p-mx}{n}+c\left(\frac{p-mx}{n}\right)^2+dx+e.\frac{p-mx}{n}+f=0.$$

Въ этой системѣ второе уравненіе есть квадратное съ однимъ неизвѣстнымъ x. Рѣшивъ его, найдемъ для x два значенія: x_{I} и x_{II}, соотвѣтственно которымъ изъ перваго уравненія получимъ два значенія для другого неизвѣстнаго: y_{I} и y_{II}. Такимъ образомъ, предложенная система имѣетъ двѣ пары рѣшеній (x_{I}, y_{I}) и (x_{II}, y_{II}).

Примѣръ. $\begin{cases} x^2-4y^2+x+3y=1 \ \ldots \text{ ур. 2-й степ.} \\ 2x-y=1 \ \ldots\ldots\ldots \text{ ур. 1-й степ.} \end{cases}$

Изъ второго уравненія находимъ: $y=2x-1$. Подставляемъ это выраженіе вмѣсто y въ первое уравненіе:

$$x^2-4(2x-1)^2+x+3(2x-1)=1.$$

Рѣшаемъ это уравненіе:

$$x^2-4(4x^2-4x+1)+x+6x-3-1=0$$
$$x^2-16x^2+16x-4+x+6x-3-1=0$$
$$-15x^2+23x-8=0; \quad 15x^2-23x+8=0.$$

$$x=\frac{23\pm\sqrt{23^2-4\ .\ 5\ .\ 8}}{2\ .\ 15}=\frac{23\pm\sqrt{529-480}}{30}=\frac{23\pm\sqrt{49}}{30}$$

$$x_{\text{I}}=\frac{23+7}{30}=1 \qquad x_{\text{II}}=\frac{23-7}{30}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}.$$

Послѣ этого изъ уравненія $y=2x-1$ находимъ:

$$y_{\text{I}}=2\ .\ 1-1=1 \qquad y_{\text{II}}=2\ .\frac{8}{15}-1=\frac{1}{15}.$$

Такимъ образомъ, данная система уравненій имѣетъ двѣ

пары рѣшеній:

$$1)\ \begin{cases} x_{\text{I}}=1 \\ y_{\text{I}}=1 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x_{\text{II}}=\dfrac{8}{15} \\ y_{\text{II}}=\dfrac{1}{15}. \end{cases}$$

254. Искусственные пріемы. Указанный пріемъ примѣнимъ всегда, коль скоро одно уравненіе первой степени; но въ нѣкоторыхъ случаяхъ удобнѣе пользоваться искусственными пріемами, для которыхъ нельзя указать общаго правила. Приведемъ нѣкоторые примѣры.

Примѣръ 1. $x+y=a;\ \ xy=b.$

Первый способъ. Такъ какъ предложенныя уравненія даютъ сумму и произведеніе неизвѣстныхъ, то (§ 219) x и y можно разсматривать, какъ корни такого квадратнаго уравненія:

$$z^2-az+b=0,$$

изъ котораго находимъ:

$$z_{\text{I}}=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b};\quad z_{\text{II}}=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}.$$

Одинъ изъ этихъ корней надо принять за x, другой за y.

Второй способъ. Возвысимъ первое уравненіе въ квадратъ и вычтемъ изъ него учетверенное второе [1]):

$$\begin{array}{r} x^2+2xy+y^2=a^2 \\ -4xy=-4b \\ \hline x^2-2xy+y^2=a^2-4b \end{array}$$

т.-е. $(x-y)^2=a^2-4b$; откуда: $x-y=\pm\sqrt{a^2-4b}.$

Теперь имѣемъ систему:

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=\pm\sqrt{a^2a-4b} \end{cases}$$

Сложивъ и вычтя эти уравненія получимъ:

$$2x=a\pm\sqrt{a^2-4b};\quad 2y=a\mp\sqrt{a^2-4b}.$$

[1]) Подобныя фразы употребляются часто, ради краткости, вмѣсто „возвысимъ обѣ части уравненія въ квадратъ“, „умножимъ обѣ части уравненія на 4“, и т. п.

Откуда: $x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$, $y=\frac{a\mp\sqrt{a^2-4b}}{2}$,

замѣтимъ, что здѣсь знаки $\pm$ и $\mp$ находятся въ соотвѣтствіи другъ съ другомъ, т.-е. верхнему знаку въ формулѣ для x соотвѣтствуетъ верхній знакъ въ формулѣ для y и нижнему знаку въ первой формулѣ соотвѣтствуетъ нижній знакъ второй формулы.

Такимъ образомъ, данная система имѣетъ двѣ пары рѣшеній:

$$\begin{cases} x_1=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \\ y_1=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_{II}=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \\ y_{II}=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \end{cases}$$

Вторая пара отличается отъ первой только тѣмъ, что значеніе x первой пары служитъ значеніемъ y второй пары, и наоборотъ. Это можно было бы предвидѣть *a priori* (заранѣе), такъ какъ данныя уравненія таковы, что они не измѣняются отъ замѣны x на y, а y на x. Замѣтимъ, что такія уравненія называются симметричными.

Примѣръ 2. $x-y=a$, $xy=b$.

Первый способъ. Представивъ уравненія въ видѣ:

$$x+(-y)=a, \quad x(-y)=-b,$$

замѣчаемъ, что x и $-y$ суть корни такого квадратнаго уравненія:

$$z^2-az-b=0,$$

слѣд.: $x=z_1=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}$; $y=-z_{II}=-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)$

(или $x=z_{II}$, $y=-z_I$).

Второй способъ. Возвысимъ первое уравненіе въ квадратъ и сложимъ его съ учетвереннымъ вторымъ:

$$(x+y)^2=a^2+4b; \text{ откуда: } x+y=\pm\sqrt{a^2+4b}.$$

Теперь имѣемъ систему:

$$\begin{cases} x+y=\pm\sqrt{a^2+4b}. \\ x-y=a. \end{cases}$$

Сложивъ и вычтя эти уравненія, найдемъ:

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}, \quad y=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2},$$

гдѣ знаки $\pm$ въ обѣихъ формулахъ находятся въ соотвѣтствіи.

Примѣръ 3. $x+y=a, \quad x^2+y^2=b.$

Возвысивъ первое уравненіе въ квадратъ и вычтя изъ него второе, получимъ:

$$2xy=a^2-b, \quad \text{откуда: } xy=\frac{a^2-b}{2}.$$

Теперь вопросъ приводится къ рѣшенію системы:

$$x+y=a, \quad xy=\frac{a^2-b}{2},$$

которую мы уже разсмотрѣли въ примѣрѣ первомъ.

255. Система двухъ уравненій, изъ которыхъ каждое второй степени. Такая система въ общемъ видѣ не разрѣшается элементарно, такъ какъ она приводится къ полному уравненію 4-й степени.

Въ самомъ дѣлѣ, въ общемъ видѣ эта система представляется такъ:

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \\ a'x^2+b'xy+c'y^2+d'x+e'y+f'=0. \end{cases}$$

Чтобы исключить одно неизвѣстное, достаточно было бы изъ какого-либо уравненія опредѣлить одно неизвѣстное въ зависимости отъ другого и вставить полученное выраженіе во второе уравненіе; но тогда пришлось бы освобождать уравненіе отъ знаковъ радикала. Можно поступить проще; умножимъ первое уравненіе на c, а второе на c, и вычтемъ почленно одно изъ другого; тогда исключится y^2, и уравненіе приметъ видъ:

$$mx^2+nxy+px+qy+r=0.$$

или

$$mx^2+(nx+q)y+px+r=0$$

Откуда: $$y=-\frac{mx^2+px+r}{nx+q}.$$

Вставивъ это значеніе въ одно изъ данныхъ уравненій и освободивъ полученное уравненіе отъ знаменателей, будемъ имѣть въ окончательномъ результатѣ полное уравненіе 4-й степени, которое въ общемъ видѣ элементарными способами не разрѣшается.

Разсмотримъ **нѣкоторые частные случаи,** которые можно рѣшить элементарнымъ путемъ.

Примѣръ 1. $x^2+y^2=a,\quad xy=b.$

Первый способъ (способъ подстановки). Изъ второго уравненія опредѣлимъ одно неизвѣстное въ зависимости отъ другого, напр., $x=\frac{b}{y}$. Вставимъ это значеніе въ первое уравненіе и освободимся отъ знаменателя; тогда получимъ биквадратное уравненіе $y^4-ay^2+b^2=0$. Рѣшивъ его, найдемъ для y четыре значенія. Вставивъ каждое изъ нихъ въ формулу, выведенную ранѣе для x, найдемъ четыре соотвѣтствующія значенія для x.

Второй способъ. Сложивъ первое уравненіе съ удвоеннымъ вторымъ, получимъ:

$$x^2+y^2+2xy=a+2b,\quad \text{т.-е.}\quad (x+y)^2=a+2b.$$

Откуда: $$x+y=\pm\sqrt{a+2b}. \qquad (1)$$

Вычтя изъ перваго уравненія удвоенное второе, найдемъ:

$$x^2+y^2-2xy=a-2b,\quad \text{т.-е.}\quad (x-y)^2=a-2b.$$

Откуда: $$x-y=\pm\sqrt{a-2b}, \qquad (2)$$

Не трудно видѣть, что знаки $\pm$ въ уравненіяхъ (1) и (2) не находятся въ соотвѣтствіи другъ съ другомъ, и потому вопросъ приводится къ рѣшенію слѣдующихъ 4 системъ первой степени:

1) $\begin{cases} x+y=\sqrt{a+2b} \\ x-y=\sqrt{a-2b} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=\sqrt{a+2b} \\ x-y=-\sqrt{a-2b} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=-\sqrt{a+2b} \\ x-y=\sqrt{a-2b} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=-\sqrt{a+2b} \\ x-y=-\sqrt{a-2b} \end{cases}$

Каждая изъ нихъ рѣшается весьма просто посредствомъ сложенія и вычитанія уравненій.

Третій способъ. Возвысивъ второе уравненіе въ квадратъ, получимъ слѣдующую систему:

$$x^2+y^2=a,\quad x^2y^2=b^2.$$

Отсюда видно, что x^2 и y^2 суть корни такого квадратнаго уравненія:

$$z^2-az+b^2=0.$$

Слѣд.: $x^2=z_1=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2},\quad y^2=z_{11}=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}$

и $$x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}},\quad y^2=\pm\sqrt{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}},$$

гдѣ знаки $\pm$ въ обѣихъ формулахъ не находятся въ соотвѣтствіи.

Примѣръ 2. $x^2-y^2=a,\quad xy=b.$

Способомъ подстановки легко приведемъ эту систему къ биквадратному уравненію. Вотъ еще искусственное рѣшеніе.

Возвысивъ второе уравненіе въ квадратъ, будемъ имѣть систему:

$$x^2-y^2=a,\quad x^2y^2=b^2$$

или $$x^2+(-y^2)=a,\quad x^2(-y^2)=-b^2.$$

Отсюда видно, что x^2 и $-y^2$ суть корни такого уравненія:

$$z^2-az-b^2=0.$$

Изъ него находимъ:

$$z_1=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2},\quad z_{11}=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}.$$

Одинъ изъ этихъ корней надо принять за x^2, другой за $-y^2$; послѣ этого найдемъ x и y.

Примѣръ 3. $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=0. \end{cases}$

Раздѣливъ второе уравненіе на y^2, получимъ:

$$a'\left(\frac{x}{y}\right)^2+b'\left(\frac{x}{y}\right)+c'=0.$$

Рѣшивъ это квадратное уравненіе относительно $\frac{x}{y}$, найдемъ два значенія: $\frac{x}{y}=m$ и $\frac{x}{y}=n$; откуда $x=my$ и $x=ny$. Подставимъ въ первое данное уравненіе на мѣсто x эти значенія; тогда получимъ квадратное уравненіе относительно y.

256. Система трехъ и болѣе уравненій второй степени, а также системы уравненій высшихъ степеней могутъ быть рѣшены элементарными способами только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ посредствомъ искусственныхъ пріемовъ. Приведемъ нѣкоторые примѣры.

Примѣръ 1.

$$\begin{cases} x(x+y+z)=a \\ y(x+y+z)=b \\ z(x+y+z)=c \end{cases}$$

Сложивъ всѣ три уравненія, получимъ:

$$(x+y+z)^2=a+b+c.$$

Откуда: $x+y+z=\pm\sqrt{a+b+c}$.

Послѣ этого изъ данныхъ уравненій находимъ:

$$x=\pm\frac{a}{\sqrt{a+b+c}},\quad y=\pm\frac{b}{\sqrt{a+b+c}},\quad z=\pm\frac{c}{\sqrt{a+b+c}}$$

(знаки $\pm$ находятся въ соотвѣтствіи).

Примѣръ 2.

$$yz=a,\quad xz=b,\quad xy=c.$$

Перемноживъ всѣ уравненія почленно, получимъ: $x^2y^2z^2=abc$, т.-е. $(xyz)^2=abc$, откуда: $xyz=\pm\sqrt{abc}$. Раздѣливъ это уравненіе почленно на данныя, найдемъ:

$$x=\pm\frac{\sqrt{abc}}{a},\quad y=\pm\frac{\sqrt{abc}}{b},\quad z=\pm\frac{\sqrt{abc}}{c}$$

(знаки $\pm$ находятся въ соотвѣтствіи).

ОТДѢЛЪ VI.

Неравенства и неопредѣленныя уравненія.

ГЛАВА I.

Неравенства.

(Повторить § 28).

257. Неравенства и ихъ подраздѣленія. Два алгебраическія выраженія, соединенныя между собою знаками $>$ или $<$, составляютъ неравенство; эти алгебраическія выраженія наз. частями неравенства: лѣвая часть и правая часть.

Подобно равенствамъ, неравенства, содержащія буквы, бываютъ двоякаго рода: 1) неравенства тождественныя, вѣрныя при всякихъ численныхъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ нихъ, и 2) неравенства, соотвѣтствующія уравненіямъ, вѣрныя только при нѣкоторыхъ значеніяхъ буквъ (эти буквы наз. тогда неизвѣстными неравенства; онѣ, обыкновенно, берутся изъ послѣднихъ буквъ алфавита). Напримѣръ, неравенство

$$(1+a)^2>1+2a$$

вѣрно при всякихъ численныхъ значеніяхъ буквы a, отличныхъ отъ нуля, такъ какъ его лѣвая часть, равная всегда $1+2a+a^2$, превосходитъ правую часть на число a^2, которое всегда поло-

жительно (кромѣ случая $a=0$); неравенство же

$$3x+2<x+10$$

вѣрно не при всякихъ численныхъ значеніяхъ x, а только при такихъ, которыя меньше 4.

Неравенства второго рода, подобно уравненіямъ, раздѣляются по числу неизвѣстныхъ и по степенямъ ихъ.

О двухъ неравенствахъ говорятъ, что они одинаковаго смысла, если одновременно въ обоихъ лѣвыя части или больше, или меньше правыхъ; въ противномъ случаѣ говорятъ, что неравенства противоположнаго смысла.

258. Два рода вопросовъ относительно неравенствъ. Относительно неравенствъ (какъ и равенствъ), содержащихъ буквы, могутъ быть предлагаемы вопросы двоякаго рода:

1) доказать тождественное неравенство, т.-е. обнаружить вѣрность его при всевозможныхъ значеніяхъ буквъ, или, по крайней мѣрѣ, при значеніяхъ, ограниченныхъ заданными напередъ условіями;

2) рѣшить неравенство, содержащее неизвѣстныя, т.-е. опредѣлить, между какими предѣлами должны заключаться численныя значенія неизвѣстныхъ, чтобы оно было вѣрно, т.-е. больше чего или меньше чего должны быть эти значенія неизвѣстныхъ.

Рѣшеніе вопросовъ того и другого рода основывается на нѣкоторыхъ свойствахъ неравенствъ, подобныхъ тѣмъ, которыя служатъ основаніемъ для рѣшенія уравненій.

259. Главнѣйшія свойства неравенствъ. Обозначая каждую часть неравенства одной буквой, мы можемъ главнѣйшія свойства неравенствъ выразить такъ:

1°. Если $a>b$, то $b<a$.

Дѣйствительно, если $a>b$, то это значитъ (§ 28), что разность $a-b$ число положительное; но въ такомъ случаѣ разность $b-a$ должна быть числомъ отрицательнымъ и потому $b<a$.

2°. Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.

Дѣйствительно, если $a>b$, то разность $a-b$ число положительное; если $b\geqslant c$, то разность $b-c$ или равна 0, или есть число положительное. Но тогда сумма этихъ двухъ разностей: $(a-b)+(b-c)$ должна быть числомъ положительнымъ. Сумма эта равна: $a-b+b-c=a-c$; если же разность $a-c$ число положительное, то $a>c$.

3°. Если $a>b$ и $a_1\geqslant b_1$, то $a+a_1>b+b_1$.

Дѣйствительно, при этихъ условіяхъ разность $a-b$ число положительное, а разность a_1-b_1 или равна 0, или есть число положительное; но тогда сумма $(a-b)+(a_1-b_1)$, равная разности $(a+a_1)-(b+b_1)$, должна быть числомъ положительнымъ; а это значитъ, что $a+a_1>b+b_1$.

Это свойство, благодаря тому, что второе изъ данныхъ неравенствъ $(a_1\geqslant b_1)$ соединено съ равенствомъ, распадается на 2 отдѣльныя свойства, которыя можно высказать такъ:

неравенства одинаковаго смысла можно почленно складывать;

если къ обѣимъ частямъ неравенства придадимъ поровну, то знакъ неравенства не измѣнится;

4°. Если $a>b$ и $a_1\leqslant b_1$, то $a_1-a>b-b_1$.

Дѣйствительно, если $a>b$, то разность $a-b$ число положительное; съ другой стороны, если $a_1\leqslant b_1$, то, значитъ, $b_1\geqslant a_1$, и потому разность b_1-a_1 или равна 0, или есть число положительное; но тогда сумма этихъ разностей: $(a-b)+(b_1-a_1)$, равная $(a-a_1)-(b-b_1)$, должна быть числомъ положительнымъ; а это значитъ, что $a-a_1>b-b_1$.

Это свойство такъ же, какъ и предыдущее, благодаря двойному знаку $\leqslant$ во второмъ неравенствѣ, распадается на 2 отдѣльныя свойства, которыя можно высказать такъ:

изъ одного неравенства можно почленно вычесть другое неравенство противоположнаго смысла, оставивъ знакъ перваго неравенства;

если отъ обѣихъ частей неравенства от-

нимемъ поровну, то знакъ неравенства не измѣнится;

5⁰. Если $a>b$ и m положительное число, то $am>bm$ и $\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$.

Дѣйствительно, если $a>b$, то разность $a-b$ число положительное, и потому произведенія этой разности на положительныя числа m и $\frac{1}{m}$ также положительныя числа; но эти произведенія равны соотвѣтственно разностямъ $am-bm$ и $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}$; слѣд., $am>bm$ и $\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$.

Свойство это можно высказать такъ: если обѣ части неравенства умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же положительное число, то знакъ неравенства не измѣнится.

6⁰. Если $a>b$ и m отрицательное число, то $am<bm$ и $\frac{a}{m}<\frac{b}{m}$.

Въ самомъ дѣлѣ, при данныхъ условіяхъ произведенія $(a-b)m$ и $(a-b)\frac{1}{m}$, какъ произведенія положительнаго числа на отрицательное, должны быть числами отрицательными; но произведенія эти равны соотвѣтственно $am-bm$ и $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}$; значитъ, $am<bm$ и $\frac{a}{m}<\frac{b}{m}$.

Свойство это можно высказать такъ: если обѣ части неравенства умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же отрицательное число, то знакъ неравенства измѣнится на обратный.

Въ частности знакъ неравенства измѣняется на обратный при умноженіи частей неравенства на -1, т.-е. при перемѣнѣ знаковъ передъ членами неравенства на противоположные; такъ

$7>2$	$7>-10$	$-2>-5$
$-7<-2$	$-7<+10$	$+2<+5$.

О неравенствахъ, у которыхъ части—числа положительныя, можно высказать еще слѣдующія, почти очевидныя, истины:

1⁰. Если $a>b$, и $c\geqslant d$, то $ac>bd$;

2⁰. Если $a>b$, то $a^2>b^2$, $a^3>b^3$, и т. д.

3⁰. Если $a>b$, то $\sqrt{a}>\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$, и т. д. (здѣсь знакомъ радикала обозначено ариѳметическое значеніе корня).

4⁰. Если $a>b$, и $c\leqslant d$, то $\frac{a}{b}>\frac{b}{d}$.

260. Равносильныя неравенства. Неравенства, содержащія одни и тѣ же неизвѣстныя, наз. **равносильными**, если они удовлетворяются одними и тѣми же значеніями этихъ неизвѣстныхъ; такъ, 2 неравенства: $3x+2<x+10$ и $3x<x+8$ равносильны, такъ какъ оба они удовлетворяются значеніями x, меньшими 4, и только этими значеніями.

Относительно равносильности неравенствъ докажемъ теоремы, весьма сходныя съ подобными же теоремами относительно равносильности уравненій (§§ 108, 110).

261 Теорема 1. Если къ обѣимъ частямъ неравенства (содержащаго неизвѣстныя) прибавимъ или отъ нихъ отнимемъ одно и то же число, то получимъ новое неравенство, равносильное первому.

Обозначимъ для краткости лѣвую часть неравенства, содержащаго неизвѣстныя, одною буквою A и правую часть—другою буквою B, и пусть m есть какое угодно число; докажемъ, что два неравенства:

$$A>B \qquad (1) \qquad \text{и} \qquad A+m>B+m \qquad (2)$$

равносильны.

Положимъ, что первое неравенство удовлетворяется при нѣкоторыхъ значеніяхъ буквъ. Это значитъ, что при этихъ значеніяхъ численная величина A дѣлается больше численной величины B; но тогда при тѣхъ же значеніяхъ буквъ и численная величина суммы $A+m$ сдѣлается больше численной величины суммы $B+m$, такъ какъ если къ обѣимъ частямъ

неравенства придадимъ поровну, то знакъ неравенства не измѣнится. Значитъ, всякое рѣшеніе неравенства (1) принадлежитъ и неравенству (2).

Обратно, если при нѣкоторыхъ значеніяхъ буквъ численная величина суммы $A+m$ дѣлается больше численной величины суммы $B+m$, то для тѣхъ же значеній буквъ и численная величина A сдѣлается больше численной величины B (если отъ обѣихъ частей неравенства отнимемъ поровну, то...); слѣд., всѣ рѣшенія неравенства (2) удовлетворяютъ и неравенству (1); значитъ, эти неравенства равносильны.

Переходя отъ неравенства (2) къ неравенству (1), мы замѣчаемъ, что отъ обоихъ частей неравенства можно отнять одно и то же число.

Замѣчаніе Прибавляемое къ обѣимъ частямъ неравенства одно и то же число можетъ быть дано въ видѣ какого-нибудь **буквеннаго выраженія**, при чемъ выраженіе это можетъ содержать въ себѣ и **неизвѣстныя**, входящія въ неравенство; нужно только, чтобы прибавляемое выраженіе при всѣхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ данному неравенству, представляло собою **опредѣленное число** (а не принимало бы, напр., вида $\frac{0}{0}$ или ∞).

Слѣдствіе. Любой членъ неравенства можно перенести изъ одной части въ другую съ противоположнымъ знакомъ.

Если, напр., имѣемъ неравенство:

$$A>B+C,$$

то, отнявъ отъ обѣихъ частей по C, получимъ: $A-C>B$.

262. Теорема 2. Если обѣ части неравенства (содержащаго неизвѣстныя) умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же положительное число, то получимъ новое неравенство, равносильное первому.

Докажемъ, что два неравенства:

$$A>B \quad (1) \qquad \text{и} \qquad Am>Bm \quad (2)$$

равносильны, если только m **положительное число.**

Пусть при нѣкоторыхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ численная величина A дѣлается больше численной величины B; тогда при тѣхъ же значеніяхъ неизвѣстныхъ и численная величина произведенія Am сдѣлается больше численной величины произведенія Bm, такъ какъ отъ умноженія обѣихъ частей неравенства на положительное число, какъ мы знаемъ, знакъ неравенства не измѣняется. Значитъ, всѣ рѣшенія неравенства (1) удовлетворяютъ и неравенству (2).

Обратно, если при нѣкоторыхъ значеніяхъ буквъ численная величина Am дѣлается больше численной величины Bm, то при тѣхъ же значеніяхъ буквъ и численная величина A сдѣлается больше численной величины B, такъ какъ отъ дѣленія обѣихъ частей неравенства на положительное число знакъ неравенства не измѣняется.

Замѣчаніе. Одно и то же положительное число, на которое, по доказанному, мы имѣемъ право умножить или раздѣлить обѣ части неравенства (не измѣняя его знака), можетъ быть дано въ видѣ **буквеннаго выраженія,** при чемъ это выраженіе можетъ содержать въ себѣ и неизвѣстныя, входящія въ неравенство. Но при этомъ надо особо разсмотрѣть, при всѣхъ ли значеніяхъ буквъ, входящихъ въ выраженіе, на которое мы умножаемъ или дѣлимъ обѣ части неравенства, это выраженіе остается **положительнымъ** числомъ.

Напр., умножимъ обѣ части неравенства $A>B$ на выраженіе $(x-5)^2$.

$$A>B \qquad (1) \qquad A(x-5)^2>B(x-5)^2 \qquad (2)$$

Множитель $(x-5)^2$ остается положительнымъ числомъ при всѣхъ значеніяхъ x, кромѣ одного: $x=5$. Значитъ неравенства (1) и (2) вполнѣ равносильны въ томъ только случаѣ, если первое изъ нихъ не удовлетворяется значеніемъ $x=5$; въ противномъ же случаѣ, неравенство (1), удовлетворяясь всѣми рѣшеніями неравенства (2), имѣетъ еще свое особое рѣшеніе: $x=5$ (это рѣшеніе, конечно, неравенству (2) не удовлетворяетъ).

Слѣдствіе. Если обѣ части неравенства содержатъ положительнаго общаго множителя, то на него можно сократить,

неравенство. Напримѣръ, въ обѣихъ частяхъ неравенства:

$$(x-5)^2(x-1)>(x-5)^2(3-x)$$

есть общій множитель $(x-5)^2$. Этотъ множитель при $x=5$ обращается въ 0, а при всѣхъ остальныхъ значеніяхъ x онъ есть число положительное. Рѣшеніе $x=5$ не удовлетворяетъ данному неравенству. Желая рѣшить, удовлетворяется ли оно при другихъ значеніяхъ x, мы можемъ сократить обѣ части неравенства на $(x-5)^2$, какъ на число положительное; послѣ сокращенія получимъ неравенство:

$$x-1>3-x.$$

Всѣ значенія x, удовлетворяющія этому неравенству, за исключеніемъ $x=5$, удовлетворяютъ и данному неравенству.

263. Теорема 3. Если обѣ части неравенства (содержащаго неизвѣстныя) умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же отрицательное число и при этомъ перемѣнимъ знакъ неравенства на противоположный, то получимъ новое неравенство, равносильное первому.

Эта теорема доказывается совершенно такъ же, какъ и теорема 2-я; надо только принять во вниманіе, что отъ умноженія или отъ дѣленія обѣихъ частей неравенства на отрицательное число знакъ неравенства измѣняется на противоположный.

По поводу этой теоремы можно высказать **замѣчаніе,** вполнѣ аналогичное тому, которое было сдѣлано выше по отношенію къ теоремѣ 2-ой.

Слѣдствія. 1°. Перемѣнивъ у всѣхъ членовъ неравенства знаки на противоположные (т.-е. умноживъ обѣ его части на -1), мы должны измѣнить знакъ неравенства на противоположный.

2°. Нельзя умножать обѣ части неравенства на буквеннаго множителя, знакъ котораго неизвѣстенъ.

3°. Неравенство съ дробными членами можно привести къ цѣлому виду. Возьмемъ, напр., такое неравенство:

$$\frac{A}{B}>\frac{C}{D} \qquad (1)$$

Перенесемъ всѣ члены въ лѣвую часть и приведемъ ихъ къ общему знаменателю:

$$\frac{AD-BC}{BD}>0. \qquad (2)$$

Если BD положительное число, то мы можемъ его отбросить, не измѣняя знака неравенства, потому что отбросить BD все равно, что умножить на это число обѣ части неравенства. Отбросивъ BD, получимъ неравенство, не содержащее дробей:

$$AD-BC>0.$$

Если BD отрицательное число, то мы можемъ его отбросить, перемѣнивъ при этомъ знакъ неравенства на противоположный; тогда снова будемъ имѣть неравенство съ цѣлыми членами:

$$AD-BC<0.$$

Но если знакъ BD неизвѣстенъ (что бываетъ вообще тогда, когда B и D содержатъ неизвѣстныя), то мы не можемъ умножать обѣ части неравенства на BD. Тогда разсуждаемъ такъ: чтобы дробь была положительна, необходимо и достаточно, чтобы у нея числитель и знаменатель были одновременно или положительны, или отрицательны. Слѣд., неравенство (2) удовлетворится при такихъ значеніяхъ буквъ, при которыхъ

$$\left\{\begin{array}{r} AD-BC>0 \\ BD>0 \end{array}\right. \text{ или } \left\{\begin{array}{r} AD-BC<0. \\ BD<0. \end{array}\right.$$

Такимъ образомъ, рѣшеніе неравенства (1) сводится къ рѣшенію системы двухъ неравенствъ, не содержащихъ знаменателей.

264. Доказательство неравенства. Нельзя установить какихъ-либо общихъ правилъ для обнаруженія вѣрности предложеннаго неравенства. Замѣтимъ только, что одинъ изъ пріемовъ состоитъ въ томъ, что предложенное неравенство преобразовываютъ въ другое, очевидное, и затѣмъ, исходя изъ этого очевиднаго неравенства, путемъ логическихъ разсужденій доходятъ до предложеннаго. Приведемъ нѣкоторые примѣры.

1. Доказать, что среднее ариөметическое двухъ неравныхъ положительныхъ чиселъ больше ихъ средняго геометрическаго, т.-е. что $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$, если a и b какія-нибудь положительныя числа, неравныя другъ другу.

Предположимъ, что данное неравенство вѣрно. Въ такомъ случаѣ будутъ вѣрны и слѣдующія неравенства:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > \left(\sqrt{ab}\right)^2; \frac{a^2+2ab+b^2}{4} > ab; a^2+2ab+b^2>4ab;$$
$$a^2-2ab+b^2>0; (a-b)^2>0.$$

Очевидно, что послѣднее неравенство вѣрно для всякихъ неравныхъ значеній буквъ a и b, какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ. Изъ этого однако нельзя еще сразу заключить, что и данное неравенство вѣрно для всякихъ неравныхъ значеній буквъ; надо еще убѣдиться, что изъ послѣдняго неравенства $(a-b)^2>0$ можно получить, какъ слѣдствія, всѣ предыдущія. Просматривая эти неравенства отъ послѣдняго къ первому, видимъ, что всѣ онѣ равносильны другъ другу, если добавить ограниченіе, что буквы a и b должны теперь означать только положительныя числа, такъ какъ если одна изъ этихъ буквъ отрицательное число, то $\sqrt{ab}$ будетъ мнимое число, а если обѣ буквы отрицательныя числа, то $\frac{a+b}{2}$ будетъ отрицательное число, а $\sqrt{ab}$ число положительное, но отрицательное число не можетъ быть больше положительнаго [1]).

11. Доказать, что величина дроби:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n},$$

гдѣ $a_1, a_2 \ldots a_n$, и $b_1, b_2 \ldots b_n$ — положительныя числа, заключается между бóльшею и меньшею изъ дробей:

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots \frac{a_n}{b_n}.$$

Пусть $\frac{a_1}{b_1}$ будетъ дробь, которая не больше никакой изъ остальныхъ дробей, и $\frac{a_n}{b_n}$ — дробь, которая не меньше никакой изъ остальныхъ дро-

[1]) Полезно замѣтить, что предложенное неравенство становится нагляднымъ, если придадимъ ему геометрическій смыслъ. На произвольной прямой отложимъ отрѣзокъ AB, содержащій a линейныхъ единицъ, и въ томъ же направленіи—отрѣзокъ BC, содержащій b такихъ же линейныхъ единицъ. На отрѣзкѣ AC, равномъ $a+b$, построимъ, какъ на діаметрѣ, полуокружность и изъ B возставимъ къ AC перпендикуляръ BD до пересѣченія съ полуокружностью. Тогда, какъ извѣстно изъ геометріи, BD есть средняя геометрическая между AB и BC (т.-е. $BD=\sqrt{ab}$; средняя ариѳметическая AB и BC равна, очевидно, радіусу. Такъ какъ хорда меньше діаметра, то BD меньше радіуса, если только BD не совпадетъ съ радіусомъ, т.-е. если $a \neq b$.

бей. Положимъ, что $\frac{a_1}{b_1}=q_1$ и $\frac{a_n}{b_n}=q_n$. Тогда, согласно предположенію:

$$\frac{a_1}{b_1}=q_1,\ \frac{a_2}{b_2}\geqslant q_1,\ \frac{a_3}{b_3}\geqslant q_1\ \ldots\ \frac{a_n}{b_n}\geqslant q_1$$

$$\frac{a_n}{b_n}=q_n,\quad \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\leqslant q_n\ \ldots\ \frac{a_2}{b_2}\leqslant q_n,\ \frac{a_1}{b_1}\leqslant q_n$$

Отсюда: $a_1=b_1q_1,\ a_2\geqslant b_2q_1,\ a_3\geqslant b_3q_1\ \ldots\ a_n\geqslant b_nq_1$

и $a_n=b_nq_n,\ a_{n-1}\leqslant b_{n-1}q_n\ldots a_2\leqslant b_2q_n,\ a_1\leqslant b_1q_n.$

Сложивъ почленно всѣ неравенства 1-й строки между собою и всѣ неравенства 2-й строки между собою, получимъ:

$$a_1+a_2+a_3\ldots+a_n\geqslant(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n)q_1$$

и

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\leqslant(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n)q_n.$$

Откуда, раздѣливъ обѣ части неравенствъ на положительное число $b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$, окончательно найдемъ:

$$q_n\geqslant\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}\geqslant q_1.$$

что и требовалось доказать.

265. Рѣшеніе одного неравенства первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Общій видъ неравенства первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ, послѣ упрощенія его, есть слѣдующій:

$$ax>b \text{ или } ax<b.$$

Если $a>0$, то, раздѣливъ на a обѣ части неравенствъ, получимъ такія равносильныя неравенства:

$$x>\frac{b}{a} \text{ или } x<\frac{b}{a}.$$

Если же $a<0$, то равносильныя неравенства будутъ (при дѣленіи на отрицательное число знакъ неравенства измѣняется на противоположный):

$$x<\frac{b}{a}, \text{ или } x>\frac{b}{a}.$$

Такимъ образомъ одно неравенство первой степени даетъ для

неизвѣстнаго одинъ предѣлъ[1]), ограничивающій значеніе неизвѣстнаго или сверху (верхній предѣлъ, когда $x<m$), или снизу (нижній предѣлъ, когда $x>m$). Поэтому вопросы, рѣшеніе которыхъ приводится къ рѣшенію одного неравенства первой степени, принадлежатъ къ вопросамъ неопредѣленнымъ.

Примѣръ. Рѣшить неравенство

$$2x(2x-5)-27<(2x+1)^2.$$

Раскрываемъ скобки: $4x^2-10x-27<4x^2+4x+1.$

Переносимъ члены и дѣлаемъ приведеніе: $-14x<28.$

Дѣлимъ обѣ части на -14: $x>-2.$

266. Два неравенства первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Иногда случается, что вопросъ приводится къ рѣшенію двухъ неравенствъ первой степени *съ однимъ неизвѣстнымъ* x. Рѣшивъ эти неравенства, мы получимъ изъ каждаго по одному предѣлу для неизвѣстнаго. При этомъ надо различать слѣдующіе 3 случая:

1) Предѣлы одинаковаго смысла (т.-е. оба верхніе, или оба нижніе); тогда достаточно взять одинъ изъ нихъ. Если, напр., $x>7$ и $x>12$, то достаточно взять только $x>12$, потому что если $x>12$, то, и подавно, $x>7$; или если, напримѣръ, $x<5$ и $x<8$, то достаточно положить, что $x<5$, потому что тогда, и подавно, $x<8$.

2) Предѣлы противоположнаго смысла (т.-е. одинъ верхній, другой нижній) и не противорѣчатъ другъ другу; напр., $x>10$ и $x<15$. Въ этомъ случаѣ для неизвѣстнаго можно брать только такія значенія, которыя заключены между найденными предѣлами.

3) Предѣлы противорѣчатъ другъ другу;

---

[1]) Здѣсь слово «предѣлъ» не имѣетъ того значенія, которое придается ему, когда говорятъ о «предѣлѣ» перемѣннаго числа; здѣсь, какъ и въ нѣкоторыхъ другихъ случаяхъ (напр., въ выраженіи «предѣлъ погрѣшности») слово «предѣлъ» означаетъ число, больше котораго или меньше котораго разсматриваемая величина не можетъ быть.

напримѣръ, $x<5$ и $x>7$. Въ этомъ случаѣ неравенства, взятыя совмѣстно, невозможны.

Примѣръ. Найти число, $\frac{3}{10}$ котораго, сложенныя съ 5, меньше половины искомаго числа, а 5 разъ взятое число меньше суммы 60 съ удвоеннымъ искомымъ числомъ.

Обозначивъ искомое число черезъ x, получимъ согласно условіямъ задачи:

$$\frac{3}{10}x+5<\frac{1}{2}x \text{ и } 5x<60+2x.$$

Откуда: $$x>25 \text{ и } x<20.$$

Слѣд., задача невозможна.

267. Рѣшеніе неравенства второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Общій видъ такого неравенства, по упрощеніи его, есть слѣдующій:

$$ax^2+bx+c\lesseqgtr 0.$$

Такъ какъ знакъ $<$ всегда можетъ быть приведенъ къ знаку $>$ (умноженіемъ обѣихъ частей неравенства на -1), то достаточно разсмотрѣть неравенство вида:

$$ax^2+bx+c>0,$$

въ которомъ число a можетъ быть и положительнымъ и отрицательнымъ.

Рѣшеніе этого неравенства основано на свойствѣ трехчлена ax^2+bx+c разлагаться на множителей первой степени относительно x (§ 220). Обозначивъ черезъ α и β корни этого трехчлена, мы можемъ замѣнить его произведеніемъ $a(x-\alpha)(x-\beta)$, и тогда неравенство можно написать такъ:

$$a(x-\alpha)(x-\beta)>0.$$

Разсмотримъ отдѣльно три слѣдующіе случая:

I. Корни α и β вещественные неравные (что бываетъ тогда, когда $b^2-4ac>0$) (§223). Пусть $\alpha>\beta$. Если $a>0$, то произведеніе $a(x-\alpha)(x-\beta)$, очевидно, тогда положительно, когда каждая изъ разностей: $x-\alpha$ и $x-\beta$ положительна или каждая отрицательна. Для этого достаточно, чтобы x было больше α (тогда подавно x больше β), или же чтобы x было меньше β (тогда подавно x меньше α). Слѣд., въ этомъ случаѣ неравенство получаетъ рѣшеніе:

при $x>\alpha$ и также $x<\beta$,

т.-е. x должно быть или больше бо̀льшаго корня или меньше меньшаго корня.

Если же $a < 0$, то произведеніе $a(x-\alpha)(x-\beta)$ тогда положительно, когда одна изъ разностей: $x-\alpha$ и $x-\beta$ отрицательна, а другая положительна. Для этого достаточно, чтобы x удовлетворяло неравенствамъ:

$$\beta < x < \alpha,$$

т.-е. чтобы величина x заключалась между корнями трехчлена.

II. Корни α и β вещественные равные (что бываетъ тогда, когда $b^2-4ac=0$). Если $\alpha=\beta$, то неравенство принимаетъ видъ:

$$a(x-\alpha)^2 > 0.$$

Такъ какъ при всякомъ вещественномъ значеніи x, не равномъ α, число $(x-\alpha)^2$ положительно, то при $a > 0$ неравенство удовлетворяется всевозможными вещественными значеніями x, за исключеніемъ $x=\alpha$, а при $a < 0$ это неравенство невозможно.

III. Корни α и β мнимые (что бываетъ тогда, когда $b^2-4ac < 0$). Пусть $\alpha=m+\sqrt{-n}$; въ такомъ случаѣ $\beta=m-\sqrt{-n}$.

Тогда $$x-\alpha=x-(m+\sqrt{-n})=(x-m)-\sqrt{-n}$$

и $$x-\beta=x-(m-\sqrt{-n})=(x-m)+\sqrt{-n}$$

Слѣд., $$a(x-\alpha)(x-\beta)=a[(x-m)^2-(\sqrt{-n})^2]=a[(x-m)^2+n],$$

и неравенство можно написать такъ:

$$a[(x-m)^2+n] > 0.$$

Такъ какъ сумма $(x-m)^2+n$, при всякомъ вещественномъ значеніи x есть число положительное, то при $a>0$ неравенство удовлетворяется всевозможными значеніями x а при $a<0$ оно невозможно.

Примѣры. 1) Рѣшить неравенство: $x^2+3x-28>0$. Корни трехчлена: $\alpha=4$, $\beta=-7$. Слѣд., неравенство можно написать:

$$(x-4)[x-(-7)]>0.$$

Отсюда видно, что $x > 4$ или $x < -7$.

2) Рѣшить неравенство: $4x^2-28x+49>0$. Корни суть: $\alpha=\beta=3\frac{1}{2}$.

Поэтому $$4(x-3\tfrac{1}{2})^2>0.$$

Откуда видно, что неравенство невозможно.

3) Рѣшить неравенство: $x^2-4x+7>0$ Корни суть: $\alpha=2+\sqrt{-3}$, $\beta=2-\sqrt{-3}$; поэтому неравенство можно написать такъ:

$$(x-2)^2+3>0.$$

Отсюда видно, что оно удовлетворяется всевозможными вещественными значеніями x.

ГЛАВА II.

Неопредѣленное уравненіе первой степени съ двумя неизвѣстными.

Задачи. 1) Сколько нужно взять монетъ въ 2 коп. и въ 3 коп., чтобы составилась сумма въ 25 коп.?

Вопросъ приводится къ рѣшенію въ ц ѣ л ы х ъ и п о л о ж и т е л ь н ы х ъ числахъ неопредѣленнаго уравненія $2x+3y=25$.

2) Въ обществѣ, состоящемъ изъ мужчинъ и женщинъ, былъ сдѣланъ въ складчину сборъ, при чемъ каждый мужчина платилъ по 5 рублей, а каждая женщина по 2 руб. Сколько было въ этомъ обществѣ мужчинъ и сколько женщинъ, если сборъ составилъ 100 руб.?

Вопросъ приводится къ рѣшенію въ ц ѣ л ы х ъ и п о л о ж и т е л ь н ы х ъ числахъ уравненія $5x+2y=100$.

268. Предварительное замѣчаніе. Какъ было прежде разъяснено (§ 118), одно уравненіе съ двумя неизвѣстными имѣетъ безчисленное множество рѣшеній и потому называется н е о п р е д ѣ л е н н ы м ъ. Но бываютъ вопросы, когда требуется найти не какія бы то ни было рѣшенія неопредѣленнаго уравненія, а только ц ѣ л ы я, и притомъ п о л о ж и т е л ь н ы я; при этомъ условіи можетъ случиться, что одно уравненіе съ двумя неизвѣстными окажется опредѣленнымъ (а иногда и невозможнымъ). Разсмотримъ сначала, какъ можно находить ц ѣ л ы я р ѣ ш е н і я, все равно, будутъ ли онѣ положительныя или отрицательныя, а потомъ укажемъ способъ отдѣлять изъ этихъ цѣлыхъ рѣшеній только положительныя и нулевыя.

269. Когда неопредѣленное уравненіе не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній. Всякое уравненіе первой степени съ двумя неизвѣстными, послѣ надлежащихъ преобразованій, можетъ быть приведено къ виду $ax+by=c$, гдѣ a, b и c суть данныя ц ѣ л ы я числа, положительныя или отрицательныя. Мы предположимъ, что эти числа не имѣютъ никакого общаго дѣлителя, кромѣ 1, потому что въ противномъ случаѣ мы могли бы сократить на него уравненіе. Е с л и п р и э т о м ъ о к а ж е т с я, ч т о к о э ф ф и ц і е н т ы a и b и м ѣ ю т ъ

какого-нибудь общаго дѣлителя, кромѣ 1, то уравненіе не можетъ имѣть цѣлыхъ рѣшеній. Въ самомъ дѣлѣ, если допустимъ, что a и b имѣютъ общаго дѣлителя $m>1$, а c на него не дѣлится, то, при цѣлыхъ значеніяхъ x и y, лѣвая часть уравненія представляетъ цѣлое число, дѣлящееся на m, а правая часть есть цѣлое число, не дѣлящееся на m; значитъ, уравненіе невозможно при цѣлыхъ значеніяхъ x и y.

Напр., уравненіе $6x-21y=19$ не удовлетворяется никакими цѣлыми числами, такъ какъ при цѣлыхъ значеніяхъ x и y разность $6x-21y$ дѣлится на 3, тогда какъ 19 не дѣлится на 3.

Итакъ разсмотримъ рѣшеніе уравненія $ax+by=c$ въ предположеніи, что числа a и b взаимно простыя.

270. Частный случай, когда какой-нибудь изъ коэффиціентовъ a и b равенъ 1. Пусть напр., $b=1$, т.-е. уравненіе имѣетъ такой видъ:

$$ax+y=c;\text{ откуда: } y=c-ax.$$

Изъ послѣдняго равенства видимъ, что, подставляя вмѣсто x какія угодно цѣлыя числа (положительныя или отрицательныя), мы будемъ получать и для y цѣлыя числа. Число этихъ рѣшеній, очевидно, безконечно; всѣ онѣ заключены въ равенствѣ: $y=c-ax$, которое поэтому можно разсматривать, какъ рѣшеніе предложеннаго уравненія.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе: $x-5y=17$.

Рѣшеніе: $x=5y+17$.

Подставляя вмѣсто y произвольныя цѣлыя числа: 0, 1, 2, 3,..., —1, —2, —3..., получимъ для x соотвѣтствующія значенія, выставленныя въ слѣдующей таблицѣ:

$y=$	0	1	2	3	4	...	...	—1	—2	—3	—4
$x=$	17	22	27	32	37	...	...	12	7	2	—3

271. Частный случай, когда $c=0$. Чтобы рѣшить уравненіе: $ax+by=0$, въ которомъ a и b какія-нибудь цѣлыя числа взаимно простыя, опредѣлимъ какое-нибудь одно неизвѣстное въ зависимости отъ другого неизвѣстнаго; напр.:

$$x=-\frac{by}{a}.$$

Изъ этого равенства видно: чтобы x было цѣлое число, необходимо и достаточно, чтобы произведеніе by дѣлилось на a. Но b и a суть числа взаимно простыя; поэтому для дѣлимости by на a необходимо [1]) и достаточно, чтобы y дѣлилось на a, т.-е., чтобы частное $\frac{y}{a}$ было цѣлое число (какое угодно). Приравнявъ это частное произвольному цѣлому числу t, получимъ:

$$\frac{y}{a}=t,\ y=at \text{ и } x=-\frac{bat}{a}=-bt.$$

Такъ какъ t означаетъ произвольное цѣлое число, какъ положительное, такъ и отрицательное, то мы можемъ замѣнить t на $-t$; тогда получимъ для неизвѣстныхъ другія формулы:

$$y=-at;\quad x=bt.$$

Такимъ образомъ, уравненіе $ax+by=0$ имѣетъ рѣшенія, выражаемыя формулами:

$$\begin{cases} x=-bt \\ y=at \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=bt \\ y=-at. \end{cases}$$

Формулы эти можно высказать такъ: **каждое неизвѣстное уравненія $ax+by=0$ равно одному и тому же произвольному цѣлому числу, умноженному на коэффиціентъ при другомъ неизвѣстномъ, при чемъ какой-нибудь одинъ изъ этихъ коэффиціентовъ долженъ быть взятъ съ обратнымъ знакомъ.**

Примѣры. 1) $17x+5y=0$; $x=-5t$, $y=17t$; или $x=5t$, $y=-17t$.

2) $9x-13y=0$; $x=13t$, $y=9t$; или $x=-13t$; $y=-9t$.

---

[1]) Эта необходимость доказывается въ ариѳметикѣ; см., напр., **А. Киселевъ «Систематическій курсъ ариѳметики»**, §120.

272. Общій случай. Когда ни одинъ изъ коэффиціентовъ a и b не равенъ 1, и свободный членъ c не равенъ 0, данное уравненіе, посредствомъ нѣкоторыхъ преобразованій, приводятъ къ другому уравненію, у котораго коэффиціенты меньше сравнительно съ первымъ; это уравненіе, въ свою очередь, приводятъ къ третьему, у котораго коэффиціенты еще меньше, и т. д., пока не получатъ уравненія, у котораго коэффиціентъ при какомъ-нибудь неизвѣстномъ равенъ 1. Такое уравненіе, какъ мы видѣли, рѣшается непосредственно.

Чтобы свести уравненіе $ax+by=c$ [1] къ другому, у котораго коэффиціенты меньше, употребимъ послѣдовательно такіе три пріема:

1°. Опредѣлимъ изъ уравненія то неизвѣстное, у котораго коэффиціентъ меньше; пусть, напр. $b<a$; тогда опредѣлимъ y:

$$y=\frac{c-ax}{b}.$$

2°. Исключимъ изъ полученной дроби цѣлое число. Пусть отъ дѣленія c на b частное и остатокъ соотвѣтственно будутъ c_1 и q (если $c<b$, то $c_1=0$ и $q=c$), а отъ дѣленія a на b частное и остатокъ пусть будутъ a_1 и r; тогда

$$y=c_1-a_1x+\frac{q-rx}{b}.$$

Изъ этого уравненія заключаемъ: если x и y числа цѣлыя, то и частное $\frac{q-rx}{b}$ также число цѣлое; обратно, если частное $\frac{q-rx}{b}$ число цѣлое при цѣломъ значеніи x, то y число цѣлое; значитъ, для того, чтобы x и y были числа цѣлыя, необходимо и достаточно, чтобы выраженіе $\frac{q-rx}{b}$ было числомъ цѣлымъ при цѣломъ значеніи x.

Поэтому:

3°, приравниваемъ произвольному цѣлому числу дробь, получившуюся послѣ

исключенія цѣлаго числа:

$$\frac{q-rx}{b}=t; \qquad [2]$$

тогда $$y=c_1-a_1x+t. \qquad [A]$$

Если мы найдемъ цѣлыя значенія для x и t, удовлетворяющія ур. [2], то, подставивъ ихъ въ ур. [A], найдемъ и для y соотвѣтствующее цѣлое число. Такимъ образомъ, рѣшеніе ур. [1] сводится къ рѣшенію ур. [2], которое можно писать такъ:

$$bt+rx=q.$$

Коэффиціенты этого новаго уравненія меньше коэффиціентовъ даннаго уравненія, потому что одинъ изъ нихъ равенъ меньшему коэффиціенту даннаго уравненія (именно b), а другой (r) равенъ остатку отъ дѣленія бо́льшаго коэффиціента даннаго уравненія на его меньшій коэффиціентъ (отъ дѣленія a на b).

Тѣмъ же способомъ мы приведемъ уравненіе [2] къ третьему, у котораго коэффиціенты еще меньше; это—къ четвертому, у котораго коэффиціенты еще меньше, и т. д., пока, наконецъ, не получимъ уравненія, у котораго одинъ изъ коэффиціентовъ будетъ 1 и которое, слѣд., рѣшается непосредственно.

Примѣръ. Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе: $26x-7y=43$. [1]

Прилагая къ этому уравненію указанные три пріема, находимъ:

$$y=\frac{26x-43}{7}=3x-6+\frac{5x-1}{7}.$$

$$\frac{5x-1}{7}=t \quad [2] \qquad\qquad y=3x-6+t \quad [A]$$

Изъ уравненія [2] опредѣляемъ неизвѣстное x, у котораго коэффиціентъ меньше:

$$x=\frac{1+7t}{5}=t+\frac{1+2t}{5}.$$

Приравниваемъ $\frac{1+2t}{5}$ произвольному цѣлому числу t_1:

$$\frac{1+2t}{5}=t_1 \quad [3] \qquad x=t+t_1 \qquad [B]$$

Изъ уравненія [3] опредѣляемъ неизвѣстное t, у котораго коэффиціентъ меньше:

$$t=\frac{5t_1-1}{2}=2t_1+\frac{t_1-1}{2}.$$

Приравниваемъ $\frac{t_1-1}{2}$ произвольному цѣлому числу t_2:

$$\frac{t_1-1}{2}=t_2 \quad [4] \qquad t=2t_1+t_2 \qquad [C]$$

Въ уравненіи [4], которое можно написать такъ: $t_1-1=2t_2$, коэффиціентъ при одномъ неизвѣстномъ равенъ 1, а потому оно рѣшается непосредственно:

$$t_1=1+2t_2. \qquad [D]$$

Здѣсь t_2 можетъ принимать произвольныя цѣлыя значенія. Положивъ, напр., $t_2=0$, найдемъ: $t_1=1$; подставивъ эти числа въ ур. (C), получимъ $t=2$; изъ ур. (B) находимъ: $x=3$, и, наконецъ, ур. (A) даетъ $y=5$. Назначивъ для t_2 какое-нибудь другое цѣлое число и переходя послѣдовательно черезъ уравненія (D), (C), (B) и (A), найдемъ соотвѣтствующія значенія x и y.

Впрочемъ, предпочитаютъ составлять формулы, выражающія x и y въ прямой зависимости отъ окончательнаго произвольнаго цѣлаго числа. Переходя послѣдовательно отъ ур. (D) къ (C), отъ (C) къ (B) и отъ (B) къ (A), найдемъ посредствомъ подстановокъ:

$$t_1=1+2t_2;\; t=2(1+2t_2)+t_2=2+5t_2;$$
$$x=(2+5t_2)+(1+2t_2)=3+7t_2;$$
$$y=3(3+7t_2)-6+(2+5t_2)=5+26t_2.$$

Равенства: $x=3+7t_2$ и $y=5+26t_2$,

которыя удобнѣе писать безъ знака при буквѣ t, т.-е. такъ:

$$x=3+7t \text{ и } y=5+26t,$$

представляютъ собою общее рѣшеніе даннаго уравненія, такъ

какъ, подставляя вмѣсто t произвольныя цѣлыя числа, какъ положительныя, такъ и отрицательныя, мы будемъ получать всевозможныя цѣлыя значенія x и y, удовлетворяющія данному уравненію. Нѣкоторыя изъ этихъ значеній помѣщены въ слѣдующей таблицѣ:

t	0	1	2	...	—1	—2	—3
x	3	10	17	...	—4	—11	—18
y	5	31	57	...	—21	—47	—73

273. Когда неопредѣленное уравненіе имѣетъ цѣлыя рѣшенія. Разсмотрѣвъ описанный способъ рѣшенія, мы замѣчаемъ, что коэффиціенты послѣдовательныхъ уравненій находятся такъ: бо́льшій коэффиціентъ даннаго уравненія дѣлится на меньшій, и остатокъ принимается за меньшій коэффиціентъ второго уравненія; затѣмъ меньшій коэффиціентъ даннаго уравненія дѣлится на остатокъ, и остатокъ отъ этого дѣленія принимается за меньшій коэффиціентъ третьяго уравненія; далѣе, первый остатокъ дѣлится на второй, второй на третій и т. д., при чемъ остатокъ отъ каждаго изъ этихъ дѣленій принимается за меньшій коэффиціентъ слѣдующаго уравненія. Изъ ариѳметики извѣстно, что такимъ способомъ послѣдовательнаго дѣленія находится общій наибольшій дѣлитель двухъ чиселъ. Но такъ какъ коэффиціенты даннаго уравненія суть числа взаимно простыя, то ихъ общій наибольшій дѣлитель есть 1; поэтому, дѣля бо́льшій коэффиціентъ на меньшій, потомъ меньшій на первый остатокъ, первый остатокъ на второй и т. д., мы непремѣнно дойдемъ до остатка, равнаго 1, т.-е. получимъ уравненіе, у котораго одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ 1, а такъ какъ это уравненіе всегда рѣшается въ цѣлыхъ числахъ, то и данное уравненіе въ этомъ случаѣ допускаетъ цѣлыя рѣшенія.

Принявъ во вниманіе сказанное раньше (§ 269), приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Если въ уравненіи $ax+by=c$ коэффиціенты a, b и c суть цѣлыя числа, не имѣющія дѣлителя, общаго всѣмъ имъ, то для того, чтобы такое уравненіе имѣло цѣлыя рѣшенія, необходимо и достаточно, чтобы коэффиціенты a и b были числа взаимно простыя.

274. Нѣкоторыя упрощенія. I. Если въ уравненіи $ax+by=c$ числа a и c или b и c имѣютъ общаго дѣлителя то на него уравненіе можно сократить.

Пусть, напр., a и c дѣлятся на нѣкоторое число p, такъ что $a=a'p$ и $c=c'p$. Раздѣливъ на p всѣ члены уравненія, получимъ:

$$a'x+\frac{by}{p}=c';$$

откуда видно, что частное $\frac{by}{p}$ должно быть числомъ цѣлымъ; но b и p суть числа взаимно простыя (въ противномъ случаѣ всѣ три числа: a, b и c имѣли бы общаго дѣлителя, большаго 1, и уравненіе могло бы быть сокращено), поэтому by раздѣлится на p только тогда, когда y раздѣлится на p. Положивъ $y=py'$, найдемъ:

$$\frac{by}{p}=by', \text{ и уравненіе будетъ } a'x+by'=c'.$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ x и y'; умноживъ на p выраженіе, полученное для y', найдемъ y.

Примѣръ 1. Рѣшить уравненіе: $12x-7y=15$.

Положивъ $y=3y'$ и сокративъ уравненіе на 3, получимъ:

$$4x-7y'=5.$$

Откуда найдемъ: $x=3+7t$, $y=1+4t$,

слѣд., $y=(1+4t)3=3+12t$.

Примѣръ 2. Рѣшить уравненіе: $8x+21y=28$.

Замѣтимъ, что 8 и 28 дѣлятся на 4, положимъ $y=4y'$ и сократимъ уравненіе на 4:

$$2x+21y'=7.$$

Въ этомъ уравненіи 21 и 7 дѣлятся на 7; поэтому, положивъ $x=7x'$, сократимъ уравненіе на 7:

$$2x'+3y'=1.$$

Рѣшивъ это уравненіе, получимъ:

$$x'=-1+3t,\ y'=1-2t.$$

Слѣд., $x=-7+21t$, $y=4-8t$.

II. При исключеніи цѣлаго числа изъ неправильной дроби можно пользоваться отрицательными остатками.

Примѣръ. $$7x-19y=23$$

$$x=\frac{23+19y}{7}=3+2y+\frac{2+5y}{7}.$$

Отъ дѣленія 19 на 7 получается остатокъ 5, бо́льшій половины 7-и; но если мы возьмемъ въ частномъ не 2, а 3, то получимъ отрицательный *остатокъ* —2, *абсолютная величина которого меньше половины 7-и*. Очевидно, слѣдующее уравненіе будетъ съ меньшими коэффиціентами, если мы воспользуемся этимъ отрицательнымъ остаткомъ, т.-е. положимъ:

$$x=\frac{23+19y}{7}=3+3y+\frac{2-2y}{7}.$$

III. Если числитель дроби, которую надо приравнять произвольному цѣлому числу, содержитъ нѣкотораго множителя, то полезно его выключить. Такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ числитель дроби $\frac{2-2y}{7}$ содержитъ множителя 2; поэтому можно написать:

$$x=3+3y+\frac{2(1-y)}{7}.$$

Такъ какъ 2 есть число взаимно простое съ 7, то для дѣлимости произведенія $2(1-y)$ на 7, необходимо и достаточно, чтобы $1-y$ дѣлилось на 7. Приравнявъ $\frac{1-y}{7}$ произвольному цѣлому числу t, получимъ:

$$1-y=7t \text{ и } x=3+3y+2t.$$

Откуда: $$y=1-7t \text{ и } x=3+3(1-7t)+2t=6-19t.$$

275. Зная одну пару цѣлыхъ рѣшеній, можемъ найти остальныя. Пусть какимъ-нибудь способомъ (напримѣръ, просто догадкой) мы нашли, что уравненіе $ax+by=c$ удовлетворяется парою цѣлыхъ рѣшеній: $x=\alpha$ и $y=\beta$; тогда, не рѣшая уравненія, легко составить формулы, включающія въ себѣ всевозможныя цѣлыя рѣшенія. Для этого разсуждаемъ такъ: если α и β есть пара рѣшеній уравненія $ax+by=c$, то мы должны имѣть тождество:

$$a\alpha+b\beta=c.$$

Вычтя почленно это тождество изъ даннаго уравненія, получимъ:

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0.$$

Примемъ въ этомъ уравненіи $x-\alpha$ за одно неизвѣстное, а $y-\beta$ за другое; тогда свободный членъ уравненія будетъ 0, и поэтому

мы можемъ воспользоваться формулами, выведенными для этого частнаго случая (§ 271):

$$\begin{cases} x-\alpha=-bt \\ y-\beta=at \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-\alpha=bt \\ y-\beta=-at. \end{cases}$$

Откуда:

$$\begin{cases} x=\alpha-bt \\ y=\beta+at \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=\alpha+bt \\ y=\beta-at. \end{cases}$$

Эти общія формулы можно высказать такъ: **каждое неизвѣстное уравненіе $ax+by=c$ равно своему соотвѣтствующему частному значенію, сложенному съ произведеніемъ произвольнаго цѣлаго числа на коэффиціентъ при другомъ неизвѣстномъ, при чемъ какой-нибудь одинъ изъ этихъ коэффиціентовъ долженъ быть взятъ съ обратнымъ знакомъ.**

Примѣръ 1. Уравненіе $3x+4y=13$ удовлетворяется значеніями $x=3$, $y=1$. Поэтому общія формулы будутъ:

$$x=3-4t,\quad y=1+3t$$

или

$$x=3+4t,\quad y=1-3t,$$

Примѣръ 2. Уравненіе $7x-2y=11$ имѣетъ пару рѣшеній: $x=1$, $y=-2$; поэтому общія формулы будутъ:

$$x=1+2t,\quad y=-2+7t$$

или

$$x=1-2t,\quad y=-2-7t.$$

Замѣчаніе. Выведенныя въ этомъ параграфѣ формулы должны быть тождественны тѣмъ формуламъ, которыя получаются въ результатѣ обыкновеннаго рѣшенія неопредѣленнаго уравненія. Однако, вслѣдствіе произвольности числа t, эти формулы могутъ разниться по своему внѣшнему виду. Дѣйствительно, замѣняя t на $t\pm1$, $t\pm2$, $t\pm3$, . . ., мы будемъ получать другія формулы:

$$\begin{cases} x=(\alpha\mp b)\mp bt \\ y=(\beta\pm a)\pm bt \end{cases} \quad \begin{cases} x=(\alpha\mp 2b)\mp bt \\ y=(\beta\pm 2a)\pm at \end{cases} \quad \begin{cases} x=(\alpha\mp 3b)\mp bt \\ y=(\beta\pm 3a)\pm at \end{cases} \text{ и т. д.,}$$

которыя, отличаясь внѣшнимъ видомъ, даютъ одинаковые результаты (конечно, не при одинаковыхъ значеніяхъ t). Полезно замѣтить, что во всѣхъ этихъ формулахъ коэффиціентъ при t одинъ и тотъ же; это обстоятельство можетъ, до нѣкоторой степени, служить повѣркою правильности рѣшенія: если въ результатѣ рѣшенія получается для какого-нибудь неизвѣстнаго формула, въ которой коэффиціентъ при произвольномъ цѣломъ числѣ не равенъ коэффиціенту при другомъ неизвѣстномъ, то рѣшеніе выполнено неправильно.

276. Теорема. Если въ уравненіи $ax \pm by = c$ всѣ коэффиціенты числа цѣлыя, при чемъ a и b числа положительныя и взаимно простыя то, подставляя вмѣсто x числа: 0, 1, 2, 3... $(b-1)$, или вмѣсто y числа: 0, 1, 2, 3... $(a-1)$, мы найдемъ для другого неизвѣстнаго цѣлое значеніе и только одно.

Док. Изъ уравненія выводимъ:

$$y = \pm \frac{c - ax}{b}.$$

Предварительно убѣдимся, что, подставляя въ $c-ax$ вмѣсто x числа: 0, 1, 2... $(b-1)$ и дѣля результаты на b, мы не можемъ получить двухъ одинаковыхъ положительныхъ остатковъ [1]. Предположимъ обратное, напр., что $c-am$, и $c-an$, гдѣ m и n суть два числа изъ ряда: 0, 1, 2.. $(b-1)$, при дѣленіи на b даютъ одинъ и тотъ же положительный остатокъ r. Назвавъ частное отъ дѣленія $c-am$ на b черезъ q и $c-an$ на b черезъ p, получимъ:

$$c-am=bq+r \text{ и } c-an=bp+r.$$

Вычтя эти равенства почленно, найдемъ:

$$a(n-m)=b(q-p),$$

откуда:

$$\frac{a(n-m)}{b}=q-p.$$

Такъ какъ $q-p$ есть число цѣлое, то $a(n-m)$ должно дѣлиться на b; но этого быть не можетъ, такъ какъ a и b числа взаимно простыя, а $n-m<b$; значитъ, $c-am$ и $c-na$ не могутъ дать одного и того же положительнаго остатка.

Итакъ, подставляя въ $c-ax$ вмѣсто x числа: 0, 1, 2 ..$(b-1)$ и дѣля результаты на b, мы должны получать различные положительные остатки. Такъ какъ каждый остатокъ долженъ быть меньше b и число этихъ остатковъ есть b, то одинъ изъ нихъ долженъ равняться 0; другими словами, при одной изъ этихъ подстановокъ y окажется цѣлымъ числомъ.

Точно также можно доказать теорему и относительно x.

Доказанная теорема позволяетъ найти пару рѣшеній посредствомъ нѣсколькихъ испытаній, число которыхъ тѣмъ меньше, чѣмъ меньше одинъ изъ коэффиціентовъ a и b.

Примѣръ. $5x-3y=17$.

Такъ какъ въ этомъ примѣрѣ коэффиціентъ при y меньше коэффиціента при x, то для уменьшенія числа испытаній выгоднѣе дѣлать подстановки на мѣсто x:

$$y=\frac{5x-17}{3} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{17}{3}. \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{7}{3}. \end{cases}$$

---

[1]) Если, при какой-нибудь изъ этихъ подстановокъ выраженіе $c-ax$ дало бы отрицательное число, мы могли бы увеличить частное на 1, чтобы и въ этомъ случаѣ получить положительный остатокъ.

Такимъ образомъ, пара цѣлыхъ рѣшеній найдена: $x=1$, $y=-4$; значитъ, общія формулы будутъ:

$$x=1+3t;\ y=-4+5t.$$

277. Исключеніе отрицательныхъ рѣшеній.

Всѣ цѣлыя рѣшенія (положительныя, отрицательныя и нулевыя) уравненія $ax+by=c$ выражаются, какъ мы видѣли, формулами:

$$x=\alpha-bt,\ y=\beta+at.$$

Отсюда видно, что x и y будутъ отрицательными числами только для такихъ значеній t, при которыхъ двучлены $\alpha-bt$ и $\beta+at$ окажутся меньше 0. Желая исключить всѣ такія рѣшенія и оставить только цѣлыя положительныя или нулевыя рѣшенія, мы должны брать для t цѣлыя значенія, удовлетворяющія слѣдующимъ условіямъ:

$$\alpha-bt\geqslant 0 \text{ и } \beta+at\geqslant 0 \text{ [1]}$$

Рѣшивъ эти неравенства, соединенныя съ равенствами, найдемъ для t два предѣла, которые ограничатъ произвольность въ выборѣ значеній этого числа. При этомъ могутъ представиться слѣдующіе 2 случая, смотря по тому, будетъ ли число b положительное или отрицательное (число a мы всегда можемъ сдѣлать положительнымъ, умноживъ, въ случаѣ надобности, всѣ члены уравненія на -1):

I. $b>0$ Изъ неравенствъ находимъ:

$$bt\leqslant\alpha \text{ и } at\geqslant-\beta.$$

Откуда:

$$t\leqslant\frac{\alpha}{b} \text{ и } t\geqslant-\frac{\beta}{a}.$$

(Знакъ = имѣетъ мѣсто, конечно, въ томъ только случаѣ, когда $\frac{\alpha}{b}$ и $\frac{\beta}{a}$ суть числа цѣлыя).

Въ этомъ случаѣ уравненіе имѣетъ столько рѣшеній, сколько есть цѣлыхъ чиселъ между $\frac{\alpha}{b}$ и $-\frac{\beta}{a}$ (считая въ томъ числѣ и са-

[1]) Если бы мы хотѣли исключить еще и нулевыя рѣшенія, то должны были бы въ этихъ формулахъ оставить только знакъ $>$, а знакъ $=$ отбросить.

мые эти предѣлы, если они числа цѣлыя). Можетъ случиться, что между этими предѣлами нѣтъ ни одного цѣлаго числа; тогда уравненіе не имѣетъ ни одного цѣлаго положительнаго рѣшенія.

II. $b<0$. Въ этомъ случаѣ неравенства даютъ:

$$t \geqslant \frac{\alpha}{b} \text{ и } t \geqslant -\frac{\beta}{a}$$

(при дѣленіи на отрицательное число знакъ неравенства измѣняется). Такъ какъ эти предѣлы одинаковаго смысла, то достаточно взять изъ нихъ только одинъ, бо́льшій. Значитъ, въ этомъ случаѣ уравненіе имѣетъ б е з ч и с л е н н о е м н о ж е с т в о цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

Примѣръ 1. Н а й т и ц ѣ л ы я п о л о ж и т е л ь н ы я (и л и н у л е в ы я) р ѣ ш е н і я у р. $7x+9y=5$.

Такъ какъ коэффиціентъ при y положительное число, то утверждаемъ *a priori*, что данное уравненіе имѣетъ конечное число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній, *или не имѣетъ ихъ* вовсе. Дѣйствительно, рѣшивъ уравненіе, найдемъ:

$$x=2-9t, \quad y=-1+7t.$$

Неравенства $2-9t \geqslant 0$ и $-1+7t \geqslant 0$
даютъ: $t<\frac{2}{9}$ и $t>\frac{1}{7}$.

(Знакъ = опущенъ, такъ какъ оба предѣла дробные).

Уравненіе не имѣетъ ни одного положительнаго цѣлаго рѣшенія.

Примѣръ 2. Н а й т и ц ѣ л ы я п о л о ж и т е л ь н ы я (и л и н у л е в ы я) р ѣ ш е н і я у р. $33-5x=3y$.

Сдѣлавъ коэффиціентъ при x положительнымъ, получимъ:

$$5x+3y=33.$$

Рѣшивъ уравненіе, найдемъ: $x=3t$, $y=11-5t$.

Неравенства $3t \geqslant 0$ и $11-5t \geqslant 0$
даютъ: $t \geqslant 0$ и $t \geqslant 2\frac{1}{5}$.

Между этими предѣлами заключается слѣдующія три значенія: $t=0$, $t=1$, $t=2$, соотвѣтственно которымъ получимъ:

1) $x=0$, $y=11$; 2) $x=3$, $y=6$; 3) $x=6$, $y=1$.

Примѣръ 3. Найти цѣлыя положительныя (или нулевыя) рѣшенія ур. $29x-30y=5$.

Утверждаемъ *a priori*, что это уравненіе имѣетъ безчисленное множество цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній. Дѣйствительно, рѣшивъ уравненіе, находимъ:

$$x=-5+30t\geqslant 0,\quad y=-5+29t\geqslant 0,$$

$$t>\tfrac{1}{6},\ t>\tfrac{5}{9}.$$

Такъ какъ $\frac{5}{9}>\frac{1}{6}$, то достаточно положить, что $t>\frac{5}{29}$. Слѣдовательно, $t=1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots$

278. Два уравненія первой степени съ тремя неизвѣстными. Пусть требуется рѣшить въ цѣлыхъ числахъ систему:

$$\begin{cases} 2x+3y-7z=21 \\ 5x-4y+6z=48. \end{cases}$$

Исключивъ одно неизвѣстное, напр. z, получимъ одно уравненіе съ 2 неизвѣстными:

$$47x-10y=462.$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ:

$$x=6+10t,\quad y=-18+47t,$$

гдѣ t есть произвольное цѣлое число, пока рѣчь идетъ только о томъ, чтобы x и y были цѣлыя. Чтобы опредѣлить, какія значенія можно давать для t, чтобы и z было также цѣлымъ числомъ, вставимъ полученныя выраженія вмѣсто x и y въ одно изъ данныхъ уравненій, напр., въ 1-е; отъ этого получимъ одно уравненіе съ неизвѣстными t и z:

$$161t-7z=63\quad \text{или}\quad 23t-z=9.$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ:

$$z=23t-9.$$

Для полученія положительныхъ (и нулевыхъ) рѣшеній надо рѣшить неравенства, соединенныя съ равенствами:

$$6+10t\geqslant 0,\quad -18+47t\geqslant 0,\quad 23t-9\geqslant 0.$$

Отсюда находимъ: $t\geqslant-\frac{3}{5}$, $t\geqslant\frac{18}{47}$ и $t\geqslant\frac{9}{23}$.

Слѣдов., для t можно брать числа: 1, 2, 3, 4...

Такимъ образомъ, рѣшеніе системы двухъ уравненій первой степени съ 3 неизвѣстными сводится къ двукратному рѣшенію одного уравненія съ 2 неизвѣстными.

ОТДѢЛЪ VII.

Обобщеніе понятія о показателѣ.

Дробные и несоизмѣримые показатели[1]).

279. Опредѣленіе дробнаго показателя. Мы видѣли (§ 166, теор. 2-я), что при извлеченіи корня изъ степени дѣлятъ показателя подкоренного числа на показателя корня, если такое дѣленіе выполняется нацѣло. Теперь мы условимся распространить это правило и на тотъ случай, когда показатель подкоренного числа не дѣлится нацѣло на показателя корня. Въ такомъ случаѣ въ результатѣ извлеченія мы должны получить степень съ дробнымъ показателемъ; напр.:

$$\sqrt[3]{a^5} \text{ выразится } a^{\frac{5}{3}},$$
$$\sqrt[n]{a^m} \quad \text{»} \quad a^{\frac{m}{n}}, \text{ и т. п.}$$

Само собою разумѣется, что дробные показатели не могутъ имѣть того значенія, какимъ обладаютъ цѣлые положительные показатели; напр., нельзя понимать степень $a^{\frac{2}{3}}$ въ томъ смыслѣ, что a берется сомножителемъ $\frac{2}{3}$ раза, такъ какъ выраженіе «$\frac{2}{3}$ раза» не имѣетъ смысла. Степень $a^{\frac{m}{n}}$ есть только иной видъ радикала, у котораго показатель подкоренного числа есть m, а показатель самого радикала есть n. Такимъ образомъ, $a^{\frac{2}{3}}$ есть не что иное, какъ $\sqrt[3]{a^2}$, $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ есть иной видъ выраженія $\sqrt{1+x}$, и т. п.

---

[1]) Передъ этою статью полезно повторить все, относящееся до отрицательныхъ показателей (см §§ 68, 91, 92, 93, 156, 208, 4°).

Условно допускаются также и отрицательные дробные показатели въ томъ смыслѣ, что число съ такимъ показателемъ равносильно дроби, у которой числитель есть 1, а знаменатель то же число съ положительнымъ показателемъ; такъ:

$$a^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}.$$

280. Ирраціональному выраженію можно придать видъ раціональнаго. Дробные показатели даютъ возможность представить ирраціональное выраженіе подъ видомъ раціональнаго; напр., выраженіе $3\sqrt{a}\sqrt[3]{x^2}$ можно представить такъ: $3a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}}$. Конечно, такое преобразованіе измѣняетъ только внѣшній видъ выраженія, а не содержанія его; однако подобное измѣненіе имѣетъ важное значеніе, такъ какъ оказывается, что **всѣ дѣйствія надъ степенями, имѣющими дробныхъ показателей, можно производить по тѣмъ же правиламъ, какія были выведены для цѣлыхъ показателей.** Докажемъ это.

281. Основное свойство дробнаго показателя. Если дробнаго показателя $\frac{m}{n}$ замѣнимъ равнымъ ему показателемъ $\frac{m'}{n'}$, то величина степени не измѣнится.

Пусть $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$; требуется доказать, что $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m'}{n'}}$. Для доказательства замѣнимъ степени съ дробными показателями ихъ настоящими значеніями:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\quad a^{\frac{m'}{n'}}=\sqrt[n']{a^{m'}}.$$

Приведя эти радикалы къ одинаковому показателю, получимъ:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nn']{a^{mn'}};\quad \sqrt[n']{a^{m'}}=\sqrt[nn']{a^{m'n}}.$$

Но изъ равенства $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$ слѣдуетъ, что $mn'=n'm$; значитъ

$$\sqrt[nn']{a^{mn'}}=\sqrt[nn']{a^{m'n}},\ \text{т.-е.}\ \sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n']{a^{m'}}\ \text{или}\ a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m'}{n'}}.$$

Основываясь на доказанномъ свойствѣ, мы можемъ преобразовывать дробнаго показателя совершенно такъ же, какъ обыкновенную дробь, лишь бы только преобразованіе не измѣняло величины показателя; напр., мы можемъ числителя и знаменателя дробнаго показателя умножить или раздѣлить на одно и то же число (ср. съ § 205).

282. Дѣйствія надъ степенями съ дробными положительными показателями. Предстоитъ доказать, что къ дробнымъ положительнымъ показателямъ примѣнимы правила, выведенныя раньше для цѣлыхъ показателей. Ходъ доказательства для всѣхъ дѣйствій одинъ и тотъ же: степени съ дробными показателями замѣняемъ радикалами; производимъ дѣйствіе по правилу о радикалахъ; результатъ выражаемъ дробнымъ показателемъ и затѣмъ его сравниваемъ съ тѣмъ, что требовалось доказать.

Умноженіе. Требуется доказать, что $a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

Док. $a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq}a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq+pn}}=$

$$=a^{\frac{mq+pn}{nq}}=a^{\frac{mq}{nq}+\frac{pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Полагая $n=1$, или $q=1$, найдемъ, что правило о сложеніи показателей распространяется и на тотъ случай, когда одинъ изъ показателей—дробь, а другой—цѣлое число.

Дѣленіе. Требуется доказать, что $a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$.

Док. $a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}:\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}:\sqrt[nq]{a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq}:a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq-np}}=$

$$=a^{\frac{mq-pn}{nq}}=a^{\frac{mq}{nq}-\frac{pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

Доказательство не теряетъ силы, если положимъ $n=1$ или $q=1$.

Возвышеніе въ степень. Требуется доказать, что

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}.$$

Док. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p}=\sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p}=\sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}}=\sqrt[nq]{a^{mp}}=$

$$=a^{\frac{mp}{nq}}=a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}.$$

Доказательство не теряетъ силы, если положимъ $n=1$ или $q=1$.

Извлеченіе корня. Требуется доказать, что

$$\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}}=a^{\frac{m}{n}:p}.$$

Док. $\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}}=\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}}=\sqrt[np]{a^m}=a^{\frac{m}{np}}=a^{\frac{m}{n}:p}$

Докажемъ еще, что теоремы о возвышеніи въ степень произведенія и дроби (§ 155) остаются вѣрными и для дробныхъ показателей.

I. Требуется доказать, что $(abc)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{m}{n}}c^{\frac{m}{n}}$.

Док. $(abc)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(abc)^m}=\sqrt[n]{a^mb^mc^m}=\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^m}\sqrt[n]{c^m}=a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{m}{n}}c^{\frac{m}{n}}$.

II. Требуется доказать, что $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}=\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$.

Док. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}=\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}}=\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$.

283. Дѣйствія надъ степенями съ дробными отрицательными показателями. Если показатели не только дробные, но и отрицательные, то и въ этомъ случаѣ къ нимъ можно примѣнять правила, относящіяся до положительныхъ показателей. Покажемъ это для какого-нибудь одного дѣйствія, напр. для умноженія.

Пусть требуется доказать, что $a^{-\frac{m}{n}}\cdot a^{-\frac{p}{q}}=a^{-\frac{m}{n}+\left(-\frac{p}{q}\right)}$.

Док. $a^{-\frac{m}{n}}\ a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}\cdot\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}}=a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)}=a^{-\frac{m}{n}+\left(-\frac{p}{q}\right)}$.

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что и другія дѣйствія можно совершать по правиламъ, относящимся до положительныхъ показателей.

284. Понятіе о несоизмѣримомъ показателѣ. Относительно несоизмѣримыхъ показателей мы ограничимся сообщеніемъ только самыхъ элементарныхъ свѣдѣній. Прежде всего замѣтимъ, что выраженію a^α въ которомъ α несоизмѣримое число, придаютъ смыслъ только тогда, когда основаніе a положительное. При этомъ могутъ представиться слѣдующіе 3 случая.

1-й случай: показатель α есть положительное несоизмѣримое число, при чемъ основаніе a больше 1.

Обозначимъ черезъ α_1 любое приближенное соизмѣримое значеніе числа α, взятое съ недостаткомъ, и черезъ α_2 любое приближенное соизмѣримое значеніе числа α, взятое съ избыткомъ. Тогда выраженіе a^α означаетъ число, которое **больше** всякой степени a^{α_1} и **меньше** всякой степени a^{α_2}. Если, напр., $\alpha=\sqrt{2}$, то a^α означаетъ число, бо́льшее каждаго изъ чиселъ ряда:

$$a^{1,4},\ a^{1,41},\ a^{1,414},\ a^{1,4142},\ldots \qquad (1)$$

въ которомъ показатели при a суть десятичныя приближенныя значенія $\sqrt{2}$, взятыя всѣ съ недостаткомъ, и меньшее каждаго изъ чиселъ ряда:

$$a^{1,5},\ a^{1,42},\ a^{1,415},\ a^{1,4143},\ldots \qquad (2)$$

въ которомъ показатели суть десятичныя приближенныя значенія $\sqrt{2}$, взятыя всѣ съ избыткомъ.

2-й случай: показатель α есть положительное несоизмѣримое число, но $a<1$.

Тогда выраженіе a^α означаетъ число, которое **меньше** всякой степени a^{α_1} и **больше** всякой степени a^{α_2}. Такъ, если $\alpha=\sqrt{2}$, то a^α при $a<1$ представляетъ собою число, меньшее каждаго изъ чиселъ ряда (1) и бо́льшее каждаго изъ чиселъ ряда (2).

3-й случай: показатель α есть отрицательное несоизмѣримое число и $a\lesseqgtr 1$.

Тогда выраженію a^{α} придаютъ тотъ же смыслъ, какой имѣютъ степени съ отрицательными соизмѣримыми показателями; такъ, $a^{-\sqrt{2}}=\frac{1}{a^{\sqrt{2}}}$.

При подробномъ изложеніи теоріи несоизмѣримыхъ показателей [1]) доказывается, что, во-1-хъ, число, бо́льшее (меньшее) всякой степени a^{α_1} и меньшее (бо́льшее) всякой степени a^{α_2}, существуетъ и притомъ только одно при всякомъ данномъ положительномъ a, и во-2-хъ, что съ несоизмѣримыми показателями можно поступать по тѣмъ же правиламъ, какія были выведены для показателей соизмѣримыхъ; такъ:

$$a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=a^{\alpha+\beta};\quad a^{\alpha}:a^{\beta}=a^{\alpha-\beta};\quad (a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}.$$

285. Примѣры на дѣйствія съ дробными и отрицательными показателями.

1) $$\frac{2a^2b^{-3}}{3a^{-\frac{3}{4}}b^{1,5}}\cdot\frac{5a^{\frac{7}{12}}b^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[12]{a^3b^5}}=\frac{2a^2b^{-3}}{3a^{-\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{5a^{\frac{7}{12}}b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{5}{12}}}=\frac{10a^{\frac{31}{12}}b^{-\frac{17}{6}}}{3a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{23}{12}}}=\frac{10}{3}a^{\frac{37}{12}}b^{-\frac{57}{12}}=$$

$$=\frac{10}{3}\sqrt[12]{\frac{a^{37}}{b^{57}}}=\frac{10a^3}{3b^4}\sqrt[12]{\frac{a}{b^9}};$$

2) $$\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}\right)=\left[a^{\frac{1}{2}}+\left(b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\right]\left[a^{\frac{1}{2}}-\left(b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\right]=$$

$$=a-\left(b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)^2=a-b-c+2b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}=a-b-c+2\sqrt{bc};$$

3) $$\sqrt{12a^{-4}b^3}:\left[\left(\frac{a^5}{3b^{-4}}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{4}}=\left(2\cdot3^{\frac{1}{2}}a^{-2}b^{\frac{3}{2}}\right):\frac{a^{-\frac{5}{2}}}{3^{-\frac{1}{2}}b^2}=$$

$$=2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{7}{2}}=2b^3\sqrt{ab}.$$

---

[1]) Такое изложеніе помѣщено нами въ концѣ этой книги (см. Приложеніе 1-е).

ОТДѢЛЪ VIII.

Прогрессіи и логариѳмы.

ГЛАВА I.

Ариѳметическая прогрессія.

286. Опредѣленіе. Ариѳметической прогрессіей называется такой рядъ чиселъ, въ которомъ каждое число, начиная со второго, равняется предшествующему, сложенному съ однимъ и тѣмъ же постояннымъ для этого ряда числомъ (положительнымъ и отрицательнымъ).

Такъ, два ряда:

$$\div \quad 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,$$
$$\div\!: \quad 12,\ 10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0,\ -2,\ -4$$

представляютъ собою ариѳметическія прогрессіи, потому что каждое число въ нихъ, начиная со второго, равно предшествующему, сложенному съ однимъ и тѣмъ же для каждаго ряда числомъ, именно: въ первомъ ряду — съ числомъ 3, а во второмъ — съ числомъ —2.

Числа, составляющія прогрессію, наз. ея членами. Положительное или отрицательное число, которое надо прибавить къ предшествующему члену, чтобы получить послѣдующій, наз. разностью прогрессіи.

Прогрессія наз. возрастающею, когда члены ея увеличиваются по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда; она наз. убывающею, когда члены ея уменьшаются по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда; значитъ, разность первой прогрессіи—положительное число, второй—отрицательное.

Для обозначенія того, что данный рядъ представляетъ собою ариѳметическую прогрессію, ставятъ иногда въ началѣ ряда знакъ $\div$.

Обыкновенно принято обозначать: первый членъ a, послѣдній l, разность d, число всѣхъ членовъ n и сумму ихъ s.

287. Теорема. Всякій членъ ариѳметической прогрессіи, начиная со второго, равенъ первому ея члену, сложенному съ произведеніемъ разности прогрессіи на число членовъ, предшествующихъ опредѣляемому.

Док. Пусть имѣемъ прогрессію:

$$\div\ a,\ b,\ c,\ д \ldots k,\ l,$$

у которой разность d. Изъ опредѣленія прогрессіи слѣдуетъ:

2-й	членъ	b,	имѣющій	передъ	собою	1 чл.	$=a+d$
3-й	»	c,	»	»	»	2 »	$=b+d=a+2d$
4-й	»	$д$,	»	»	»	3 »	$=c+d=a+3d$

. . . .

Этотъ законъ обладаетъ общностью, потому что, переходя отъ какого-нибудь члена къ слѣдующему, мы должны увеличить на 1 число предшествующихъ членовъ и вмѣстѣ съ тѣмъ прибавить 1 разъ разность.

Такимъ образомъ, 10-й членъ прогрессіи равенъ $a+9d$; вообще, m-й членъ равенъ $a+d(m-1)$.

Слѣдствіе 1. Примѣняя доказанную теорему къ послѣднему члену прогрессіи, т.-е. къ n-му, получимъ:

$$l=a+d(n-1)$$

т.-е. **послѣдній членъ ариѳметической прогрессіи равенъ первому ея члену, сложенному съ произведеніемъ разности прогрессіи на число всѣхъ членовъ, уменьшенное на единицу.**

Примѣръ 1. Опредѣлить 12-й членъ прогрессіи: 3, 7, 11...

Такъ какъ разность данной прогрессіи равна 4, то 12-й членъ ея будетъ:

$$3+4\ .\ 11=47.$$

Примѣръ 2. Найти 10-й членъ прогрессіи: 40, 37, 34...

Такъ какъ разность этой прогрессіи равна —3, то 10-й членъ ея будетъ:

$$40+(-3)\,.\,9=40-27=13.$$

Слѣдствіе 2. Ариѳметическую прогрессію, у которой первый членъ есть a, разность d и число членовъ n, можно изобразить такъ:

$$\div\ a,\quad a+d,\quad a+2d,\quad a+3d,\ldots a+d(n-1).$$

288. Лемма. Сумма двухъ членовъ ариѳметической прогрессіи, равноотстоящихъ отъ концовъ ея, равна суммѣ крайнихъ членовъ.

Док. Пусть имѣемъ прогрессію:

$$\div\ \overbrace{a, b\ldots\ldots e}^{m}\ldots\ldots\overbrace{h\ldots\ldots k,\ l}^{m},$$

въ которой e есть m-й членъ отъ начала, а h есть m-й членъ отъ конца. Тогда, по доказанному (если черезъ d обозначимъ разность прогрессіи):

$$e=a+d(m-1). \qquad (1)$$

Для опредѣленія члена h замѣтимъ, что если данную прогрессію напишемъ съ конца:

$$\overbrace{l,\ k\ldots.h}^{m}\ldots\ldots\overbrace{e\ldots.b,\ a}^{m},$$

то получимъ тоже прогрессію, у которой первый членъ есть l, а разность равна $-d$. Въ этой прогрессіи членъ h есть m-й отъ начала, а потому:

$$h=l+(-d)(m-1)=l-d(m-1). \qquad (2)$$

Сложивъ равенства [1] и [2], получимъ:

$$e+h=a+l.$$

Напр., въ прогрессіи: 12, 7, 2, —3, —8, —13, —18 находимъ: 12+(—18)=—6; 7+(—13)=—6; 2+(—8)=—6; —3+(—3)=—6.

289. Теорема. Сумма всѣхъ членовъ ариѳметической прогрессіи равна полусуммѣ крайнихъ ея членовъ, умноженной на число всѣхъ членовъ.

Док. Если сложимъ почленно два равенства:

$$\begin{cases} s=a+b+c+\ldots+i+k+l \\ s=l+k+i+\ldots+c+b+a, \end{cases}$$

то получимъ: $2s=(a+l)+(b+k)+(c+i)+\ldots+(l+a)$.

Двучлены, стоящіе внутри скобокъ, представляютъ собою суммы членовъ, равноотстоящихъ отъ концовъ прогрессіи; по доказанному, каждая изъ этихъ суммъ равна $a+l$; поэтому:

$$2s=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\ldots[n \text{ разъ}],$$

т.-е.
$$2s=(a+l)n; \text{ откуда } s=\frac{(a+l)n}{2}.$$

Замѣчаніе. Если въ формулу для суммы вмѣсто члена l вставимъ равное ему выраженіе $a+d(n-1)$, то получимъ:

$$s=\frac{[2a+d(n-1)]n}{2}.$$

Эта формула опредѣляетъ сумму въ зависимости отъ перваго члена, разности и числа членовъ данной прогрессіи.

Примѣръ 1. Опредѣлить сумму натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n включительно.

Рядъ: 1, 2, 3,...$(n-1)$, n представляетъ собою ариѳметическую прогрессію, у которой первый членъ есть 1, разность 1, число членовъ n, послѣдній членъ тоже n; поэтому:

$$s=\frac{(1+n)n}{2}.$$

Такъ: $1+2+3+4+5+6=\frac{(1+6).6}{2}=21$.

Примѣръ 2. Найти сумму первыхъ n нечетныхъ чиселъ.

Рядъ: 1, 3, 5, 7,... есть ариѳметическая прогрессія, у ко-

торой первый членъ есть 1 и разность 2. Если возьмемъ n членовъ, то послѣдній членъ будетъ $1+2(n-1)=2n-1$. Поэтому:

$$s=\frac{[1+(2n-1)]n}{2}=n^2.$$

Такъ: $1+3=4=2^2$; $1+3+5=9=3^2$; $1+3+5+7=16=4^2$; и т. д.

Примѣръ 3. Найти сумму 10 членовъ прогрессіи: 3, $2\frac{1}{2}$, 2...

Въ этой прогрессіи разность равна $-\frac{1}{2}$; поэтому 10-й членъ будетъ $3-\frac{1}{2}.\,9=-1\frac{1}{2}$, и искомая сумма

$$s=\frac{[3+(-1\frac{1}{2})]10}{2}=7\frac{1}{2}.$$

Дѣйствительно: $3+2\frac{1}{2}+2+1\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2}-1-1\frac{1}{2}=7\frac{1}{2}$.

290. Такъ какъ для 5 чиселъ a, l, d, n и s мы имѣемъ два уравненія:

$$1)\ l=a+d(n-1),\ \text{ и }\ 2)\ s=\frac{(a+l)n}{2},$$

то по даннымъ значеніямъ трехъ изъ этихъ чиселъ мы можемъ находить значенія остальныхъ двухъ. Рѣшимъ для примѣра слѣдующую задачу.

Задача. Опредѣлить число членовъ ариѳметической прогрессіи, у которой сумма равна 12, первый членъ 7, а разность есть -2.

Для этой задачи уравненія даютъ:

$$l=7-2(n-1)=9-2n\quad \text{и}\quad 12=\frac{(7+l)n}{2}.$$

Откуда подстановкою находимъ:

$$12=\frac{(7+9-2n)n}{2}=(8-n)n$$

или $$n^2-8n+12=0,$$

слѣд., $$n=4\pm\sqrt{16-12}=4\pm2,$$

значитъ, $$n_1=6,\quad n_2=2.$$

Такимъ образомъ предложенная задача имѣетъ два отвѣта: число членовъ прогрессіи или 6, или 2. И дѣйствительно, двѣ прогрессіи:

$$\div 7,\ 5,\ \text{и} \div 7,\ 5,\ 3,\ 1,\ -1,\ -3$$

имѣютъ одну и ту же сумму 12.

ГЛАВА II.

Геометрическая прогрессія.

291. Опредѣленіе. Геометрической прогрессіей называется такой рядъ чиселъ, въ которомъ каждое число, начиная со второго, равняется предшествующему, умноженному на одно и то же постоянное для каждаго ряда число (положительное или отрицательное). Такъ, три ряда:

$$\dot{\dot{\div}}\ 2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ 486,\ 1458,$$
$$\dot{\dot{\div}}\ 8,\ -16,\ 32,\ -64,\ 128,\ -256,\ 512,$$
$$\dot{\dot{\div}}\ 20,\ 10,\ 5,\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{5}{8},\ \frac{5}{16},\ \frac{5}{32},$$

представляютъ собою геометрическія прогрессіи, потому что въ этихъ рядахъ каждое число, начиная со второго, получается изъ предшествующаго умноженіемъ: въ первомъ ряду на 3, во второмъ на —2, въ третьемъ на $\frac{1}{2}$.

Числа, составляющія прогрессію, наз. ея *членами*. Постоянное для каждой прогрессіи число, на которое надо умножить какой-нибудь членъ прогрессіи, чтобы получить слѣдующій членъ, наз. *знаменателемъ прогрессіи*.

Геометрическая прогрессія наз. *возрастающею* или *убывающею*, смотря по тому, увеличивается или уменьшается *абсолютная величина* членовъ прогрессіи по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда; такъ, изъ трехъ указанныхъ выше прогрессій первая и вторая—возрастающія, а третья—убывающая. Въ возрастающей прогрессіи абсолютная величина знаменателя больше 1, въ убывающей меньше 1.

Для обозначенія того, что данный рядъ есть прогрессія геометрическая, иногда ставятъ въ началѣ его знакъ ÷÷.

Обыкновенно принято обозначать: первый членъ a, послѣдній l, знаменателя q, число всѣхъ членовъ n и сумму ихъ s.

292. Теорема. Всякій членъ геометрической прогрессіи, начиная со второго, равенъ первому ея члену, умноженному на такую степень знаменателя прогрессіи, у которой показатель равенъ числу членовъ, предшествующихъ опредѣляемому.

Д о к. Пусть имѣемъ прогрессію:

$$\div\div\ a,\ b,\ c, \ldots i,\ k,\ l,$$

у которой знаменатель есть q. По опредѣленію прогрессіи будемъ имѣть:

2-й	членъ b,	имѣющій	передъ	собою	1 чл.	$=aq$
3-й	» c,	»	»	»	2 »	$=bq=aq^2$
4-й	» d,	»	»	»	3 »	$=cq=aq^3$

. . . .

Этотъ законъ обладаетъ общностью, такъ какъ, переходя отъ какого-нибудь члена къ слѣдующему, мы должны увеличить на 1 число предшествующихъ членовъ и вмѣстѣ съ тѣмъ умножить еще 1 разъ на знаменателя прогрессіи.

Вообще, если члену h предшествуютъ m членовъ, т.-е. если h есть $(m+1)$-й членъ геометрической прогрессіи, то $h=aq^m$.

Слѣдствіе 1. Примѣняя доказанную теорему къ послѣднему члену прогрессіи, т.-е. къ n-му, получимъ:

$$l=aq^{n-1},$$

т.-е. **послѣдній членъ геометрической прогрессіи равенъ первому ея члену, умноженному на степень знаменателя, показатель которой равенъ числу всѣхъ членовъ безъ единицы.**

Примѣръ 1. Опредѣлить 6-й членъ прогрессіи, у которой первый членъ 3, а знаменатель 4.

$$6\text{-й членъ}=3\ .\ 4^5=3072.$$

Примѣръ 2. Опредѣлить 10-й членъ прогрессіи ÷÷ 20, 10...

Такъ какъ знаменатель этой прогрессіи есть $\frac{1}{2}$, то 10-й членъ$=20\,.\,(\frac{1}{2})^9=20.\frac{1}{2^9}=\frac{5}{2^7}=\frac{5}{128}$.

Примѣръ 3. Опредѣлить 4-й членъ прогрессіи:

$$\div\!\!\div \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},\ \frac{1}{2-\sqrt{2}}\ldots$$

$$\text{Знам.}=\frac{1}{2-\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{4-й членъ}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^2}{2\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Слѣдствіе 2. Геометрическую прогрессію, у которой первый членъ есть a, число членовъ n и знаменатель q, можно изобразить такъ:

$$\div\!\!\div\ a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3\ldots aq^{n-1}.$$

293. Теорема. Сумма всѣхъ членовъ геометрической прогрессіи равна дроби, у которой числитель есть разность между произведеніемъ послѣдняго члена на знаменателя прогрессіи и первымъ членомъ, а знаменатель есть разность между знаменателемъ прогрессіи и единицею, т.-е.

$$s=\frac{lq-a}{q-1}.$$

Док. По опредѣленію геометрической прогрессіи:

$$\begin{cases} b=aq \\ c=bq \\ d=cq \\ \ldots \\ \ldots \\ k=iq \\ l=kq \end{cases}$$

Сложимъ эти равенства почленно; тогда въ лѣвой части получается сумма всѣхъ членовъ безъ перваго, а въ правой — произведеніе знаменателя q на сумму всѣхъ членовъ безъ послѣдняго.

$$s-a=(s-l)q.$$

Остается рѣшить это уравненіе относительно s:

$$s-a=sq-lq;\quad lq-a=sq-s=s(q-1),$$

$$s=\frac{lq-a}{q-1}, \tag{1}$$

294. Два другихъ выраженія для суммы.

1°. Умноживъ числителя и знаменателя формулы (1) на -1, мы придадимъ другой видъ выраженію суммы, который тоже полезно запомнить:

$$s=\frac{a-lq}{1-q}. \tag{2}$$

Послѣдняя формула удобна для прогрессіи убывающей, потому что тогда $a>lq$ и $1>q$.

2° Замѣнивъ членъ l въ равенствахъ (1) и (2) равнымъ ему выраженіемъ aq^{n-1}, найдемъ:

$$s=\frac{aq^n-a}{q-1}\quad \text{или}\quad s=\frac{a-aq^n}{1-q}. \tag{3}$$

Эти формулы удобно употреблять тогда, когда членъ l неизвѣстенъ.

Примѣръ 1. Опредѣлить сумму 10 членовъ прогрессіи: $1,\ 2,\ 2^2\ldots$

Въ этой прогрессіи $a=1$, $q=2$, $l=1\,.\,2^9=2^9$; поэтому:

$$s=\frac{2^9\,.\,2-1}{2-1}=2^{10}-1=1023.$$

Примѣръ 2. Опредѣлить сумму 8 членовъ прогрессіи: $\div\ 1, \frac{1}{3},\ldots$

Здѣсь $a=1$, $q=\frac{1}{3}$, $l=1\,.\,(\frac{1}{3})^7$, поэтому:

$$s=\frac{1-(\frac{1}{3})^8}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3280}{2187}.$$

295. Два уравненія: $l=aq^{n-1}$ и $s=\dfrac{lq-a}{q-1}$ содержатъ 5 чиселъ и потому позволяютъ по даннымъ тремъ изъ нихъ найти остальныя два. Рѣшимъ для примѣра слѣдующую задачу.

Задача. По даннымъ s, q и n найти a и l.

Изъ уравненія:

$$s=\frac{aq^n-a}{q-1}$$

находимъ:

$$a=\frac{s(q-1)}{q^n-1},$$

послѣ чего получимъ:

$$l=aq^{n-1}=\frac{s(q-1)}{q^n-1}q^{n-1}.$$

296. Безконечная геометрическая прогрессія. Если рядъ чиселъ, составляющихъ прогрессію, предполагается продолженнымъ безъ конца, то прогрессія наз. безконечной. Относительно такихъ прогрессій докажемъ слѣдующія 3 теоремы.

Теорема 1. Абсолютная величина члена безконечной геометрической возрастающей прогрессіи, по мѣрѣ удаленія его отъ начала ряда, можетъ превзойти какое угодно данное число (какъ бы велико оно ни было).

Пусть q есть абсолютная величина знаменателя геометрической прогрессіи и a абсолютная величина ея перваго члена; тогда абс. величина членовъ прогрессіи выразится такъ:

$$\div\div\; a,\; aq,\; aq^2,\; aq^3,\ldots\; aq^n\ldots$$

Требуется доказать, что, если $q>1$, т.-е. если прогрессія **возрастающая**, то при неограниченномъ возрастаніи n членъ aq^n можетъ превзойти какое угодно данное число A (какъ бы велико это число ни было). Для этого возьмемъ сумму первыхъ n членовъ данной прогрессіи:

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}=\frac{aq^n-a}{q-1}.$$

Такъ какъ $q>1$, то каждое слагаемое этой суммы, начиная со второго, больше a, а потому вся сумма больше числа a, повтореннаго n разъ, т.-е. больше an; значитъ:

$$\frac{aq^n-a}{q-1}>an.$$

Умноживъ обѣ части этого неравенства на положительное число $q-1$, мы не измѣнимъ знака неравенства; поэтому

$$aq^n-a>an(q-1);\quad \text{откуда:}\quad aq^n>an(q-1)+a.$$

Чтобы число aq^n сдѣлалось больше даннаго числа A, достаточно, очевидно, взять n настолько большимъ, чтобы удовлетворялось неравенство:

$$a(q-1)n+a\geqslant A;$$

т.-е. взять n настолько большимъ, чтобы

$$n\geqslant\frac{A-a}{a(q-1)},$$

что вполнѣ возможно (какъ бы велико ни было число A), такъ какъ n мы можемъ сдѣлать сколько угодно большимъ.

Примѣръ. Пусть $a=1$, $q=1{,}2$ и $A=1000$.

Тогда $\quad n\geqslant\dfrac{1000-1}{1(1{,}2-1)}$, т.-е. $n\geqslant\dfrac{999}{0{,}2}$ или $n\geqslant4995$.

Значитъ, можемъ ручаться, что всѣ члены, начиная съ 4995-го, окажутся болѣе 1000.

Теорема 2. Абсолютная величина члена безконечной геометрической убывающей прогрессіи, по мѣрѣ удаленія его отъ начала ряда, можетъ сдѣлаться меньше какого угодно даннаго положительнаго числа (какъ бы мало оно ни было).

Пусть попрежнему абс. величина членовъ прогрессіи есть:

$$\div\; a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3\ldots\ aq^n\ldots$$

Требуется доказать, что если $q<1$, т.-е. если прогрессія **убывающая,** то при неограниченномъ возрастаніи n членъ aq^n можетъ сдѣлаться меньше какого угодно даннаго положительнаго числа k (какъ бы мало это число ни было). Для доказательства возьмемъ вспомогательную прогрессію:

$$\div\;\frac{1}{a},\ \frac{1}{aq},\ \frac{1}{aq^2},\ \frac{1}{aq^3}\ldots\ \frac{1}{aq^n}\ldots$$

Эта прогрессія возрастающая, такъ какъ ея знаменатель есть дробь $\frac{1}{q}$, которая, при $q<1$, больше 1. По доказанному

въ теоремѣ 1-й, n-й членъ этой прогрессіи, т.-е. $\frac{1}{aq^n}$, при неограниченномъ возрастаніи n, можетъ сдѣлаться больше какого угодно даннаго числа A (какъ бы велико оно ни было). Возьмемъ за A число $\frac{1}{k}$. Тогда при достаточно большемъ n будетъ имѣть мѣсто неравенство:

$$\frac{1}{aq^n} > \frac{1}{k};\text{ откуда: } aq^n < k.$$

Теорема, такимъ образомъ, доказана.

Теорема 3. **Сумма первыхъ n членовъ безконечной геометрической убывающей прогрессіи:**

$$\div\!\div\ a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3 \ldots\ aq^{n-1},\ aq^n \ldots$$

при неограниченномъ увеличеніи числа ихъ n приближается къ постоянному числу

$$\frac{a}{1-q}$$

такъ, что разность между этимъ постояннымъ числомъ и суммою членовъ прогрессіи дѣлается меньше любого даннаго положительнаго числа (какъ бы мало оно ни было).

Дѣйствительно, сумма первыхъ n членовъ этой прогрессіи равна (§ 294):

$$\frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q},$$

т.-е. она равна постоянному числу $\frac{a}{1-q}$, уменьшенному на дробь $\frac{aq^n}{1-q}$. Но при неограниченномъ возрастаніи n абсолютная величина числителя этой дроби, по доказанному, дѣлается меньше какого угодно даннаго положительнаго числа (какъ бы мало оно ни было); и такъ какъ знаменатель этой дроби есть число постоянное, то, значитъ, и сама дробь дѣлается какъ угодно малой.

Опредѣленіе. Если какая-нибудь перемѣнная величина при своемъ измѣненіи приближается къ нѣкоторой постоянной величинѣ такъ, что разность между ними дѣлается (и при дальнѣйшемъ измѣненіи перемѣнной остается) какъ угодно малой, то эта постоянная величина наз. предѣломъ перемѣнной.

Принявъ это опредѣленіе во вниманіе, мы можемъ теорему 3-ю высказать такъ:

сумма первыхъ n членовъ безконечной геометрической убывающей прогрессіи, при неограниченномъ увеличеніи числа ихъ n, стремится къ предѣлу, равному частному отъ дѣленія перваго члена этой прогрессіи на разность между 1 и знаменателемъ прогрессіи.

Предѣлъ этотъ принято называть суммою членовъ безконечной геометрической убывающей прогрессіи (обозначается буквою s).

Примѣръ 1. Найти сумму: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$

Здѣсь $a=1$, $q=\frac{1}{2}$; поэтому $s=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$.

Примѣръ 2. Найти сумму: $\frac{3}{2}+(-\frac{2}{3})+\frac{8}{27}\ldots$

Здѣсь $a=\frac{3}{2}$, $q=-\frac{4}{9}$; поэтому

$$s=\frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{4}{9}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{13}{9}}=\frac{27}{26}.$$

Примѣръ 3. Опредѣлить точную величину чистой періодической дроби: 0,232323...

Точная величина этой дроби есть предѣлъ суммы: $\dfrac{23}{100}+$ $+\dfrac{23}{10000}+\dfrac{23}{1000000}+\ldots$, которая, очевидно, представляетъ собою сумму членовъ геометрической прогрессіи; у нея первый членъ

есть $\frac{23}{100}$, а знаменатель $=\frac{1}{100}$; поэтому:

$$s=\frac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{\frac{23}{100}}{\frac{99}{100}}=\frac{23}{99}.$$

То же число мы получили бы по правилу, указываемому въ ариѳметикѣ.

Примѣръ 4. Опредѣлить точную величину смѣшанной періодической дроби 0,3545454...
Точная величина этой дроби есть предѣлъ суммы:

$$\frac{3}{10}+\frac{54}{1000}+\frac{54}{100000}+\frac{54}{10000000}+\ldots$$

Слагаемыя этой суммы, начиная со второго, суть члены безконечной геометрической убывающей прогрессіи, у которой первый членъ есть $\frac{54}{1000}$ и знаменатель $\frac{1}{100}$. Поэтому предѣлъ суммы равенъ:

$$\frac{3}{10}+\frac{\frac{54}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{3}{10}+\frac{54}{990}=\frac{3.99+54}{990}=\frac{3.100-3+54}{990}=\frac{354-3}{990}.$$

То же число мы получили бы по правилу ариѳметики.

ГЛАВА III.

Общія свойства логариѳмовъ.

297. Предварительное замѣчаніе. Если въ равенствѣ: $a^b=N$, числа a и b даны, а число N требуется найти, то дѣйствіе, потребное для этого, называется, какъ мы знаемъ, возвышеніемъ въ степень: N есть степень, a—основаніе степени, b—ея показатель. Этому дѣйствію соотвѣтствуютъ два обратныя: одно—нахожденіе основанія a по даннымъ степени N и показателю b (называется извлеченіемъ корня), другое—нахожденіе показателя b

по даннымъ степени N и основанію a (называется нахожденіемъ логариѳма числа N по основанію a). Поставимъ вопросъ, различны ли эти дѣйствія? Вѣдь и для умноженія можно усмотрѣть два обратныя дѣйствія: первое—нахожденіе множимаго по даннымъ произведенію и множителю, второе—нахожденіе множителя по даннымъ произведенію и множимому. Однако дѣйствія эти разсматриваются не какъ различныя, а какъ одно и то же дѣйствіе, называемое дѣленіемъ. Причина сліянія этихъ двухъ обратныхъ дѣйствій въ одно заключается въ перемѣстительномъ свойствѣ умноженія, по которому произведеніе не мѣняется отъ перемѣны мѣстъ множимаго и множителя. Въ такомъ же положеніи находится и сложеніе (2-хъ слагаемыхъ); этому дѣйствію также можно указать два обратныя дѣйствія: одно—нахожденіе неизвѣстнаго числа (1-го слагаемаго), къ которому надо прибавить данное число (2-е слагаемое), чтобы получить данную сумму; другое—нахожденіе неизвѣстнаго числа (2-го слагаемаго), которое надо прибавить къ данному числу (къ 1-му слагаемому), чтобы получить данную сумму. Однако эти два дѣйствія разсматриваются, какъ одно, называемое вычитаніемъ, вслѣдствіе того, что сложеніе обладаетъ перемѣстительнымъ свойствомъ, по которому сумма не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ. Если бы это свойство принадлежало также и возвышенію въ степень, то тогда и два указанныя выше обратныя дѣйствія составляли бы въ сущности одно. Но возвышеніе въ степень не обладаетъ свойствомъ перемѣстительности; напр., 2^3 не равно 3^2, 4^1 не равно 1^4, 10^2 не равно 2^{10}, и т. д. Вслѣдствіе этого нахожденіе основанія по даннымъ показателю и степени (извлеченіе корня) существенно отличается отъ нахожденія показателя по даннымъ основанію и степени (нахожденіе логариѳма).

Замѣтимъ, что послѣднее дѣйствіе въ элементарной алгебрѣ подробно не разсматривается; указываются главнымъ образомъ его практическія примѣненія.

298. Опредѣленіе логариѳма. Логариѳмомъ числа N по основанію a называется показатель степени, въ которую надо возвысить основаніе a, чтобы получить число N.

Такъ, если имѣемъ равенство $a^x=N$, то можно сказать, что x есть логариѳмъ числа N по основанію a; это можно выразить также такимъ обозначеніемъ:

$$x=\text{Log } N \quad \text{или} \quad x=\log N,$$

гдѣ знаки Log и log сокращенно обозначаютъ слово «логариѳмъ». Иногда для обозначенія того, по какому основанію берется логариѳмъ, внизу этихъ знаковъ ставятъ букву или число, означающее основаніе; напр., равенство $\text{Log}_a N=x$ означаетъ, что логариѳмъ числа N по основанію a есть x.

Примѣры.

1°. Возьмемъ за основаніе число 4; тогда:

$4^2=16$; поэтому $\text{Log } 16=2$;
$4^3=64$; » $\text{Log } 64=3$;
$4^1=4$; » $\text{Log } 4=1$;
$4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$; » $\text{Log } 2=\frac{1}{2}$.
$4^{-1}=\frac{1}{4}$; » $\text{Log } \frac{1}{4}=-1$;
$4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$. » $\text{Log } \frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

2°. Если за основаніе возьмемъ число 10, то:

$10^1=10$; поэтому $\text{Log } 10=1$;
$10^2=100$; » $\text{Log } 100=2$;
$10^3=1000$; » $\text{Log } 1000=3$;
$10^{-1}=\frac{1}{10}=0{,}1$: » $\text{Log } 0{,}1=-1$;
$10^{-2}=\frac{1}{10^2}=0{,}01$; » $\text{Log } 0{,}01=-2$ и т. п

3°. $\text{Log}_8 4096=4$, потому что $8^4=4096$.

4°. $\text{Log}_{64} 8=\frac{1}{2}$, потому что $64^{\frac{1}{2}}=\sqrt{64}=8$.

299 Нѣкоторыя свойства логариѳмовъ. Основаніе a логариѳмовъ мы будемъ всегда предполагать числомъ положительнымъ, не равнымъ 1[1]). Кромѣ того,

[1]) Если $a=1$, то выраженіе a^x не можетъ дать никакого числа, кромѣ 1.

условимся еще въ слѣдующемъ. Если x есть дробь, то степень a^x представляетъ собою корень, котораго показатель равенъ знаменателю дроби. Корни, какъ мы видѣли (§ 246), имѣютъ нѣсколько значеній, изъ которыхъ только одно—ариѳметическое. Условимся, говоря о логариѳмахъ, придавать степенямъ съ дробными показателями только ариѳметическое значеніе; при этомъ условіи степень a^x обладаетъ многими замѣчательными свойствами. Укажемъ тѣ изъ нихъ, которыми намъ придется пользоваться впослѣдствіи. При этомъ для простоты мы ограничимся тѣмъ случаемъ, когда основаніе a логариѳмовъ больше 1.

I. **Всякое положительное число имѣетъ логариѳмъ (соизмѣримый или несоизмѣримый) и притомъ единственный.**

Ограничимся разъясненіемъ, что для всякаго положительнаго числа N, если оно не имѣетъ точнаго соизмѣримаго логариѳма, можно найти два приближенныя соизмѣримыя значенія логариѳма съ какою угодно степенью точности $\frac{1}{n}$, т.-е. что можно найти двѣ такія ариѳметическія дроби $\frac{k}{n}$ и $\frac{k+1}{n}$, при которыхъ (если $a>1$) имѣетъ мѣсто двойное неравенство:

$$a^{\frac{k}{n}}<N<a^{\frac{k+1}{n}}.$$

Обозначивъ черезъ n какое-нибудь большое цѣлое число (напр., 1000), вообразимъ два неограниченныхъ ряда чиселъ:

$$a^0=1,\ a^{\frac{1}{n}},\ a^{\frac{2}{n}},\ a^{\frac{3}{n}},\ldots\ a^{\frac{k}{n}},\ a^{\frac{k+1}{n}},\ldots \qquad (1)$$

$$a^0=1,\ a^{-\frac{1}{n}},\ a^{-\frac{2}{n}},\ a^{-\frac{3}{n}},\ldots\ a^{-\frac{k}{n}},\ a^{-\frac{k+1}{n}},\ldots \qquad (2)$$

Каждый изъ этихъ рядовъ представляетъ собою безконечную геометрическую прогрессію; въ первой прогрессіи знаменатель есть $a^{\frac{1}{n}}$, во второй $a^{-\frac{1}{n}}$. Такъ какъ, согласно предположенію, $a>1$, то и $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{1}$, т.-е. $a^{\frac{1}{n}}>1$; поэтому прогрессія (1) есть

возрастающая. Но если $a^{\frac{1}{n}} > 1$, то $\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} < 1$, т.-е. $a^{-\frac{1}{n}} < 1$; значитъ, прогрессія (2) есть убывающая. По мѣрѣ удаленія отъ начала ряда (§ 296) члены прогрессіи (1), увеличиваясь, начиная отъ 1, могутъ сдѣлаться больше всякаго даннаго числа, а члены прогрессіи (2), уменьшаясь, начиная отъ 1, могутъ сдѣлаться меньше всякаго даннаго положительнаго числа. Изъ этого слѣдуетъ, что какъ бы велико или какъ бы мало ни было положительное число N, мы всегда встрѣтимъ въ нашихъ прогрессіяхъ (въ первой, если $N>1$, и во второй, если $N<1$), или членъ, который въ точности равняется числу N, или же два рядомъ стоящихъ члена, между которыми заключается N. Пусть окажется, что нѣкоторый членъ прогрессіи, напр., $a^{\frac{k}{n}}$, будетъ въ точности равенъ числу N; тогда дробь $\frac{k}{n}$ будетъ точнымъ логариѳмомъ числа N. Если же этого не случится, то какіе-нибудь два рядомъ стоящихъ члена, напр., $a^{\frac{k}{n}}$ и $a^{\frac{k+1}{n}}$ будутъ удовлетворять двойному неравенству:

$$a^{\frac{k}{n}} < N < a^{\frac{k+1}{n}}$$

(если $N<1$, то $a^{-\frac{k}{n}} > N > a^{-\frac{k+1}{n}}$); тогда числа $\frac{k}{n}$ и $\frac{k+1}{n}$ (или $-\frac{k}{n}$ и $-\frac{k+1}{n}$) будутъ приближенными соизмѣримыми значеніями $\text{Log}\,N$ съ точностью до $\frac{1}{n}$.

Конечно, вычисленіе членовъ указанныхъ прогрессіей съ цѣлью дѣйствительнаго нахожденія приближеннаго логариѳма даннаго числа N было бы крайне затруднительно; на практикѣ логариѳмы вычисляются несравненно болѣе простыми пріемами, указываемыми въ высшей математикѣ.

Если $a < 1$, то можно повторить все сказанное съ тою только разницею, что тогда прогрессія (1) будетъ убывающая, а прогрессія (2) возрастающая, и, слѣд., если $N > 1$, то подходящія къ N числа найдутся во второй прогрессіи, а если $N < 1$, то въ первой.

Вполнѣ аналогично тому, какъ это было сдѣлано нами раньше (§ 204) для показанія существованія несоизмѣримаго $\sqrt[m]{A}$, мы можемъ и здѣсь разъяснить (пользуясь для наглядности числовой прямой), что существуетъ нѣкоторое неизмѣримое число α, которое больше всякаго соизмѣримаго числа вида $\frac{k}{n}$ и меньше всякаго соизмѣримаго числа вида $\frac{k+1}{n}$, если $\frac{k}{n}$ и $\frac{k+1}{n}$ суть приближенныя соизмѣримыя значенія $Log\ N$ съ точностью до $\frac{1}{n}$. Тогда степень a^{α}, согласно опредѣленію несоизмѣримыхъ показателей (§ 284), представляетъ собою такое число, которое (если $a>1$) больше всякой степени вида $a^{\frac{k}{n}}$ и меньше всякой степени вида $a^{\frac{k+1}{n}}$; но такое число, согласно опредѣленію приближенныхъ значеній $Log\ N$, есть N; значитъ, $a^{\alpha}=N$, т.-е. $Log\ N=\alpha$.

II. Бо́льшому логариѳму соотвѣтствуетъ бо́льшее число.

Дѣйствительно, при $a>1$ прогрессія (1) есть возрастающая, а прогрессія (2) убывающая; изъ первой видно, что съ увеличеніемъ показателя при a члены возрастаютъ, а изъ второй—что съ уменьшеніемъ показателя [1]) члены убываютъ.

III. Логариѳмы чиселъ, бо́льшихъ единицы, положительны, а логариѳмы чиселъ, меньшихъ единицы, отрицательны.

Дѣйствительно, при $a>1$ число N надо искать въ прогрессіи (1), когда оно больше 1, и въ прогрессіи (2), когда оно меньше 1; но показатели въ первой прогрессіи всѣ положительные, а во второй всѣ отрицательные; значитъ, когда $N>1$, логариѳмъ этого числа долженъ быть положительный, а когда $N<1$, то логариѳмъ его окажется отрицательнымъ.

IV. При увеличеніи логариѳма отъ 0 до $+\infty$ числа возрастаютъ отъ 1 до $+\infty$, а при уменьшеніи логариѳма отъ 0 до $-\infty$ числа уменьшаются отъ 1 до 0.

Дѣйствительно, при $a>1$ изъ возрастающей прогрессіи (1) видно, что когда показатели (логариѳмы), оставаясь положительными, возрастаютъ отъ 0 безпредѣльно (отъ 0 до $+\infty$), числа, оставаясь положительными, возрастаютъ отъ 1 безпредѣльно (отъ 1 до $+\infty$); изъ убывающей прогрессіи (2) видно, что когда

[1]) Вспомнимъ, что отрицательныя числа считаются тѣмъ меньше, чѣмъ абсолютная величина ихъ больше.

показатели, оставаясь отрицательными, уменьшаются отъ 0 безпредѣльно (отъ 0 до $-\infty$), числа, оставаясь положительными, уменьшаются отъ 1 и могутъ быть сдѣланы менѣе всякаго даннаго положительнаго числа (уменьшаются отъ 1 до 0). Это свойство логариѳмовъ можно выразить такими условными равенствами:

$$a^{+\infty}=+\infty,\ \ a^{-\infty}=0,$$

или $$\operatorname{Log}(+\infty)=+\infty,\ \ \operatorname{Log}0=-\infty.$$

Замѣчаніе. При $a<1$ свойства II, III и IV будутъ обратны указаннымъ, а именно: бо̀льшему логариѳму соотвѣтствуетъ меньшее число;

логариѳмы чиселъ, бо̀льшихъ единицы, отрицательны, а меньшихъ единицы положительны;

при увеличеніи логариѳма отъ 0 до $+\infty$ числа убываютъ отъ 1 до 0, а при уменьшеніи логариѳма отъ 0 до $-\infty$ числа возрастаютъ отъ 1 до $+\infty$.

V. **Отрицательныя числа не имѣютъ логариѳмовъ.**

Въ самомъ дѣлѣ, изъ предыдущаго свойства логариѳмовъ видно, что при измѣненіи логариѳма отъ $-\infty$ до $+\infty$ числа измѣняются отъ 0 до $+\infty$; но между $-\infty$ и $+\infty$ заключаются, очевидно, всевозможные логариѳмы, тогда какъ между 0 и $+\infty$ содержатся числа только положительныя. Значитъ, нѣтъ такого логариѳма, которому соотвѣтствовало бы какое-нибудь отрицательное число (вспомнимъ, что основаніе a мы всегда предполагаемъ числомъ положительнымъ).

VI. **Логариѳмъ самого основанія равенъ 1, а логариѳмъ единицы есть 0.**

Это видно изъ равенствъ: $a^1=a$ и $a^0=1$,

откуда: $\operatorname{Log}_a a=1,\ \ \operatorname{Log}1=0$[1]).

300. Логариѳмъ произведенія, частнаго, степени и корня. Логариѳмы произведенія, частнаго, степени и корня находятся на основаніи слѣдующихъ 4-хъ теоремъ.

Теорема 1. Логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ сомножителей.

---

[1]) Мы приняли безъ доказательства, что $a^0=1$, основываясь на значеніи нулевого показателя, приданномъ ему условно въ статьѣ о дѣленіи одинаковыхъ степеней одного и того же числа (§ 68). Но выраженіе a^0 можно разсматривать въ другомъ значеніи, а именно, какъ предѣлъ, къ которому стремится степень a^x по мѣрѣ приближенія x къ 0. Въ теоріи предѣловъ доказывается, что этотъ предѣлъ равенъ 1.

Д о к. Пусть N, N_1, N_2, будутъ какія-нибудь числа, имѣющія соотвѣтственно логариѳмы: x, x_1, x_2 по одному и тому же основанію a. По опредѣленію логариѳма можемъ положить:

$$N=a^x, \quad N_1=a^{x_1}, \quad N_2=a^{x_2}.$$

Перемноживъ эти равенства, получимъ:

$$NN_1N_2=a^x a^{x_1} a^{x_2}=a^{x+x_1+x_2},$$

откуда: $\quad \text{Log}\,(NN_1N_2)=x+x_1+x_2;$

но $\quad x=\text{Log}\,N, \quad x_1=\text{Log}\,N_1, \quad x_2=\text{Log}\,N_2;$

поэтому $\quad \text{Log}\,(NN_1N_2)=\text{Log}\,N+\text{Log}\,N_1+\text{Log}\,N_2.$

Очевидно, это разсужденіе вполнѣ примѣнимо къ какому угодно числу сомножителей.

Теорема 2. Логариѳмъ дроби равенъ логариѳму числителя безъ логариѳма знаменателя (другими словами: логариѳмъ частнаго равенъ логариѳму дѣлимаго безъ логариѳма дѣлителя).

Д о к. Раздѣливъ почленно два равенства:

$$N=a^x, \quad N_1=a^{x_1}$$

получимъ: $$\frac{N}{N_1}=\frac{a^x}{a^{x_1}}=a^{x-x_1};$$

откуда: $$\text{Log}\,\frac{N}{N_1}=x-x_1=\text{Log}\,N-\text{Log}\,N_1.$$

Отсюда видно, что логариѳмъ правильной дроби, т.-е. такой, у которой числитель меньше знаменателя, есть число отрицательное.

Въ частности: $\text{Log}\,\frac{1}{N}=\text{Log}1-\text{Log}N=0-\text{Log}N=-\text{Log}N.$

Теорема 3. Логариѳмъ степени равенъ логариѳму возвышаемаго числа, умноженному на показателя степени.

Д о к. Если возвысимъ обѣ части равенства $N=a^x$ въ n-ую степень, то каково бы ни было число n (цѣлое или дробное, положительное или отрицательное), всегда:

$$N^n=(a^x)^n=a^{xn},$$

откуда: $$\text{Log}\,N^n=xn=(\text{Log}N)n.$$

Теорема 4. Логариѳмъ корня равенъ логариѳму подкоренного числа, дѣленному на показателя корня.

Эту теорему можно разсматривать, какъ слѣдствіе предыдущей. Дѣйствительно:

$$\text{Log}\sqrt[n]{N}=\text{Log}N^{\frac{1}{n}}=(\text{Log}N)\cdot\frac{1}{n}=\frac{\text{Log}N}{n}.$$

301. Логариѳмированіе алгебраическаго выраженія. Логариѳмировать данное алгебраическое выраженіе значитъ выразить логариѳмъ его посредствомъ логариѳмовъ отдѣльныхъ чиселъ, составляющихъ выраженіе. Это можно сдѣлать, пользуясь теоремами предыдущаго параграфа. Пусть, напр., требуется логариѳмировать слѣдующее выраженіе, которое обозначимъ одною буквой N:

$$N=\frac{3a^2\sqrt{b\sqrt[3]{x}}}{4m^3\sqrt[6]{y}}.$$

Замѣтивъ, что это выраженіе представляетъ собою дробь, пишемъ на основаніи теоремы 2-й:

$$\text{Log}N=\text{Log}\left(3a^2\sqrt{b\sqrt[3]{x}}\right)-\text{Log}\left(4m^3\sqrt[6]{y}\right).$$

Затѣмъ, примѣняя теорему 1-ю, получимъ:

$$\text{Log}N=\text{Log}3+\text{Log}a^2+\text{Log}\sqrt{b\sqrt[3]{x}}-\text{Log}4-\text{Log}m^3-\text{Log}\sqrt[6]{y},$$

и далѣе, по теоремѣ 3-ей и 4-й:

$$\text{Log}N=\text{Log}3+2\text{Log}a+\frac{1}{2}\text{Log}\left(b\sqrt[3]{x}\right)-\text{Log}4-3\,\text{Log}\,m-\frac{1}{6}\text{Log}\,y=$$

$$=\text{Log}\,3+2\,\text{Log}\,a+\frac{1}{2}\left(\text{Log}b+\frac{1}{3}\text{Log}x\right)-\text{Log}\,4-3\,\text{Log}\,m-\frac{1}{6}\text{Log}\,y=$$

$$=\text{Log}\,3+2\,\text{Log}\,a+\frac{1}{2}\,\text{Log}\,b+\frac{1}{6}\,\text{Log}\,x-\text{Log}\,4-3\,\text{Log}\,m-\frac{1}{6}\,\text{Log}\,y.$$

Замѣтимъ, что логариѳмировать можно только такія выраженія, которыя представляютъ собою произведеніе, частное, степень или корень, **но не сумму и не разность.** Поэтому, когда желаютъ логариѳмировать сумму или разность, то, если возможно, предварительно приводятъ ихъ къ виду, у д о б н о м у

для логариөмированія, напр., преобразуя ихъ въ произведеніе; такъ:

$$\mathrm{Log}(a^2-b^2)=\mathrm{Log}[(a+b)(a-b)]=\mathrm{Log}(a+b)+\mathrm{Log}(a-b);$$

$$\mathrm{Log}(a^2+2a+1-b^2)=\mathrm{Log}[(a+1)^2-b^2]=\mathrm{Log}[(a+1+b)(a+1-b)]=$$
$$=\mathrm{Log}(a+1+b)+\mathrm{Log}(a+1-b).$$

Умѣя логариөмировать алгебраическія выраженія, мы можемъ, обратно, **по данному результату логариөмированія найти выраженіе *x*,** которое при логариөмированіи дало этотъ результатъ; такъ, если

$$\mathrm{Log}\,x=\mathrm{Log}\,a+\mathrm{Log}\,b-3\,\mathrm{Log}\,c-\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,d,$$

то на основаніи тѣхъ же теоремъ не трудно найти, что искомое выраженіе будетъ

$$x=\frac{ab}{c^3\sqrt{d}}.$$

302. Система логариөмовъ. Системою логариөмовъ наз. совокупность логариөмовъ, вычисленныхъ по одному и тому же основанію, для всѣхъ чиселъ натуральнаго ряда, начиная съ 1 и кончая какимъ-нибудь большимъ числомъ. Употребительны двѣ системы: система натуральныхъ логариөмовъ и система десятичныхъ логариөмовъ. Въ первой, по нѣкоторымъ причинамъ (которыя уясняются только въ высшей математикѣ) за основаніе взято несоизмѣримое число 2,718281828... (обозначаемое обыкновенно буквою *e*); во второй за основаніе принято число 10. Логариөмы первой системы обладаютъ многими теоретическими достоинствами; логариөмы второй системы, называемые иначе обыкновенными, весьма удобны для практическихъ цѣлей [1]).

[1]) Натуральные логариөмы называются также Неперовыми по имени изобрѣтателя логариөмовъ, шотландскаго математика Непера (1550—1617), а десятичные логариөмы—Бригговыми, по имени профессора Бригга (современника и друга Непера), впервые составившаго таблицы этихъ логариөмовъ. Должно однако замѣтить, что Неперовы логариөмы не тождественны натуральнымъ, а только связаны съ ними нѣкоторымъ соотношеніемъ. Впервые натуральные логариөмы были введены послѣ смерти Непера, въ 1619 г., учителемъ математики въ Лондонѣ, Джономъ

303. Переходъ отъ одной системы логариөмовъ къ другой. Имѣя логариөмы чиселъ, вычисленные по одному какому-нибудь основанію a, мы легко можемъ найти логариөмы, вычисленные по новому основанію b. Пусть N какое-нибудь число и

$$\mathrm{Log}_a N = x,\ \mathrm{Log}_b N = y,$$

т.-е. $N = a^x$ и $N = b^y$,

откуда: $a^x = b^y$.

Логариөмируемъ это равенство по основанію a:

$$x = y\ \mathrm{Log}_a b,\ \text{откуда: } y = x.\frac{1}{\mathrm{Log}_a\ b}.$$

Такимъ образомъ, чтобы получить новый логариөмъ, достаточно прежній логариөмъ умножить на число, равное 1, дѣленной на логариөмъ новаго основанія, взятый по старому основанію; такое число наз модулемъ новой системы относительно старой. Для перехода отъ десятичныхъ логариөмовъ къ натуральнымъ модуль оказывается 2,3025851.., а для обратнаго перехода отъ натуральныхъ логариөмовъ къ десятичнымъ модуль есть 0,4342945..

304. Значеніе логариөмическихъ таблицъ. Имѣя таблицы, въ которыхъ помѣщены логариөмы цѣлыхъ чиселъ по одному и тому же основанію, отъ 1 до какого-нибудь большого числа, мы можемъ производить надъ числами дѣйствія умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня проще, чѣмъ обыкновеннымъ путемъ. Предположимъ, напримѣръ, что надо вычислить $\sqrt[3]{ABC}$, гдѣ A, B и C суть данныя цѣлыя числа Вмѣсто того, чтобы производить умноженіе и затѣмъ извлеченіе кубичнаго корня, мы можемъ, пользуясь таблицами логариөмовъ, найти сначала $\mathrm{Log}\sqrt[3]{ABC}$, основываясь на разложеніи:

$$\mathrm{Log}\sqrt[3]{ABC} = \frac{1}{3}(\mathrm{Log}A + \mathrm{Log}B + \mathrm{Log}C).$$

Найдя въ таблицахъ отдѣльно Log A, Log B и Log C, сложивъ

Спейделемъ. Въ слѣдующемъ, 1620 году, швейцарецъ Бюрги опубликовалъ свои таблицы, составленныя имъ независимо отъ Непера.

Замѣтимъ, что въ 1914 году исполнилось трехсотлѣтіе изобрѣтенія логариөмовъ, такъ какъ таблицы Непера были имъ опубликованы въ 1614 году (подъ названіемъ: „Mirifici logarithmorum canonis descriptio“).

ихъ и раздѣливъ сумму на 3, получимъ Log $\sqrt{ABC}$. По этому логариѳму, пользуясь тѣми же таблицами, можемъ найти соотвѣтствующее число, точное или приближенное.

Такимъ образомъ, руководствуясь изложенными выше теоремами о логариѳмѣ произведенія, частнаго, степени и корня, мы можемъ, помощью логариѳмическихъ таблицъ, свести умноженіе на сложеніе, дѣленіе на вычитаніе, возвышеніе въ степень на умноженіе и извлеченіе корня на дѣленіе.

На практикѣ употребительны таблицы десятичныхъ логариѳмовъ; мы ихъ будемъ обозначать знакомъ Log, не проставляя внизу этого знака основаніе 10: оно будетъ подразумѣваться. Чтобы понять устройство и употребленіе этихъ таблицъ, предварительно разсмотримъ нѣкоторыя свойства десятичныхъ логариѳмовъ.

ГЛАВА IV.

Свойства десятичныхъ логариѳмовъ.

305. Эти свойства мы выразимъ слѣдующими 5-ю теоремами.

Теорема 1. Логариѳмъ цѣлаго числа, изображаемаго единицею съ однимъ или съ нѣсколькими нулями, есть цѣлое число, заключающее столько единицъ, сколько нулей въ числѣ.

Док. Такъ какъ $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$, $10^4=10000$...

и вообще $$10^m=1\overbrace{0\ldots00}^{m \text{ нулей}},$$

то Log 10=1, Log 100=2, Log 1000=3, Log 10000=4

и вообще $$\text{Log}\ 1\overbrace{00\ldots00}^{m \text{ нулей}}=m.$$

Теорема 2. Логариѳмъ цѣлаго числа, не изображаемаго единицею съ нулями, не можетъ быть выраженъ точно ни цѣлымъ числомъ, ни дробнымъ.

Док. Пусть N есть такое цѣлое число, которое не выражается 1-ою съ нулями, и допустимъ, что Log N въ точности равняется

какому-нибудь соизмѣримому числу, напр., дроби $\frac{p}{q}$, гдѣ p и q цѣлыя числа. Въ такомъ случаѣ

$$10^{\frac{p}{q}}=N;\ \text{слѣд.,}\ \left(10^{\frac{p}{q}}\right)^q=N^q,\ \text{т.-е.}\ 10^p=N^q.$$

Но такое равенство невозможно, потому что число 10^p разлагается только на множителей 2 и 5, повторенныхъ p разъ, а число N^q не можетъ дать такого разложенія (потому что N не есть 1 съ нулями); поэтому невозможно допущеніе, что Log N выражается точно.

Характеристика и мантисса. Логариѳмъ цѣлаго числа, которое не есть 1 съ нулями, при помощи соизмѣримыхъ чиселъ можетъ быть выраженъ только приближенно. Обыкновенно выражаютъ его въ видѣ десятичной дроби съ 5 или 7 десятичными знаками. Цѣлое число логариѳма наз. его характеристикой, а дробная десятичная часть—мантиссой.

Теорема 3. Характеристика логариѳма цѣлаго числа или цѣлаго числа съ дробью содержитъ столько единицъ, сколько въ цѣлой части числа находится цыфръ безъ одной.

Док. Пусть, напр., имѣемъ число 5683,7.

Такъ какъ $10000>5683{,}7>1000$,

то $\text{Log}\ 10000>\text{Log}\ 5683{,}7>\text{Log}\ 1000$,

т.-е. $4>\text{Log}\ 5683{,}7>3$;

значитъ: Log 5683,7 = 3 + полож. правильн. дробь,

т.-е. характеристика Log 5683,7 = 3.

Пусть вообще число N въ цѣлой своей части содержитъ m цыфръ; тогда

$$10^m>N>10^{m-1},$$

слѣд., $\text{Log}\ 10^m>\text{Log}\ N>\text{Log}\ 10^{m-1}$;

откуда: $m>\text{Log}\ N>m-1$;

значитъ: Log $N=(m-1)$ + полож. прав. дробь,

т.-е. характ. Log $N=m-1$.

Примѣры. 1) характ. Log 7,3 = 0; 2) характер. Log $28\frac{3}{4}=1$; 3) характ. Log 4569372 = 6, и т. п

306. Преобразованіе отрицательнаго логариѳма. Прежде, чѣмъ излагать теоремы 4-ю и 5-ю, сдѣлаемъ слѣдующее разъясненіе. Мы видѣли (§ 300, теор. 2), что логариѳмъ правильной дроби есть число отрицательное; значитъ, онъ состоитъ изъ отрицательной характеристики и отрицательной мантиссы (напр., —2,08734). **Отрицательный логариѳмъ всегда можно преобразовать такъ, что у него мантисса будетъ положительной, а отрицательной останется только одна характеристика.** Для этого достаточно прибавить къ его мантиссѣ положительную единицу, а къ характеристикѣ отрицательную (отъ чего, конечно, величина логариѳма не измѣнится). Если, напр., мы имѣемъ отрицательный логариѳмъ —2,08734, то можно написать:

$$-2{,}08734=-2-1+1-0{,}08734=-(2+1)+(1-0{,}08734)=$$
$$=-3+0{,}91266$$

или сокращенно: $-2{,}08734=\overset{-1+1}{-2{,}08734}=3{,}91266$ [1]).

Для указанія того, что у логариѳма отрицательна только одна характеристика, ставятъ надъ ней минусъ; такъ, вмѣсто того, чтобы написать: $-3+0{,}91266$, пишутъ короче: 3,91266.

Очевидно, что при такомъ преобразованіи абсолютная величина характеристики увеличивается на 1, а вмѣсто данной мантиссы берется ея дополненіе до 1 (т.-е. такое число, которое получается отъ вычитанія данной мантиссы изъ 1). Это дополненіе получится, если послѣднюю значащую цыфру данной мантиссы вычтемъ изъ 10, а всѣ остальныя изъ 9. Замѣтивъ это, можемъ прямо писать:

$$-2{,}56248=3{,}43752,\quad -0{,}00830=1{,}99170,\ \text{и т. п.}$$

На практикѣ логариѳмы чиселъ, меньшихъ 1, всегда представляютъ такъ, чтобы у нихъ мантиссы были положительны.

Обратно, **всякій логариѳмъ съ отрицательной характеристикой и положительной мантиссой можно превратить въ отри-**

---

[1]) Такое число произносятъ такъ: 3 съ минусомъ, 91266 стотысячныхъ.

цательный. Для этого достаточно къ положительной мантиссѣ приложить отрицательную единицу, а къ отрицательной характеристикѣ положительную; такъ, очевидно, можно написать:

$$7,83026=-7+0,83026=-7+1-1+0,83026=(-7+1)-$$
$$-(1-0,83026)=-6-0,16974=-6,16974$$
$$+1-1$$

или сокращенно: $7,83026=7,83026=-6,16974$ [1]).

Очевидно, что при такомъ преобразованіи абсолютная величина характеристики уменьшается на 1, а вмѣсто данной мантиссы берется ея дополненіе 1. Замѣтивъ это, можемъ прямо писать:

$$3,57401=-2,42599;\quad 1,70830=-0,29170;\ \text{и т. п.}$$

307. Теорема 4. Отъ умноженія или дѣленія числа на 10^n (n цѣлое число) положительная мантисса логариѳма остается безъ измѣненія, а характеристика увеличивается или уменьшается на n единицъ.

Док. Такъ какъ

$$\operatorname{Log}(N\,.\,10^n)=\operatorname{Log}N+\operatorname{Log}10^n,\quad \operatorname{Log}\frac{N}{10^n}=\operatorname{Log}N-\operatorname{Log}10^n$$

и

$$\operatorname{Log}10^n=n,$$

то

$$\operatorname{Log}(N\,.\,10^n)=\operatorname{Log}N+n,\quad \operatorname{Log}\frac{N}{10^n}=\operatorname{Log}N-n.$$

Такъ какъ n есть цѣлое число, то прибавленіе n не измѣняетъ мантиссы, а только увеличиваетъ характеристику на n единицъ; съ другой стороны, если условимся въ томъ случаѣ, когда нужно

---

[1]) **Замѣчаніе для памяти.** Для выполненія преобразованій, указанныхъ въ двухъ послѣднихъ параграфахъ, приходится прибавлять $+1$ и -1 одно изъ этихъ чиселъ къ характеристикѣ, а другое къ мантиссѣ. Чтобы не ошибиться, къ чему прибавить $+1$ и къ чему -1, полезно всегда обращать вниманіе на мантиссу заданнаго логариѳма и разсуждать такъ: пусть въ заданномъ логариѳмѣ мантисса отрицательна, а надо ее сдѣлать положительной; тогда къ ней, конечно, слѣдуетъ прибавить $+1$, а потому къ характеристикѣ надо прибавить -1; пусть въ заданномъ логариѳмѣ мантисса будетъ положительна, а надо ее сдѣлать отрицательной (весь логариѳмъ долженъ быть отрицательный); тогда къ ней слѣдуетъ добавить -1, а слѣдовательно, къ характеристикѣ $+1$.

отъ логариѳма отнять цѣлое число, отнимать его отъ характеристики, оставляя мантиссу всегда положительной, то вычитаніе n также не измѣняетъ мантиссы, а только уменьшаетъ характеристику на n единицъ.

Слѣдствія. 1) **Положительная мантисса логариѳма десятичнаго числа не измѣняется отъ перенесенія въ числѣ запятой,** потому что перенесеніе запятой *равносильно* умноженію или дѣленію на цѣлую степень 10-ти. Такимъ образомъ, логариѳмы чиселъ:

$$0{,}00423,\quad 0{,}0423,\quad 0{,}423,\quad 4{,}23,\quad 42{,}3,\quad 423$$

отличаются только характеристиками, но не мантиссами, при условіи, что мантиссы положительны.

2) **Мантиссы чиселъ, имѣющихъ одну и ту же значащую часть, но отличающихся только нулями на концѣ, одинаковы;** такъ, логариѳмы чиселъ: 23, 230, 2300, 23000 отличаются *только* характеристиками.

Теорема 5. 1) **Когда десятичная дробь выражается 1-ею съ предшествующими нулями** (0,1; 0,01; 0,001; и т. д.), **то логариѳмъ ея равенъ цѣлому отрицательному числу, содержащему столько отрицательныхъ единицъ, сколько есть нулей въ изображеніи десятичной дроби, считая въ томъ числѣ и 0 цѣлыхъ.**

2) **Логариѳмъ всякой другой правильной десятичной дроби, если его мантисса сдѣлана положительной, содержитъ въ характеристикѣ столько отрицательныхъ единицъ, сколько есть нулей въ изображеніи десятичной дроби передъ первой значащей цыфрой, считая въ томъ числѣ и 0 цѣлыхъ.**

Доказательство. 1) Такъ какъ

$$0{,}1=\frac{1}{10}=10^{-1},\ 0{,}01=\frac{1}{100}=10^{-2},\ 0{,}001=\frac{1}{1000}=10^{-3},\ldots\ldots$$

и вообще $$\overbrace{0{,}00\ldots0}^{m\text{ нулей}}1,=\frac{1}{1\underbrace{00\ldots0}_{m\text{ нулей}}}=\frac{1}{10^m}=10^{-m},$$

то $$\operatorname{Log}0{,}1=-1,\quad \operatorname{Log}0{,}01=-2,\quad \operatorname{Log}0.001=-3,\ldots$$

и вообще $\mathrm{Log}\,\overbrace{0{,}00\ldots01}^{m\text{ нулей}}=-m.$

2) Пусть имѣемъ десятичную дробь $A=\overbrace{0{,}00\ldots0}^{m\text{ нулей}}\alpha\beta\ldots$, у которой передъ первой значащей цыфрой стоятъ m нулей, считая въ томъ числѣ и 0 цѣлыхъ ($\alpha, \beta\ldots$ суть какія-нибудь значащія цыфры). Тогда очевидно, что

$$\overbrace{0{,}00\ldots01}^{m-1\text{ нулей}}>\overbrace{0{,}00\ldots}^{m\text{ нулей}}\alpha\beta>\overbrace{0{,}00\ldots01}^{m\text{ нулей}}.$$

Слѣд.: $\mathrm{Log}\,\overbrace{0{,}00\ldots01}^{m-1\text{ нулей}}>\mathrm{Log}\,A>\mathrm{Log}\,\overbrace{0{,}00\ldots01}^{m\text{ нулей}}.$

Откуда: $-(m-1)>\mathrm{Log}A>-m;$

значитъ: $\mathrm{Log}A=-m+$полож. правильн. дробь,

т-е. характ. $\mathrm{Log}A=-m$ (при полож. мантиссѣ).

Примѣры. 1) характ. Log.0,25=—1; 2) характ. Log 0,0000487=—5; и т. п.

308. Замѣчаніе. Изъ изложенныхъ теоремъ слѣдуетъ, что *характеристику логариѳма цѣлаго числа и десятичной дроби мы можемъ находить безъ помощи таблицъ*; вслѣдствіе этого въ логариѳмическихъ таблицахъ помѣщаются только однѣ мантиссы; *кромѣ того*, такъ какъ нахожденіе логариѳмовъ дробей сводится къ нахожденію логариѳмовъ цѣлыхъ чиселъ (логариѳмъ дроби=логариѳму числителя безъ логариѳма знаменателя), то въ таблицахъ помѣщаются мантиссы логариѳмовъ только цѣлыхъ чиселъ.

ГЛАВА V.

Устройство и употребленіе таблицъ.

309. Устройство таблицъ. Опишемъ вкратцѣ устройство и употребленіе пятизначныхъ таблицъ, изданныхъ *Пржевальскимъ*. Эти таблицы содержатъ мантиссы логариѳмовъ всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до 10009, вычисленныя съ 5 десятичными знаками, при чемъ послѣдній изъ этихъ знаковъ

увеличенъ на 1 во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда 6-й десятичный знакъ долженъ бы оказаться 5 или болѣе 5; слѣд., **пятизначныя таблицы даютъ приближенныя мантиссы съ точностью до $\frac{1}{2}$ стотысячной доли** (съ недостаткомъ или съ избыткомъ [1]).

На первой страницѣ помѣщены числа отъ 1 до 100 въ столбцахъ съ надписью N (numerus — число). Противъ каждаго числа, въ столбцахъ съ надписью Log., находятся мантиссы, вычисленныя съ 5 десятичными знаками.

Слѣдующія страницы устроены иначе. Въ первомъ столбцѣ, подъ рубрикою N, помѣщены числа отъ 100 до 1000, а рядомъ съ ними въ столбцѣ, надъ которымъ стоитъ цыфра 0, находятся соотвѣтствующія мантиссы: первыя двѣ цыфры мантиссъ, общія нѣсколькимъ логариѳмамъ, написаны только разъ, а остальныя три цыфры помѣщены рядомъ съ числомъ, находящимся въ столбцѣ N. Эти же мантиссы принадлежатъ числамъ, которыя получатся, если къ числамъ, стоящимъ подъ рубрикою N, приписать справа 0. Такъ, мантисса логар. 5690 будетъ та же, что и у числа 569, т.-е. 75511 (стран. 17). Слѣдующіе столбцы съ надписями надъ ними 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, служатъ для нахожденія логариѳмовъ четырехзначныхъ чиселъ (и пятизначныхъ до 10009), оканчивающихся на эти значащія цыфры, при чемъ первыя три цыфры каждаго изъ этихъ чиселъ помѣщены въ столбцѣ N, а послѣднюю надо искать наверху, въ ряду цыфръ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, и 9. Напр., чтобы найти мантиссу логариѳма числа 5673, надо отыскать въ столбцѣ N число 567 (стран. 17) и наверху цыфру 3; въ пересѣченіи горизонтальной линіи, идущей отъ 567, съ вертикальной линіей, опущенной отъ цыфры 3, находятся три послѣднія цыфры мантиссы (381), первыя же

[1]) Въ нѣкотрыхъ таблицахъ (напр. „Чихановъ—Таблицы пятизначныхъ логариѳмовъ") мантиссы, взятыя съ избыткомъ, отмѣчены черточкой, поставленной подъ послѣдней цыфрой мантиссы

Для рѣшенія большинства практич скихъ задачъ вполнѣ достаточно пользоватся четырехзначными таблицами (напр., таблицами, составленными В. И. Лорченко и Н. В. Оглоблинымъ, Кіевъ, 1910 г.). Въ случаяхъ, требующихъ очень большой точности, пользуются иногда семизначными таблицами (напр., Логариѳмически-тригонометрическое руководство барона Георга Вега). Способъ пользованія такими таблицамц объясненъ во введеніи къ таблицамъ.

ся цыфры надо искать въ столбцѣ подъ цыфрою 0, на одной горизонтальной линіи, или выше; такъ, для числа 5673 первыя двѣ цыфры мантиссы будутъ 75, а послѣднія 381, такъ что всѣ 5 знаковъ будутъ 75381. Если передъ послѣдними тремя цыфрами мантиссы стоитъ въ таблицахъ звѣздочка, то это значитъ, что первыя двѣ цыфры надо брать ниже горизонтальной линіи, на которой расположены послѣднія цыфры мантиссы. Такъ, для числа 5758 мантисса будетъ 76027 (стран. 17).

310. По данному десятичному числу найти логариѳмъ. Характеристику логариѳма цѣлаго числа или десятичной дроби мы выставляемъ непосредственно, руководствуясь указанными нами свойствами десятичныхъ логариѳмовъ.

При нахожденіи мантиссы мы примемъ во вниманіе, что положеніе запятой въ десятичномъ числѣ, а также и число нулей на концѣ цѣлаго числа, не оказываютъ вліянія на мантиссу (§ 307, слѣдствія); поэтому мы можемъ отбросить запятую въ десятичной дроби и въ цѣломъ числѣ зачеркнуть всѣ нули, если они есть на концѣ числа. Тогда могутъ представиться слѣдующіе 2 случая.

1°. *Цѣлое число не превосходитъ 10009.* Тогда мантисса находится прямо изъ таблицъ. Приведемъ примѣры:

$$\text{Log } 82 = 1{,}91381;\quad \text{Log } 0{,}082 = \bar{2}{,}91381 \text{ (стран. 1)};$$
$$\text{Log } 2560 = 3{,}40824;\quad \text{Log } 256000 = 5{,}40824 \text{ (стран. 7)};$$
$$\text{Log } 7416 = 3{,}87017;\quad \text{Log } 74{,}16 = 1{,}87017 \text{ (стран. 23)}.$$

Въ этомъ случаѣ найденная мантисса будетъ точна до $\frac{1}{2}$ стотысячной доли.

2°. *Цѣлое число превосходитъ 10009.* Тогда мантисса находится на основаніи слѣдующей истины, которую мы примемъ безъ доказательства:

если числа болѣе 1000, и разности между ними не превосходятъ 1, то безъ чувствительной ошибки можно принять, что раз-

ности между числами пропорціональны разностямъ между ихъ логариѳмами[1]).

Принявъ это, положимъ, что требуется найти логариѳмъ числа 74,2354, которое, по отбрасываніи запятой, даетъ цѣлое число, первосходящее 10009.

Перенесемъ въ немъ запятую на столько знаковъ, чтобы въ цѣлой части образовалось наибольшее число, какое только можно найти въ таблицахъ; въ нашемъ примѣрѣ для этого достаточно перенести запятую вправо на два знака. Теперь будемъ искать

$$\text{Log } 7423{,}54 = ?$$

Выписываемъ изъ таблицъ (стр. 23) мантиссу логариѳма числа 7423 и находимъ такъ называемую табличную разность, т.-е. разность между взятой мантиссой и слѣдующей бо́льшей (соотвѣтствующей числу 7424). Для этого вычитаемъ (въ умѣ) изъ 064 (изъ трехъ послѣднихъ цыфръ мантиссы числа 7424) число 058 (три послѣднія цыфры мантиссы числа 7423); находимъ 6 (стотысячн.). Значитъ:

$$\text{Log } 7423 = 3{,}87058;$$
$$\text{Log } 7424 = 3{,}87058 + 6 \text{ (стотыс.)}.$$

Обозначимъ буквою Δ то неизвѣстное число стотысячныхъ,

[1]) Справедливость этого предложенія до нѣкоторой степени можетъ быть провѣрена просмотромъ самихъ логариѳмическихъ таблицъ. Въ этихъ таблицахъ, начиная со 2-й страницы помѣщены четырехзначныя цѣлыя числа въ ихъ натуральномъ порядкѣ, т.-е. числа эти возрастаютъ на 1. Если бы разности между числами были строго пропорціональны разностямъ между ихъ логариѳмами, то, при возрастаніи чиселъ на 1, ихъ логариѳмы возрастали бы на одно и то же число. Просматривая таблицы, замѣчаемъ, что разности между сосѣдними мантиссами хотя и не остаются одинаковыми на протяженіи всѣхъ таблицъ, однако измѣняются очень медленно; напр., для всѣхъ чиселъ, помѣщенныхъ на страницахъ 19, 20, 21 и 22 таблицъ, разности между сосѣдними мантиссами оказываются только или 6 или 7 стотысячныхъ. Если же эти разности почти постоянны для чиселъ, отличающихся на 1 (и превосходящихъ 1000), то онѣ должны быть еще болѣе постоянными для чиселъ, отличающихся менѣе, чѣмъ на 1 (и превосходящихъ 1000).

которое надо приложить къ Log 7423, чтобы получить Log 7423,54; тогда можемъ написать:

$$\text{Log } 7423{,}54 = 3{,}87058 + \Delta \text{ (стотыс.)}.$$

Изъ этихъ равенствъ мы видимъ, что если число 7423 увеличится на 1, то логариѳмъ его увеличится на 6 (стотыс.), а если то же число увеличится на 0,54, то логариѳмъ его увеличится на Δ (стотыс.).

На основаніи указанной выше пропорціональности можемъ написать пропорцію:

$$\Delta : 6 = 0{,}54 : 1;\quad \text{откуда: } \Delta = 6 \,.\, 0{,}54 = 3{,}24 \text{ (стотыс.)}.$$

Приложивъ къ 3,87058 найденную разность, мы найдемъ Log 7423,54. Такъ какъ мы ограничиваемся 5-ю десятичными знаками мантиссы, то въ числѣ 3,24 можемъ отбросить цыфры 2 и 4, представляющія собою милліонныя и десятимилліонныя доли; при этомъ, для уменьшенія ошибки, будемъ всегда руководствоваться слѣдующимъ правиломъ: если отбрасываемая часть больше (или равна) 5 милліонныхъ, то, отбрасывая ее, мы увеличимъ на 1 оставшееся число стотысячныхъ; въ противномъ же случаѣ оставимъ число стотысячныхъ безъ измѣненія. Такимъ образомъ:

$$\text{Log } 7423{,}54 = 3{,}87058 + 3 \text{ стотыс.} = 3{,}87061.$$

Такъ какъ Log 74,2354 долженъ имѣть ту же самую мантиссу, а характеристика его должна быть 1, то

$$\text{Log } 74{,}2354 = 1{,}87061.$$

Правило. Чтобы найти мантиссу даннаго цѣлаго числа, имѣющаго 5 или болѣе цыфръ, выписываютъ изъ таблицъ мантиссу числа, составленнаго первыми 4 цыфрами даннаго числа, и къ ней прибавляютъ произведеніе табличной разности на десятичную дробь, образованную остальными цыфрами даннаго числа, при чемъ вмѣсто точной величины этого произведенія берутъ ближайшее къ нему цѣлое число.

Для болѣе строгаго вывода этого правила повторимъ въ общемъ видѣ тѣ разсужденія, посредствомъ которыхъ выше мы нашли

Log 74,2354.

Переносемъ въ данномъ десятичномъ числѣ запятую такъ, чтобы она стояла послѣ 4-й цыфры слѣва; тогда число представится въ видѣ суммы $n+h$, въ которой n есть четырехзначное цѣлое число, а h десятичная дробь, меньшая 1. Найдемъ въ таблицахъ мантиссу M (стотыс.), соотвѣтствующую цѣлому числу n, и опредѣлимъ (вычитаніемъ въ умѣ) табличную разность d между взятой мантиссой M и слѣдующей большей мантиссой (соотвѣтствующей числу $n+1$). Тогда мы можемъ написать:

$$\text{Log } n = 3 + \frac{M}{10^5};$$

$$\text{Log } (n+1) = 3 + \frac{M+d}{10^5}.$$

Обозначимъ буквою Δ неизвѣстное число стотысячныхъ, которое надо приложить къ *Log n*, чтобы получить *Log* $(n+h)$; тогда:

$$\text{Log } (n+h) = 3 + \frac{M+\Delta}{10^5}.$$

Изъ написанныхъ 3-хъ равенствъ заключаемъ, что если число n увеличится на 1, то логариѳмъ его увеличится на d (стотыс.), а если то же число n увеличится на h, то логариѳмъ его увеличится на Δ (стотыс.). На основаніи нашего допущенія пропорціональности мы можемъ написать:

$$\Delta : d = h : 1; \text{ откуда: } \Delta = dh \text{ (стотыс.)}.$$

Значитъ: $$\text{Log } (n+h) = 3 + \frac{M+dh}{10^5} \qquad [1]$$

Произведеніе dh рѣдко есть цѣлое число; большею частью оно есть цѣлое число съ дробью. Въ этомъ случаѣ, довольствуясь 5-ю десятичными знаками мантиссы, мы вмѣсто точной величины произведенія dh условимся брать ближайшее къ нему цѣлое число (хотя бы оно было и больше dh). Обозначивъ это ближайшее цѣлое число буквою δ, мы можемъ приближенный логариѳмъ выразить такъ:

$$\text{Log } (n+h) = 3 + \frac{M+\delta}{10^5} \qquad [2]$$

Остается теперь, если нужно, замѣнить характеристику 3 другимъ числомъ сообразно теоремамъ о характеристикѣ (3-я теор. § 305 и 5-я теор. § 307).

311. Употребленіе пропорціональныхъ частей при нахожденіи логариѳма. Произведеніе табличной разности на десятичную дробь, о которомъ говорится въ пре-

дыдущемъ правилѣ, можно производить весьма просто при помощи такъ называемыхъ **partes proportionales** (пропорціональныхъ частей), помѣщенныхъ въ таблицахъ въ крайнемъ правомъ столбцѣ съ надписью P. P. Такъ, на стран. 23-й мы находимъ въ этомъ столбцѣ двѣ колонки, надъ которыми стоятъ цыфры: надъ одной 6, надъ другой 5. Эти цыфры означаютъ табличныя разности (въ стотысячныхъ доляхъ) между двумя рядомъ стоящими мантиссами, помѣщенными на этой страницѣ. Подъ каждой изъ этихъ табличныхъ разностей выписаны произведенія ея на 0,1, на 0,2, на 0,3..., наконецъ, на 0,9. Такъ, найдя въ колонкѣ, надъ которою стоитъ разность 6, съ лѣвой стороны цыфру 8, означающую 0,8, и взявъ справа отъ этой цыфры число 4,8, мы получимъ произведеніе 6 . 0,8.

Чтобы при помощи этихъ P.P умножить, положимъ, 6 на 0,54, достаточно найти въ колонкѣ произведеніе 6 . 0,5 и потомъ произведеніе 6 . 0,04. Первое находимъ прямо: оно равно 3,0; чтобы получить второе, примемъ во вниманіе, что произведеніе 6 . 0,04 въ 10 разъ меньше произведенія 6 . 0,4; это послѣднее находимъ въ P. P.; оно равно 2,4; слѣд., 6 . 0,04=0,24. Сложивъ 3,0 и 0,24, найдемъ полное произведеніе 6 . 0,54.

Вычисленіе всего удобнѣе располагать такъ:

Число.	Логариѳмъ.	
7423.	3,87058	$d=6$
5	30	
4	24	
7423 54	3,87061;	
Log 74,2354	=1,87061.	

Подъ числомъ 7423 мы подписали цыфру 5, отступивъ на одно мѣсто вправо, потому что эта цыфра означаетъ 0,5; точно такъ же цыфра 4 отодвинута еще на одно мѣсто вправо, такъ какъ она означаетъ 0,04. Подъ мантиссой 87058 подписаны числа 30 и 24, при чемъ каждое изъ нихъ отодвинуто на одно мѣсто вправо, такъ какъ 30 означаетъ 3,0 стотысячныхъ, а 24 означаетъ 0,24 стотысячныхъ. Направо помѣщена табличная разность 6 (обыкновенно она обозначается буквою *d*).

Приведемъ еще примѣръ: найти Log 28739,06.

Число.		Логариѳмъ.	
2873.		3,45834	d=15
9		135	
0		0	
6		90	
2873,906		3,45848;	
Log 28739,06		4,45848.	

Складывая 4 и 3 (стотыс.), мы увеличили сумму на 1, такъ какъ первая изъ отбрасываемыхъ цыфръ (милліонныхъ) есть 5.

311,а. Предѣлъ погрѣшности приближеннаго логариѳма. Сначала мы опредѣлимъ погрѣшность приближеннаго логариѳма [1] (§ 310), въ которомъ произведеніе dh берется точнымъ, а затѣмъ найдемъ погрѣшность приближенія [2], въ которомъ вмѣсто точной величины dh взято ближайшее цѣлое число; при этомъ мы предположимъ, что число $n+h$, логариѳмъ котораго требуется найти, есть число точное.

Погрѣшность приближенія [1] обусловливается 2-мя причинами:

1) допущенная нами истина о пропорціональности разностей между числами разностямъ соотвѣтствующихъ логариѳмовъ не вполнѣ вѣрна;

2) въ таблицахъ помѣщены не точныя мантиссы, а приближенныя (съ точностью до $1/2$ стотысячной доли).

Погрѣшность, происходящая отъ 1-й причины, оказывается, по изслѣдованіи ея *), настолько ничтожной, что она вообще не вліяетъ на 5-й десятичный знакъ мантиссы; поэтому въ дальнѣйшемъ мы на нее не будемъ обращать вниманія. Чтобы судить о величинѣ погрѣшности, происходящей отъ 2-й причины, мы составимъ выраженіе для точнаго логариѳма числа $n+h$, а затѣмъ сравнимъ его съ приближеннымъ логариѳмомъ [1].

Обозначимъ буквами α и α' положительныя или отрицательныя числа стотысячныхъ долей, которыя надо приложить: первое—къ табличной мантиссѣ $Log\ n$, а второе—къ табличной мантиссѣ $Log\,(n+1)$, чтобы получить точныя мантиссы этихъ чиселъ. Тогда мы можемъ написать слѣдующія точныя равенства:

$$\text{Log}\, n = 3 + \frac{M+\alpha}{10^5}; \qquad \text{Log}\,(n+1) = 3 + \frac{M+d+\alpha'}{10^5};$$

гдѣ абсолютныя величины чиселъ α и α' должны быть меньше $1/2$. Изъ этихъ равенствъ видно, что когда число n увеличивается на 1, тогда точный логариѳмъ его увеличивается на $d+\alpha'-\alpha$ (стотыс.); значитъ, когда

*) См. въ концѣ книги „Приложеніе 2“ (стр. 447).

число n увеличивается на h, точный логариѳмъ его долженъ увеличиться на такое число Δ (стотыс.), которое удовлетворяетъ пропорціи:

$$\Delta . (d+\alpha'-\alpha)=h:1; \quad \text{откуда } \Delta=(d+\alpha'-\alpha)\,h.$$

Слѣд., точная величина логариѳма числа $n+h$ будетъ:

$$\text{Log }(n+h)=3+\frac{M+\alpha}{10^5}+\frac{(d+\alpha'-\alpha)h}{10^5}.$$

Приведя дроби къ одному знаменателю и сдѣлавъ перестановку членовъ въ числителѣ, мы можемъ найденное выраженіе представить такъ:

$$\text{Log }(n+h)=3+\frac{M+dh}{10^5}+\frac{\alpha+h\alpha'-h\alpha}{10^5}.$$

Сравнивая это выраженіе съ приближеніемъ [1] параграфа 310-го, находимъ, что погрѣшность этого приближенія равна:

$$\frac{\alpha+h\alpha'-h\alpha}{10^5}=\frac{\alpha(1-h)+h\alpha'}{10^5}.$$

Такъ какъ абс. величины чиселъ α и α' меньше $^1/_2$, то эта погрѣшность, очевидно, меньше дроби:

$$\frac{\frac{1}{2}(1-h)+h\,.\,\frac{1}{2}}{10^5}=\frac{\frac{1}{2}\,(1-h+h)}{10^5}=\frac{\frac{1}{2}}{10^5}=\frac{1}{2} \text{ стотысячной.}$$

Таковъ предѣлъ погрѣшности приближеннаго логариѳма [1]. Переходя теперь отъ этого приближенія къ приближенному логариѳму [2], т.-е., замѣняя точную величину произведенія dh ближайшимъ къ нему цѣлымъ числомъ, мы дѣлаемъ еще ошибку, но меньшую $^1/_2$. Слѣд., предѣлъ погрѣшности приближеннаго логариѳма [2] будетъ:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \text{ (стотысяч.)}.$$

Такимъ образомъ, **если логариѳмъ берется прямо изъ таблицъ, то предѣлъ его погрѣшности есть $^1/_2$ стотысячной доли** (§ 310, 1°); **если же логариѳмъ получается посредствомъ указаннаго нами вычисленія, то предѣлъ погрѣшности оказывается больше, именно 1 стотысячная доля.**

311,b. Случай, когда данное число неточное. Въ предыдущемъ параграфѣ мы предполагали, что сумма $n+h$ есть точное данное число. Но часто бываетъ, что требуется отыскать логариѳмъ числа, заданнаго только приближенно (напр, требуется найти *Log* π, принимая за π приближенное его значеніе 3,142). Въ этомъ случаѣ къ погрѣшности приближеннаго логариѳма, указанной нами въ §§ 310 (1°) и 311, *a*, прибавляется еще погрѣшность, происходящая отъ неточности самого числа. Опредѣлимъ предѣлъ это послѣдней погрѣшности.

Обозначимъ буквою φ погрѣшность приближеннаго числа $n+h$, т.-е. то положительное или отрицательное число, которое надо приложить къ при-

ближенному числу $n+h$, чтобы получить точное число; при этомъ мы допустимъ, что φ настолько малая дробь, что сумма $n+h+\varphi$ остается, какъ и сумма $n+h$, заключенной между цѣлыми числами n и $n+1$. Мы видѣли (§ 311, a), что если число n увеличивается на 1, то точный логариѳмъ его увеличивается на $d+\alpha'-\alpha$ (стотысячныхъ); значитъ, если число увеличится на φ, то логариѳмъ его долженъ увеличиться на такое число Δ (стотыс.), которое удовлетворяетъ пропорціи:

$$\Delta : (d+\alpha'-\alpha) = \varphi : 1; \text{ откуда: } \Delta = \varphi\,(d+\alpha'-\alpha) \text{ (стотыс.)}.$$

Слѣд. $$\text{Log}\,(n+h+\varphi) = \text{Log}\,(n+h) + \varphi(d+\alpha'-\alpha).$$

Значитъ, когда мы вмѣсто $Log\,(n+h+\varphi)$ беремъ $Log\,(n+h)$, мы дѣлаемъ ошибку, равную $\varphi\,(d+\alpha'-\alpha)$ стотысячныхъ. Ошибка эта, очевидно, менѣе

$$|\,\varphi\,|\left(d+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = |\,\varphi\,|\,(d+1) \text{ (стотысячныхъ)},$$

гдѣ $|\,\varphi\,|$ есть абсолютная величина погрѣшности самого приближеннаго числа $n+h$ (или ея предѣлъ).

Конечно, къ этой погрѣшности надо приложить ту, которая происходитъ отъ неточности приближеннаго логариѳма числа $n+h$, и предѣлъ которой, какъ мы видѣли, есть или $1/2$ стотысячной, или 1 стотысячная, смотря по тому, берется ли мантисса логариѳма прямо изъ таблицъ, или вычисляется помощью пропорціональныхъ разностей.

Такимъ образомъ, предѣлъ окончательной погрѣшности будетъ:

$$\left.\begin{array}{r} |\,\varphi\,|\,(d+1)+\frac{1}{2} \\ \text{или}\quad |\,\varphi\,|\,(d+1)+1 \end{array}\right\} \text{ стотысячныхъ.}$$

Не должно забывать, что φ есть погрѣшность того числа $n+h$, которое получится, когда въ данномъ десятичномъ числѣ запятую поставимъ послѣ 4-й цыфры слѣва.

Примѣръ Найти Log π, принимая $\pi=3{,}142$ (съ точностью до $1/2$ тысяч.).

Перенеся запятую послѣ 4-й цыфры слѣва, получимъ четырехзначное число 3142, точное до $1/2$ цѣлой единицы (точное число должно было бы быть $3142+\varphi$, гдѣ $\varphi<\frac{1}{2}$). Изъ таблицъ находимъ:

$$\text{Log}\,3142 = 3{,}49721;\quad d=13.$$

Предѣлъ погрѣшности этого логариѳма, происходящей отъ неточности числа, равенъ:

$$|\,\varphi\,|\,(13+1) < \tfrac{1}{2}\;14 = 7 \text{ (стотыс.)}.$$

Такъ какъ предѣлъ погрѣшности самого логариѳма (взятаго непосредственно изъ таблицъ) есть $1/2$ стотысячной, то предѣлъ окончательной погрѣшности будетъ $7^1/_2$ стотыс. <8 стотыс.

Такимъ образомъ:

$$\text{Log}\,(3142+\varphi) = 3{,}49721 \text{ (съ точн. до 8 ед. посл. разр.)}.$$

Слѣд. $$\text{Log}\,3{,}142 = 0{,}49721 \text{ (съ точн. до 8 ед. посл. разр.)}.$$

Значитъ, точная величина *Log* π заключается:

$$0{,}49721+0{,}00008 > \mathrm{Log}\ \pi > 0{,}49721-0{,}00008$$

т.-е.
$$0{,}49729 > \mathrm{Log}\ \pi > 0{,}49713.$$

Семизначный логариѳмъ числа π равенъ 0,4971499. Найденный нами приближенный логариѳмъ 0,49721 разнится отъ этого на 0,0000601, что, дѣйствительно, меньше 0,00008.

312. По данному логариѳму найти десятичное число. Пусть требуется найти N Log $\bar{1}{,}51001$, т.-е. найти число (Numerus), котораго логариѳмъ равенъ $\bar{1}{,}51001$ [1]). Не обращая пока вниманія на характеристику, отыскиваемъ въ таблицахъ сначала первыя двѣ цыфры мантиссы, а потомъ и остальныя три. Оказывается, что въ таблицахъ есть мантисса 51001, соотвѣтствующая числу 3236. Принявъ во вниманіе характеристику, окончательно пишемъ:

$$\bar{1}{,}51001 = \mathrm{Log}\,0{,}3236,$$

что можно также записать и такъ:

$$N\ \mathrm{Log}\ \bar{1}{,}51001 = 0{,}3236.$$

Чаще случается, что данная мантисса не находится въ таблицахъ. Пусть напр., намъ данъ логариѳмъ, у котораго мантисса есть 59499, не встрѣчающаяся въ таблицахъ, и какая-нибудь характеристика (напр., 2). Тогда искомое число можно найти простымъ вычисленіемъ, подобнымъ тому, которымъ мы находили логариѳмъ числа, не помѣщающагося въ таблицахъ.

Предположимъ сначала, что характеристика даннаго логариѳма есть 3, т.-е. что данный логариѳмъ есть 3,59499. Беремъ изъ таблицъ мантиссу 59494, ближайшую меньшую къ данной, выписываемъ четырехзначное число 3935, соотвѣтствующее ей, и опредѣляемъ (вычитаніемъ въ умѣ) табличную разность 12 (стотыс.) между взятой мантиссой и слѣдующей бо́льшей (соотвѣтствующей числу 3936). Такимъ образомъ:

$$3{,}59494 = \mathrm{Log}\ 3935;$$
$$3{,}59494 + 12\ \text{стотыс.} = \mathrm{Log}\ 3936.$$

---

[1]) Фразу: „найти число, котораго логариѳмъ равенъ a“ замѣняютъ иногда болѣе короткой: „найти антилогариѳмъ a“. Значитъ, антилогариѳмомъ a наз. число, котораго логариѳмъ равенъ a; его можно обозначать такъ: N Log a (или *Numerus Log* a).

Опредѣлимъ еще разность 5 (стотыс.) между данной мантиссой (59499) и мантиссой, взятой изъ таблицъ (59494) и обозначимъ буквою h ту неизвѣстную дробь, которую надо приложить къ числу 3935, чтобы логариѳмъ его увеличился на 5 (стотыс.). Тогда

$$3{,}59494 + 5 \text{ стотыс.} = \text{Log}\,(3935 + h).$$

Изъ этихъ 3-хъ равенствъ усматриваемъ, что если логариѳмъ увеличивается на 12 (стотыс.), то соотвѣтствующее число увеличивается на 1, а если логариѳмъ увеличивается на 5 (стотыс.), то число увеличивается на h. На основаніи допущенной нами пропорціональности можемъ написать:

$$12:5=1:h \quad \text{откуда: } h=\frac{5}{12}=0{,}4\ldots$$

Значитъ, число, соотвѣтствующее логариѳму 3,59499, равно, $3935+0{,}4\ldots=3935{,}4\ldots$; а такъ какъ характеристика даннаго логариѳма есть 2, а не 3, то искомое число x равно 393,54..., что можно выразить такъ:

$$x = N\,\text{Log}\,2{,}59499 = 393{,}54\ldots$$

Правило. Чтобы найти число по данному логариѳму, сначала находятъ въ таблицахъ ближайшую меньшую мантиссу и соотвѣтствующее ей четырехзначное число; затѣмъ къ этому числу прибавляютъ частное, выраженное десятичной дробью, отъ дѣленія разности между данной мантиссой и ближайшей меньшей на соотвѣтствующую табличную разность[1]); наконецъ, въ полученномъ числѣ ставятъ запятую сообразно характеристикѣ даннаго логариѳма.

Для строгаго вывода этого правила повторимъ въ общемъ видѣ разсужденія, посредствомъ которыхъ по логариѳму 2,59499 мы нашли соотвѣтствующее число.

---

[1]) Частное это достаточно вычислить съ точностью до $\frac{1}{2}$ десятой, такъ какъ бо́льшая точность все равно не достигается (см. § 312, *a*).

Положимъ сначала, что у даннаго логариѳма характеристика есть 3 (и какая-нибудь мантисса, не находящаяся въ таблицахъ). Находимъ въ таблицахъ мантиссу M, меньшую данной мантиссы и ближайшую къ ней, выписываемъ соотвѣтствующее этой мантиссѣ цѣлое четырехзначное число n и находимъ (вычитаніемъ въ умѣ) табличную разность d (стотыс.) между взятой мантиссой M и слѣдующей бо́льшей мантиссой (соотвѣтствующей числу $n+1$). Такимъ образомъ:

$$3+\frac{M}{10^5}=\text{Log }n;$$
$$3+\frac{M+d}{10^5}=\text{Log }(n+1).$$

Опредѣлимъ еще разность Δ (стотыс.) между данной мантиссой и взятой въ таблицахъ мантиссой M и обозначимъ буквой h ту неизвѣстную дробь, которую надо приложить къ числу n, чтобы логариѳмъ его увеличился на Δ стотысячныхъ. Тогда:

$$3+\frac{M+\Delta}{10^5}=\text{Log }(n+h).$$

Изъ написанныхъ 3-хъ равенствъ видно, что если логариѳмъ увеличивается на d (стотыс.), то число увеличивается на 1; если же логариѳмъ увеличивается на Δ (стотыс.), то число увеличивается на h.

На основаніи допущенной нами пропорціональности можемъ написать:

$$d:\Delta=1:h;\ \text{откуда: } h=\frac{\Delta}{d}.$$

Слѣд., искомое число будетъ:

$$n+h=n+\frac{\Delta}{d}.$$

Остается обратить дробь $\frac{\Delta}{d}$ въ десятичную, приписать ее къ цѣлому числу n и, если характеристика даннаго логариѳма не 3, а какое-нибудь иное число, перенести запятую сообразно теоремамъ о характеристикѣ.

313. Употребленіе пропорціональныхъ частей при нахожденіи числа. Обращеніе h въ десятичную дробь можетъ быть выполнено при помощи Р. Р. Такъ, когда $h=\frac{5}{12}$, то при дѣленіи 5 на 12 мы задаемся вопросомъ: на какое число десятыхъ надо умножить 12, чтобы получить 5 или число, ближайшее къ 5? Это число десятыхъ мы найдемъ въ колонкѣ, надъ которою стоитъ число 12; отыскиваемъ въ ней съ правой стороны число, ближайшее къ 5; это будетъ 4,8. Слѣва отъ 4,8 стоитъ цыфра 4, которая представитъ собою число десятыхъ долей.

Вычисленіе всего удобнѣе располагать такъ:

Логариѳмъ.		Число.	
3,59499			
. . 94		3935	$d=12$
5		4	
3,59499	. . . . , . .	3935,4.	
2,59499		393,54.	

313,a. Предѣлъ погрѣшности числа, найденнаго по данному логариѳму. Предварительно замѣтимъ, что данный логариѳмъ, по которому требуется отыскать неизвѣстное число, только въ исключительныхъ случаяхъ есть логариѳмъ точный; вообще же это есть логариѳмъ приближенный (и погрѣшность его можетъ доходить до нѣсколькихъ стотысячныхъ долей, напр., тогда, когда этотъ логариѳмъ получился отъ сложенія нѣсколькихъ приближенныхъ логариѳмовъ, или отъ умноженія приближеннаго логариѳма на цѣлое число). Обозначимъ буквою ω то положительное или отрицательное число стотысячныхъ долей, которое надо приложить къ данной приближенной мантиссѣ $M+\Delta$, чтобы получить точную мантиссу $M+\Delta+\omega$. Допустимъ, что это число настолько невелико, что сумма $\Delta+\omega$ не превосходитъ табличной разности d; тогда искомое число заключено между n и $n+1$ и, слѣд., оно есть сумма $n+h$, въ которой n есть четырехзначное число, взятое изъ таблицъ (мы предполагаемъ, что характеристика даннаго логариѳма есть 3), а слагаемое h представляетъ собою нѣкоторую правильную дробь, которую требуется найти. Точный логариѳмъ числа $n+h$ мы можемъ выразить двояко: съ одной стороны это есть

$$\operatorname{Log}(n+h)=3+\frac{M+\Delta+\omega}{10^5},$$

а съ другой стороны онъ равенъ:

$$\operatorname{Log}(n+h)=3+\frac{M+hd+\gamma}{10^5},$$

гдѣ абс. величина числа γ должна быть меньше $^1/_2$, потому что, какъ мы видѣли (§ 311, a), если возьмемъ за приближенный логариѳмъ числа $n+h$ сумму $3+\frac{M+hd}{10^5}$, то сдѣлаемъ погрѣшность, абс. величина которой меньше $^1/_2$ стотысячной.

Такимъ образомъ, мы можемъ написать уравненіе:

$$3+\frac{M+\Delta+\omega}{10^5}=3+\frac{M+hd+\gamma}{10^5},$$

изъ котораго находимъ:

$$\Delta+\omega=hd+\gamma \quad \text{и, слѣд.,} \quad h=\frac{\Delta+\omega-\gamma}{d}.$$

Такова точная величина дроби h; поэтому, беря вмѣсто этой величины приближеніе $h = \frac{\Delta}{d}$, найденное нами согласно правилу § 312, мы дѣлаемъ ошибку:

$$\frac{\Delta + \omega - \gamma}{d} - \frac{\Delta}{d} = \frac{\omega - \gamma}{d},$$

которая, очевидно, меньше дроби

$$\frac{|\omega| + \frac{1}{2}}{d},$$

гдѣ $|\omega|$ означаетъ абс. величину погрѣшности даннаго логариѳма (или ея предѣлъ), выраженную въ стотысячныхъ доляхъ.

Таковъ предѣлъ погрѣшности приближеннаго числа $n + \frac{\Delta}{d}$, въ которомъ дробь $\Delta : d$ оставлена въ точномъ видѣ. Предѣлъ этотъ превосходитъ 0,01, такъ какъ, очевидно:

$$\frac{|\omega| + \frac{1}{2}}{d} > \frac{\frac{1}{2}}{d} = \frac{1}{2d},$$

а величина d на всемъ протяженіи пятизначныхъ таблицъ меньше 45 и, слѣд.,

$$\frac{1}{2d} > \frac{1}{90} > \frac{1}{100}.$$

Поэтому, обращая дробь $\frac{\Delta}{d}$ въ десятичную, безполезно находить цыфру сотыхъ, а достаточно ограничиться цыфрою десятыхъ, при чемъ для уменьшенія ошибки лучше брать ближайшую цыфру десятыхъ, т.-е. увеличивать цыфру десятыхъ на 1 всякій разъ, когда цыфра сотыхъ была бы 5 или болѣе При этомъ, конечно, мы вводимъ еще ошибку въ нѣсколько сотыхъ (меньшую однако 5 сотыхъ, т.-е. $1/_{20}$), такъ что предѣлъ окончательной погрѣшности найденнаго согласно правилу § 312 числа можно представить такъ:

$$\frac{|\omega| + \frac{1}{2}}{d} + \frac{1}{20}.$$

Мы предполагали до сего времени, что характеристика даннаго логариѳма есть 3, и что, слѣд., въ искомомъ десятичномъ числѣ запятая стоитъ послѣ 4-й цыфры слѣва. Когда характеристика будетъ иная, то въ найденномъ выше числѣ запятую придется перенести влѣво или вправо, т.-е. раздѣлить число или умножить его на нѣкоторую степень 10. При этомъ, конечно, погрѣшность результата также раздѣлится или умножится на ту же степень 10.

Ниже (§ 316, *a* и слѣд.) мы приложимъ все сказанное къ нѣкоторымъ примѣрамъ, при чемъ увидимъ, что иногда приходится считаться еще и съ другими неточностями, кромѣ тѣхъ, о которыхъ мы говорили.

314. Дѣйствія надъ логариѳмами съ отрицательными характеристиками. Сложеніе и вычитаніе не представляютъ никакихъ затрудненій, какъ это видно изъ слѣдующихъ примѣровъ:

$$\begin{array}{r} \overline{2},97346 \\ +\;\; 1,83027 \\ \hline 0,80373 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{3},83846 \\ +\;\; \overline{5},98043 \\ \hline \overline{7},81889 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{1},03842 \\ -\;\; 5,96307 \\ \hline \overline{7},07535 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,00523 \\ -\;\; \overline{4},57369 \\ \hline 3,43154 \end{array}$$

Не представляетъ никакихъ затрудненій также и умноженіе логариѳма на положительное число; напр.,

$$\begin{array}{r} \overline{3},58376 \\ \times 9 \\ \hline \overline{22},25384 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{2},47356 \\ \times 34 \\ \hline 189424 \\ 142068 \\ \hline 16,10104 \\ -68 \\ \hline \overline{52},10104. \end{array}$$

Въ послѣднемъ примѣрѣ отдѣльно умножена положительная мантисса на 34, затѣмъ отрицательная характеристика на 34.

Если логариѳмъ съ отрицательной характеристикой и положительной мантиссой умножается на отрицательное число, то поступаютъ двояко: или предварительно данный логариѳмъ обращаютъ въ отрицательный, или же умножаютъ отдѣльно мантиссу и характеристику, и результаты соединяютъ вмѣстѣ; напримѣръ:

1) $\overline{3},56327 \,.\, (-4) = -2,43673 \,.\, (-4) = 9,74692;$

2) $\overline{3},56327 \,.\, (-4) = +12 - 2,25308 = 9,74692.$

При дѣленіи могутъ представиться два случая: 1) отрицательная характеристика дѣлится и 2) не дѣлится на дѣлителя. Въ первомъ случаѣ отдѣльно дѣлятъ характеристику и мантиссу:

$$\overline{10},37846 : 5 = \overline{2},07569.$$

Во второмъ случаѣ прибавляютъ къ характеристикѣ столько

отрицательныхъ единицъ, чтобы образовавшееся число дѣлилось на дѣлителя; къ мантиссѣ прибавляютъ столько же положительныхъ единицъ:

$$\bar{3},76081 : 8 = (-8+5,76081) : 8 = \bar{1},72010.$$

Это преобразованіе надо совершать въ умѣ, такъ что дѣйствіе располагается такъ:

$$\bar{3},76081 : 8 = \bar{1},72010 \quad \text{или} \quad \begin{array}{l|l} \bar{3},76081 & 8 \\ \hline & \bar{1},72010. \end{array}$$

315. Замѣна вычитаемыхъ логариѳмовъ слагаемыми. При вычисленіи какого-нибудь сложнаго выраженія помощью логариѳмовъ приходится нѣкоторые логариѳмы складывать, другіе вычитать; въ такомъ случаѣ, при обыкновенномъ способѣ совершенія дѣйствій, находятъ отдѣльно сумму слагаемыхъ логариѳмовъ, потомъ сумму вычитаемыхъ и изъ первой суммы вычитаютъ вторую. Напр., если имѣемъ:

$$\text{Log}\, x = 2,73058 - \bar{2},07406 + \bar{3},54646 - 8,35890,$$

то обыкновенное выполненіе дѣйствій расположится такъ:

$$+\begin{array}{r} 2,73058 \\ \bar{3},54646 \\ \hline 0,27704 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} \bar{2},07406 \\ 8,35890 \\ \hline 6,43296 \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 0,27704 \\ 6,43296 \\ \hline \bar{7},84408 \end{array} = \text{Log}\, x.$$

Есть однако возможность замѣнить вычитаніе сложеніемъ. Для этого достаточно поступить такъ, какъ поступаютъ, когда у отрицательнаго логариѳма хотятъ сдѣлать мантиссу положительной (§ 306), т.-е. достаточно прибавить +1 къ отрицательной мантиссѣ и —1 къ характеристикѣ. Такъ,

$$-\bar{2},07406 = -\bar{2} - 0,07406 = -\bar{2} - 1 + (1 - 0,07406) =$$
$$= 2 - 1 + 0,92594 = 1,92594.$$

Точно такъ же: $-8,35890 = -\overset{-1+1}{8,35890} = \bar{9},64110.$

Отсюда выводимъ такое **правило:** *чтобы вычесть логариѳмъ, достаточно прибавить другой логариѳмъ, который составляется изъ пер-*

наго такъ: характеристика увеличивается на 1 и результатъ берется съ противоположнымъ знакомъ, а всѣ цыфры мантиссы вычитаются изъ 9, кромѣ послѣдней справа значащей цыфры, которая вычитается изъ 10.

Руководствуясь этимъ правиломъ, можемъ прямо писать:

$$-\bar{2},07406=1,92594, \quad -8,35890=\bar{9},64110$$

и расположить вычисленіе въ нашемъ примѣрѣ такъ.

$$\begin{array}{r} 2,73058 \\ 1,92594 \\ +\bar{3},54646 \\ \bar{9},64110 \\ \hline \bar{7},84408=\text{Log } x. \end{array}$$

Примѣры вычисленій помощью логариѳмовъ.

316. Примѣръ 1. Вычислить выраженіе:

$$x=\frac{\sqrt[3]{A}\,.\,B^4}{C^3\,.\,\sqrt[3]{D}},$$

если $A=0,821573$, $B=0,04826$, $C=0,0051275$ и $D=7,24635$.

Логариѳмируемъ данное выраженіе:

$$\text{Log } x=\tfrac{1}{3}\text{ Log } A+4\text{ Log } B-3\text{ Log } C-\tfrac{1}{3}\text{ Log } D.$$

Теперь производимъ вычисленіе Log x и затѣмъ x:

Предварительныя вычисленія.

A)

Число.	Логариѳмъ	
8215	3,91461	$d=5$
7	35	
3	15	
0,821573	$\bar{1}$,91465	
$\frac{1}{3}$ Log A	$=\bar{1}$,97155	

B)

$\text{Log } 0,04826=\bar{2},68359$

$4\text{ Log } B\ldots=\bar{6},73436$

C) Число. Логариѳмъ.

5127	3,70986	$d=9$
5	45	
0,0051275	3,70991	

$3 \operatorname{Log} C \ldots = \bar{7},12973$

$-3 \operatorname{Log} C \ldots = 6,87027$

D) Число. Логариѳмъ.

7246	3,86010	$d=6$
3	18	
5	30	
7,24635	0,86012	

$\frac{1}{3} \operatorname{Log} D \ldots = 0,28671$

$-\frac{1}{3} \operatorname{Log} D \ldots = \bar{1},71329$

Окончательныя вычисленія.

$\frac{1}{3} \operatorname{Log} A = \bar{1},97155$

$4 \operatorname{Log} B = \bar{6},73436$

$-3 \operatorname{Log} C = 6,87027$

$-\frac{1}{3} \operatorname{Log} D = \bar{1},71329$

$\operatorname{Log} x = 1,28947$

$\operatorname{Log} x_1 = 3,28947$

Логариѳмъ.	Число.	
3,28947		$d=22$
37	1947	
$\overline{10}$	0,4	
3,28947	1947,4	
1,28947	19,474	

$x_1 = 1947,4$

$x = 19,474$

Замѣчаніе. При вычисленіяхъ помощью логариѳмовъ какого-нибудь сложнаго выраженія очень полезно, ради экономіи времени и мѣста, прежде чѣмъ обращаться къ таблицамъ, предварительно выписать въ надлежащемъ порядкѣ все, что можно написать безъ помощи таблицъ. Желая, напр., вычислить выраженіе, данное въ приведенномъ выше примѣрѣ 1-мъ, мы предварительно выписываемъ слѣдующее расположеніе вычисленій:

$$\operatorname{Log} x = \frac{1}{3} \operatorname{Log} A + 4 \operatorname{Log} B - 3 \operatorname{Log} C - \frac{1}{3} \operatorname{Log} D.$$

Предварительныя вычисленія.

A) Число. Логариѳмъ.

8215, ...	3, ...	$d=$
7.		
3		
0,821573	$\bar{1}$,	

$\frac{1}{3} \operatorname{Log} A$ . . . .

B)

$\operatorname{Log} 0,04826 = \bar{2},$

$4 \operatorname{Log} B =$

C) Число.	Логариѳмъ.		D) Число.	Логариѳмъ.	
5127	3, ...	$d=$	7246	3, ...	$d=$
5			3		
0,0051275	$\bar{3}$, ...		5		
3 Log C			7,24635		
—3 Log C			$\frac{1}{3}$ Log D.	. . .	
			—$\frac{1}{3}$ Log D.	. . .	

Окончательныя вычисленія.

		Логариѳмъ.	Число.
$\frac{1}{3}$ Log A=			
4 Log B=		3, ...	$d=$
—3 Log C=			
—$\frac{1}{3}$ Log D=			
Log x =			
Log x_1=			

316,а. Предѣлъ погрѣшности. Сначала найдемъ предѣлъ погрѣшности числа x_1=1947,4, равный, какъ мы видѣли (§ 313,a):

$$\frac{|\omega|+\frac{1}{2}}{d}+\frac{1}{20}.$$

Значитъ, предварительно надо найти $|\omega|$, т.е. предѣлъ погрѣшности приближеннаго логариѳма числа x_1 или—что все равно—предѣлъ погрѣшности приближеннаго логариѳма числа x (выраженный въ стотысячныхъ доляхъ). Логариѳмъ этотъ (какъ въ нашемъ примѣрѣ, такъ и въ большинствѣ другихъ примѣровъ) получается отъ сложенія нѣсколькихъ приближенныхъ слагаемыхъ; въ нашемъ примѣрѣ каждое изъ этихъ слагаемыхъ получается отъ умноженія приближеннаго логариѳма на точное число (цѣлое или дробное, положительное или отрицательное). Поэтому мы прежде всего уяснимъ себѣ слѣдующія 2 простыя истины приближенныхъ вычисленій:

I. За предѣлъ погрѣшности суммы приближенныхъ слагаемыхъ, можно принять сумму абсолютныхъ величинъ погрѣшностей этихъ слагаемыхъ (или ихъ предѣловъ).

Положимъ, напр., что a, b, c,... будутъ приближенныя слагаемыя, о которыхъ мы не знаемъ, взяты ли они съ избыткомъ, или съ недостаткомъ, но извѣстно, что абсолютныя величины погрѣшностей (или ихъ предѣловъ) этихъ слагаемыхъ суть соотвѣтственно числа α, β, γ,... Тогда точныя слагаемыя должны быть: $a\pm\alpha$, $b\pm\beta$, $c\pm\gamma$,... (гдѣ знаки $+$ и $-$ не находятся въ соотвѣтствіи); слѣд., приближенная сумма $a+b+c+\ldots$ разнится отъ точной суммы: $(a\pm\alpha)+(b\pm\beta)+(c\pm\gamma)+\ldots=(a+b+c+\ldots)+$

$(\pm\alpha\pm\beta\pm\gamma\pm\ldots)$ на алгебраическую сумму $\pm\alpha\pm\beta\pm\gamma\pm\ldots$, которая очевидно, не больше ариѳметической суммы $\alpha+\beta+\gamma\ldots$; значитъ, эту послѣднюю сумму можно принять за предѣлъ погрѣшности приближенной суммы.

II. За предѣлъ погрѣшности произведенія приближеннаго числа на точное можно принять произведеніе абсолютной величины погрѣшности приближеннаго сомножителя (или ея предѣла) на абсолютную величину точнаго сомножителя.

Такъ, пусть a есть приближенное число, абс. величина погрѣшности котораго есть α, и n какое-нибудь точное число (цѣлое или дробное, положительное или отрицательное—все равно); тогда приближенное произведеніе an разнится отъ точнаго произведенія $(a\pm\alpha)\,n = an \pm \alpha n$ на число $\pm\alpha n$, а это число не превосходитъ произведенія α на абсолютную величину числа n.

Пользуясь эти двумя истинами и принявъ во вниманіе, что предѣлъ погрѣшности логариѳма, взятаго непосредственно изъ таблицъ, есть $^1/_2$ стотысячной (§ 310,1°), а логариѳма, найденнаго указаннымъ нами вычисленіемъ, есть 1 стотысячная, мы находимъ, что предѣлъ погрѣшности есть:

въ Log A.... 1 стотыс.	въ Log C.... 1 стотыс.
въ $\frac{1}{3}$ Log A.... $\frac{1}{3}$ „	въ -3 Log C..... 3 „
въ Log B..... $\frac{1}{2}$ „	въ Log D..... 1 „
въ 4 Log B. ... 2 „	въ $\frac{1}{3}$ Log D..... $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$ стот.
	въ $-\frac{1}{3}$ Log D.. .. $\frac{5}{6}$

Для $\frac{1}{3}$ *Log D* (и, слѣд., для $-\frac{1}{3}$ *Log D*) къ предѣлу погрѣшности $\frac{1}{3}$ мы добавили еще дробь $\frac{1}{2}$, такъ какъ, дѣля *Log D* $=0{,}86012$ на 3, мы въ частномъ округлили число стотысячныхъ, взявъ ближайшее цѣлое число, и, слѣд., сдѣлали еще ошибку, меньшую $^1/_2$ стотысячной. Раньше, находя предѣлъ погрѣшности въ $\frac{1}{3}$ *Log A*, мы такого добавленія не сдѣлали, такъ какъ *Log A* $=\overline{1}{,}91465$ при дѣленіи на 3 даетъ цѣлое число стотысячныхъ.

Теперь находимъ предѣлъ погрѣшности *Log* x (и, слѣд., *Log* x_1):

$$|\,\omega\,| = \frac{1}{3}+2+3+\frac{5}{6} = 6\tfrac{1}{6}\ \text{(стотыс.)}.$$

Слѣд., предѣлъ погрѣшности числа x_1 есть

$$\frac{|\,\omega\,|+\frac{1}{2}}{d}+\frac{1}{20}=\frac{6\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}{22}+\frac{1}{20}=\frac{6\frac{2}{3}}{22}+\frac{1}{20}=\frac{20}{66}+\frac{1}{20}=\frac{400+66}{1320}=$$
$$=\frac{466}{1320}=0{,}353\ldots<0{,}4.$$

Такъ какъ $x=x_1\cdot\frac{1}{100}$, то предѣлъ погрѣшности въ x есть $0{,}4\cdot\frac{1}{100}=0{,}004$.

Такимъ образомъ, найденное нами для x приближенное число 19,474 разнится отъ точнаго числа менѣе, чѣмъ на 0,004. Такъ какъ мы не знаемъ,

съ недостаткомъ или съ избыткомъ найдено наше приближеніе, то можемъ только ручаться за то, что

$$19{,}474 + 0{,}004 > x > 19{,}474 - 0{,}004$$

т.-е.

$$19{,}478 > x > 19{,}470$$

и потому, если положимъ: $x = 19{,}47$, то будемъ имѣть приближеніе съ недостаткомъ, съ точностью до 0,01.

316,b. Примѣръ 2. Вычислить формулу:

$$x = (-2{,}31)^3 \sqrt[5]{72} = -(2{,}31)^3 \sqrt[5]{72}.$$

Такъ какъ отрицательныя числа не имѣютъ логариѳмовъ, то предварительно находимъ:

$$x' = (2{,}31)^3 \sqrt[5]{72}$$

по разложенію:

$$\operatorname{Log} x' = 3 \operatorname{Log} 2{,}31 + \tfrac{1}{5} \operatorname{Log} 72.$$

Предварительныя вычисленія.

$\operatorname{Log} 2{,}31 = 0{,}36361$ $\qquad$ $\operatorname{Log} 72 = 1{,}85733$

$3 \operatorname{Log} 2{,}31 = 1{,}09083$ $\qquad$ $\tfrac{1}{5} \operatorname{Log} 72 = 0{,}37147$

Окончательныя вычисленія.

	Логариѳмъ.	Число.	
$3 \operatorname{Log} 2{,}31 = 1{,}09083$	3,46230		
$\tfrac{1}{5} \operatorname{Log} 72 = 0{,}37147$	25	 2899	$d=15$
$\operatorname{Log} x' = 1{,}46230$	5	 0,3	
$\operatorname{Log} x_1 = 3{,}46230$	3,46230	 2899,3	
	1,46230	 28,993	

$$x_1 = 2899{,}3$$
$$x' = 28{,}993$$
$$x = -28{,}993.$$

Предѣлъ погрѣшности. Такъ какъ логариѳмы чиселъ 2,31 и 72 берутся непосредственно изъ таблицъ, то предѣлъ погрѣшности каждаго изъ нихъ есть $^1/_2$ стотысячной. Поэтому:

предѣлъ погрѣшности въ $3 \operatorname{Log} 2{,}31$ есть $\frac{3}{2}$ стотыс.

" " " $\tfrac{1}{5} \operatorname{Log} 72$ " $\frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{6}{10}$ "

" " " $\operatorname{Log} x_1$ " $\frac{3}{2} + \frac{6}{10} = 2{,}1$ "

Предѣлъ погрѣшности въ числѣ $x_1 = 2899,3$ равенъ:

$$\frac{|\omega| + \frac{1}{2}}{d} + \frac{1}{20} = \frac{2,1+0,5}{15} + 0,05 = 0,173... + 0,05 = 0,223...$$

Такъ какъ $x' = x_1 \cdot \frac{1}{100}$, то предѣлъ погрѣшности въ x' (и, слѣд., въ x) есть $0,00223... < 0,003$.

316,c. Примѣръ 3. Вычислить: $x = \sqrt[3]{\sqrt[5]{8} + \sqrt[4]{3}}$.

Сплошного логариѳмированія здѣсь примѣнить нельзя, такъ какъ подъ знакомъ корня стоитъ сумма. Въ подобныхъ случаяхъ вычисляютъ формулу по частямъ. Сначала находимъ $N = \sqrt[5]{8}$, потомъ $N_1 = \sqrt[4]{3}$; далѣе простымъ сложеніемъ опредѣляемъ $N + N_1$ и, наконецъ, вычисляемъ $\sqrt[3]{N + N_1}$:

$\text{Log}\, N = \frac{1}{5} \text{Log}\, 8$

$\text{Log}\, 8 = 0,90309$

$\frac{1}{5} \text{Log}\, 8 = 0,18062$

Логариѳмъ.	Число.	
3,18062		
41	1515	$d=29$
21	0,7	
3,18062	1515,7	
0,18062	1,5157	

$N = 1,5157$

$\text{Log}\, N_1 = \frac{1}{4} \text{Log}\, 3$

$\text{Log}\, 3 = 0,47712$

$\frac{1}{4} \text{Log}\, 3 = 0,11928$

Логариѳмъ.	Число.	
3,11928		
26	1316	$d=33$
2	0,1	
3,11928	1316,1	
0,11928	1,3161	

$N = 1,3161$

$$\text{Log}\, x = \text{Log} \sqrt[3]{N + N_1} = \frac{1}{3} \text{Log}\,(1,5157 + 1,3161) = \frac{1}{3} \text{Log}\, 2,8318.$$

Число.	Логариѳмъ.	
2831	3,45194	$d=15$
8	12,0	
2831,8	3,45206	
2,8318	0,45206	
$\frac{1}{3}$ Log 2,8318	0,15069	

$x_1 = 1414,8;$

Логариѳмъ.	Число.	
3,15069		
45	1414	$d=31$
24	0,8	
3,15062	1414,8	
0,15062	1,4148	

$x = 1,4148.$

Предѣлъ погрѣшности. Вычисленіе предѣла погрѣшности будемъ вести въ слѣдующей послѣдовательности.

1) Погрѣшность въ числѣ $N = 1,5157$.

Погрѣшн. въ Log 8 $< \frac{1}{2}$ стот.; погрѣшн. въ $\frac{1}{5}$ Log 8 $< \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = 0,6$.

Погрѣшн. въ числѣ 1515,7 $< \frac{|\omega| + \frac{1}{2}}{d} + \frac{1}{20} = \frac{0,6+0,5}{29} + 0,005 = 0,087...$

„ $\quad 1,5157 < 0,000087.. < 0,00009$

2) Погрѣшность въ числѣ $N_1 = 1,3161$.

Погрѣшн. въ Log 3 $< \frac{1}{2}$ стот; погрѣш. въ $\frac{1}{4}$ Log 3 $< \frac{1}{8}$ стот.

Погрѣшн. въ числѣ 1316,1 $< \frac{|\omega| + \frac{1}{2}}{d} + \frac{1}{20} = \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{2}}{33} + 0,05 = 0,068\,..$

Погрѣшн. въ числѣ 1,3161 $< 0,000068.. < 0,00007$.

3) Погрѣшность въ числѣ $N + N_1 = 2,8318$:

$$< 0,00009 + 0,00007 = 0,00016$$

и, слѣд., погрѣшность въ числѣ 2831,8 $< 0,16$.

4) Погрѣшность въ Log 2831,8 (и, слѣд., въ Log 2,8318).

Эта погрѣшность, выраженная въ стотысячныхъ доляхъ, должна быть меньше (§ 311, *b*):

$$|\varphi|(d+1) + 1 = 0,16\,(15+1) + 1 = 3,56 \text{ (стотыс.)}.$$

5) Погрѣшность въ $\frac{1}{3}$ Log 2,8318:

$$< \frac{3,56}{3} + \frac{1}{2} = 1,18\,.. + 0,5 = 1,68\,.. < 2 \text{ (стотыс.)}.$$

6) Погрѣшность въ числѣ $x_1 = 1414,8$:

$$< \frac{|\omega| + \frac{1}{2}}{d} + \frac{1}{20} = \frac{2+0,5}{31} + 0,05 = 0,13... < 0,14.$$

7) Наконецъ, погрѣшность въ числѣ $x = 1,4148$:

$$< 0,00014.$$

Такимъ образомъ, точная величина x заключается:

$$1,4148 + 0,00014 > x > 1,4148 - 0,00014.$$

ГЛАВА VI.

Показательныя и логариѳмическія уравненія.

317. Опредѣленіе. Показательными уравненіями называются такія, въ которыхъ неизвѣстное входитъ въ видѣ показателя степени, а логариѳмическими — такія уравненія, въ которыхъ неизвѣстное входитъ подъ знакомъ Log.

Такія уравненія могутъ быть разрѣшаемы только въ частныхъ случаяхъ, при чемъ приходится основываться на свойствахъ логариѳмовъ и на томъ началѣ, что если числа равны, то равны и ихъ логариѳмы (когда основаніе не равно 1), и обратно: если логариѳмы равны, то равны и соотвѣтствующія имъ числа.

Примѣръ 1. Рѣшить уравненіе: $2^x=1024$.

Логариѳмируемъ обѣ части уравненія:

$$x \operatorname{Log} 2=\operatorname{Log} 1024; \quad x=\frac{\operatorname{Log} 1024}{\operatorname{Log} 2}=\frac{3{,}01030}{0{,}30103}=10.$$

Примѣръ 2. Рѣшить уравненіе: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x}=5$.

Подобно предыдущему находимъ:

$$(x^2-2x) \operatorname{Log} \tfrac{1}{3}=\operatorname{Log} 5; \quad (x^2-2x)(-\operatorname{Log} 3)=\operatorname{Log} 5;$$

$$x^2-2x+\frac{\operatorname{Log} 5}{\operatorname{Log} 3}=0; \quad x=1 \pm \sqrt{1-\frac{\operatorname{Log} 5}{\operatorname{Log} 3}}.$$

Такъ какъ $1<\frac{\operatorname{Log} 5}{\operatorname{Log} 3}$, то уравненіе невозможно при вещественныхъ значеніяхъ x.

Примѣръ 3. Рѣшить уравненіе: $0{,}001^2=0{,}3$.

Логариѳмируя въ первый разъ, получимъ:

$$2^x=\frac{\operatorname{Log} 0{,}3}{\operatorname{Log} 0{,}001}=\frac{\overline{1},47712}{-3}=\frac{-0{,}52288}{-3}=0{,}17429.$$

Логариѳмируя еще разъ, найдемъ:

$$x=\frac{\operatorname{Log} 0{,}17429}{\operatorname{Log} 2}=\frac{\bar{1}{,}24128}{0{,}30103}=\frac{-0{,}75872}{0{,}30103}=-2{,}52\ldots$$

Примѣръ 4. Рѣшить уравненіе: $a^{2x}-a^x=1$. Положивъ $a^x=y$, получимъ квадратное уравненіе:

$$y^2-y-1=0, \text{ откуда: } y_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ y_{11}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Слѣд.,} \qquad a^x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ и } a^x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Такъ какъ $1-\sqrt{5}<0$, то послѣднее уравненіе невозможно, (отрицательныя числа не имѣютъ логариѳмовъ), а первое даетъ:

$$x=\frac{\operatorname{Log}(1+\sqrt{5})-\operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log} a}.$$

Примѣръ 5. Рѣшить уравненіе:

$$\operatorname{Log}(a+x)+\operatorname{Log}(b+x)=\operatorname{Log}(c+x).$$

Уравненіе можно написать такъ:

$$\operatorname{Log}[(a+x)(b+x)]=\operatorname{Log}(c+x).$$

Изъ равенства логариѳмовъ заключаемъ о равенствѣ чиселъ:

$$(a+x)(b+x)=c+x.$$

Это есть квадратное уравненіе, рѣшеніе котораго не представляетъ затрудненій.

Примѣръ 6. Рѣшить систему:

$$xy=a^2,\quad \operatorname{Log}^2 x+\operatorname{Log}^2 y=\tfrac{5}{2}\operatorname{Log}^2 a.$$

Первое уравненіе можно замѣнить такимъ:

$$\operatorname{Log} x+\operatorname{Log} y=\operatorname{Log} a^2.$$

Возвысивъ это уравненіе въ квадратъ и вычтя изъ него второе данное, получимъ:

$$2\operatorname{Log} x\operatorname{Log} y=\operatorname{Log}^2 a^2-\tfrac{5}{2}\operatorname{Log}^2 a^2, \text{ откуда: } \operatorname{Log} x\operatorname{Log} y=-\tfrac{3}{4}\operatorname{Log}^2 a^2.$$

Зная сумму и произведеніе логариѳмовъ, легко найдемъ и самые логариѳмы:

$$\mathrm{Log}\, x = \tfrac{3}{2}\mathrm{Log}\ a^2 = \mathrm{Log}\left(a^2\right)^{\frac{3}{2}} = \mathrm{Log}\ a^3; \quad x = a^3.$$

$$\mathrm{Log}\, y = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\ a^2 = \mathrm{Log}\left[\,(a^2)^{-\frac{1}{2}}\right] = \mathrm{Log}\ a^{-1}; \quad y = a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

Такъ какъ данныя уравненія симметричны относительно x и y, то значеніе для x можетъ быть принято за значеніе для y, и наоборотъ; такъ что можно также положить: $y = a^3$, $x = a^{-1}$.

Примѣръ 7. Вычислить выраженіе $10^{1-\mathrm{Log}\,1,(3)}$, въ которомъ знакъ Log означаетъ десятичный логариѳмъ.

Обозначивъ искомое число черезъ x, будемъ имѣть:

$$x = 10^{1-\mathrm{Log}\,1,(3)};\ \mathrm{Log}\, x = (1 - \mathrm{Log}\tfrac{4}{3})\,\mathrm{Log}\ 10 = 1 - \mathrm{Log}\tfrac{4}{3} =$$
$$= \mathrm{Log}\ 10 - \mathrm{Log}\tfrac{4}{3} = \mathrm{Log}\tfrac{30}{4};\ x = \tfrac{30}{4} = \tfrac{15}{2} = 7{,}5.$$

ГЛАВА VII.

Сложные проценты, срочныя уплаты и срочные взносы.

318. Основная задача на сложные проценты. Говорятъ, что капиталъ отданъ по сложнымъ процентамъ, если принимаются во вниманіе такъ называемые «проценты на проценты», т.-е. если причитающіяся на капиталъ процентныя деньги присоединяются въ концѣ каждаго года къ капиталу для наращенія ихъ процентами въ слѣдующіе годы.

Задача. Въ какую сумму обратится капиталъ a рублей, отданный въ ростъ по p. сложныхъ процентовъ, по прошествіи t лѣтъ (t цѣлое число)?

Каждый рубль капитала, отданнаго по $p^0/_0$, въ теченіе одного года принесетъ прибыли $\frac{p}{100}$ рубля, и слѣд., каждый рубль капитала черезъ 1 годъ обратится въ $1+\frac{p}{100}$ рубля (напр., если капиталъ отданъ по $5^0/_0$, то каждый рубль его черезъ годъ обратится въ $1+\frac{5}{100}$, т.-е. въ 1,05 рубля). Обозначивъ для краткости дробь $\frac{p}{100}$ одною буквою, напр. r, можемъ сказать, что каждый рубль капитала черезъ годъ обратится въ $1+r$ рубля; слѣд., a рублей обратятся черезъ 1 годъ въ $a(1+r)$ руб. Еще черезъ годъ, т.-е. черезъ 2 года отъ начала роста, каждый рубль изъ этихъ $a(1+r)$ руб. обратится снова въ $1+r$ руб.; значитъ, весь капиталъ обратится въ $a(1+r)^2$ руб. Такимъ же образомъ найдемъ, что черезъ три года капиталъ будетъ $a(1+r)^3$, черезъ 4 года $a(1+r)^4$... вообще черезъ t лѣтъ, если t цѣлое число, онъ обратится въ $a(1+r)^t$ руб. Такимъ образомъ, обозначивъ черезъ A окончательный капиталъ, будемъ имѣть слѣдующую **формулу сложныхъ процентовъ:**

$$A=a(1+r)^t,\ \text{гдѣ}\ r=\frac{p}{100} \qquad [1]$$

Примѣръ. Пусть a=2300 руб., p=4, t=20 лѣтъ; тогда формула даетъ:

$$r=\frac{4}{100}=0{,}04;\quad A=2300\ (1{,}04)^{20}.$$

Чтобы вычислить A, примѣняемъ логариѳмы:

$$\operatorname{Log} A=\operatorname{Log} 2300+20 \operatorname{Log} 1{,}04=3{,}36173+20\ .\ 0{,}01703=$$
$$=3{,}36173+0{,}34060=3{,}70233.$$
$$A=5039 \text{ руб.}$$

Замѣчанія. 1°. Въ этомъ примѣрѣ намъ пришлось Log 1,04 умножить на 20. Такъ какъ число 0,01703 есть приближенное значеніе Log 1,04 съ точностью до $\frac{1}{2}$ стотысячной доли, то произведеніе этого числа на 20 будетъ точно только до $\frac{1}{2}$. 20,

т.-е. до 10 стотысячныхъ=1 десятитысячной. Поэтому въ суммѣ 3,70233 мы не можемъ ручаться не только за цыфру стотысячныхъ, но и за цыфру десятитысячныхъ. Чтобы въ подобныхъ случаяхъ можно было получить бóльшую точность, лучше для числа $1+r$ брать логариѳмы не 5-значные, а съ бóльшимъ числомъ цыфръ, напр. 7-значные. Для этой цѣли мы приводимъ здѣсь небольшую табличку, въ которой выписаны 7-значные логариѳмы для наиболѣе употребительныхъ значеній p:

p	$1+r$	Log $(1+r)$
3	1,03	0,0128 372
$3\frac{1}{4}$	1,0325	0,0138 901
$3\frac{1}{2}$	1,035	0,0149 403
$3\frac{3}{4}$	1,0375	0,0159 881
4	1,04	0,0170 333
$4\frac{1}{4}$	1,0425	0,0180 761
$4\frac{1}{2}$	1,045	0.0191 163
$4\frac{3}{4}$	1,0475	0,0201 540
5	1,05	0,0211 893

2°. Существуютъ особыя таблицы, въ которыхъ выписаны значенія множителя $(1+r)^t$ для разныхъ r и t. Пользуясь такими таблицами, можно, конечно, обойтись безъ логариѳмовъ.

319. Случай, когда время выражается дробнымъ числомъ лѣтъ Если время, на которое отданъ капиталъ, состоитъ изъ t полныхъ лѣтъ и еще k дней, то можно сдѣлать два предположенія: 1) капиталъ a наростаетъ сложными процентами за все время, или 2) сложные проценты считаются только за цѣлое число лѣтъ, а за k дней счетъ прибыли идетъ на простые проценты. Первое имѣетъ мѣсто въ тѣхъ случаяхъ, когда наростаніе, не завися отъ условій, принятыхъ человѣкомъ, идетъ непрерывно по одному и тому же закону (напр., при увеличеніи съ теченіемъ времени численности населенія въ какой-нибудь странѣ). Второе имѣетъ мѣсто въ банковыхъ операціяхъ. Легко убѣдиться, что въ первомъ случаѣ законъ наростанія выражается тою же формулою [1], которую мы вывели для t цѣлаго. Предположимъ, въ самомъ

дѣлѣ, что $t=\frac{p}{q}$ лѣтъ, и допустимъ, что 1 рубль черезъ $\frac{1}{q}$ часть года обр - щается въ $1+x$ руб. Тогда черезъ $\frac{q}{q}$ частей, т.-е. черезъ 1 годъ, онъ обратится въ $(1+x)^q$, а черезъ $\frac{p}{q}$ года—въ $(1+x)^p$. Но, по смыслу задачи, имѣемъ:

$$(1+x)^q=1+r,$$

откуда: $$1+x=(1+r)^{\frac{1}{q}} \text{ и } (1+x)^p=(1+r)^{\frac{p}{q}},$$

т.-е. $$A=a(1+r)^t.$$

Для случая, когда нарастаніе за часть года разсчитывается по простымъ процентамъ, можно составить другую формулу такимъ образомъ: черезъ t полныхъ лѣтъ капиталъ, нарастая сложными процентами, обратится въ $a(1+r)^t$ руб.; въ k дней каждый рубль принесетъ, считая простые проценты, $\frac{rk}{360}$ руб. процентныхъ денегъ (годъ при коммерческихъ расчетахъ считается въ 360 дней); каждый рубль изъ $a(1+r)$ рублей обратится черезъ k дней въ $1+\frac{rk}{360}$ руб. Поэтому окончательный капиталъ будетъ:

$$A=a(1+r)^t\left(1+\frac{rk}{360}\right). \qquad (2)$$

Если напр., $a=2300$, $p=5$, $t=10$ и $k=36$, то найдемъ:

$$A=2300(1{,}05)^{10}(1+0{,}005),$$

$$\text{Log } A=\text{Log } 2300+10 \text{ Log } 1{,}05+\text{Log } 1{,}005=3{,}57580;$$

$$A=3765{,}33.$$

320. По даннымъ тремъ изъ чиселъ: A, a, r и t опредѣлить четвертое. Формула (1) (§ 318) примѣнима и къ рѣшенію такихъ задачъ, въ которыхъ неизвѣстно или a, или r, или t при прочихъ данныхъ числахъ. Такъ, изъ нея находимъ:

для опредѣленія начальнаго капитала: $a=\frac{A}{(1+r)^t}$,

и слѣд., $$\text{Log } a=\text{Log } A-t \text{ Log }(1+r);$$

для опредѣленія процента: $1+r=\sqrt[t]{\frac{A}{a}}$,

и слѣд., $$\text{Log }(1+r)=\frac{1}{t}(\text{Log } A-\text{Log } a).$$

Вычисливъ по таблицамъ $1+r$, найдемъ потомъ r, т.-е. $\frac{p}{100}$, а затѣмъ и p.

Для опредѣленія времени будемъ имѣть:

$$\text{Log}\, A = \text{Log}\, a + t\, \text{Log}\,(1+r),$$

откуда:

$$t = \frac{\text{Log}\, A - \text{Log}\, a}{\text{Log}\,(1+r)}.$$

При рѣшеніи задачъ по формулѣ [2] (§ 319) могутъ представиться нѣкоторыя затрудненія. Такъ, для опредѣленія процента эта формула даетъ уравненіе степени $(t+1)$-й относительно r, которое вообще не разрѣшается элементарно. Въ этомъ случаѣ можно удовольствоваться приближеннымъ рѣшеніемъ, которое находятъ слѣдующимъ образомъ. Назначивъ для r произвольное число, вычисляютъ по формулѣ [2] капиталъ A; если найденное значеніе окажется менѣе даннаго, то, замѣтивъ, что съ увеличеніемъ r увеличивается и A, даютъ для t другое произвольное значеніе, бо́льшее прежняго, и снова вычисляютъ A; если это значеніе окажется все-таки меньше даннаго, то еще увеличиваютъ r. Послѣ нѣсколькихъ испытаній находятъ для r такое число, при которомъ вычисленное значеніе A будетъ весьма мало отличаться отъ даннаго.

Затрудненіе представляется также и тогда, когда по формулѣ [2] опредѣляется время, потому что въ этомъ случаѣ получается одно уравненіе съ двумя неизвѣстными t и k. Затрудненіе это обходятъ, пользуясь сначала формулой [1] для вычисленія цѣлаго числа лѣтъ, а потомъ—формулой [2] для вычисленія k.

Задача. На какое время надо отдать капиталъ въ 5000 рублей по 6 сложныхъ процентовъ, чтобы вмѣсто него получить 6000 рублей?

Мы не знаемъ, будетъ ли искомое число цѣлое или дробное. Предположимъ, что оно будетъ цѣлое. Въ такомъ случаѣ можемъ воспользоваться формулою [1] (§ 318), которая даетъ:

$$6000 = 5000 . 1{,}06^t \text{ или } 6 = 5 . 1{,}06^t,$$

откуда, логариѳмируя, найдемъ:

$$t = \frac{\text{Log}\, 6 - \text{Log}\, 5}{\text{Log}\, 1{,}06} = \frac{0{,}77815 - 0{,}69897}{0{,}02531} = \frac{0{,}07918}{0{,}02532} = 3{,}1\ldots$$

Значитъ, нельзя предположить, что t есть число цѣлое, и потому, если только въ задачѣ подразумѣвается условіе, что за часть года нарастаніе идетъ по закону простыхъ процентовъ, мы не имѣемъ права пользоваться формулою [1]. Но не трудно понять, что найденный изъ этой формулы результатъ невѣренъ только относительно части года, а не цѣлаго числа

лѣтъ. Такимъ образомъ, мы можемъ въ формулѣ [2] (§ 319) на мѣсто t подставить найденное число 3, послѣ чего получимъ:

$$6000=5000.1{,}06^3\left(1+\frac{0.06k}{360}\right) \text{ или } 6=5\,1{,}06^3\left(1+\frac{0\,01k}{60}\right);$$

откуда: $$\text{Log}\left(1+\frac{0{,}01k}{60}\right)=\text{Log } 6-\text{Log } 5-3 \text{ Log } 1{,}06=0{,}00325.$$

По таблицамъ находимъ: $1+\frac{0{,}01k}{60}=1{,}0075$; откуда $k=45$.

Слѣд., искомое время есть 3 года 45 дней.

321. Основная задача на срочныя уплаты. Нѣкто занялъ a рублей по $p^0/_0$ съ условіемъ погасить долгъ, вмѣстѣ съ причитающимися на него процентами, въ t лѣтъ, внося въ концѣ каждаго года одну и ту же сумму. Какова должна быть эта сумма?

Сумма x, вносимая ежегодно при такихъ условіяхъ, называется срочною уплатою. Обозначимъ опять буквою r ежегодныя процентныя деньги съ 1 рубля, т.-е. число $\frac{p}{100}$. Тогда къ концу 1-го года долгъ a возрастетъ до $a(1+r)$, а за уплатою x рублей онъ сдѣлается $a(1+r)-x$. Къ концу 2-го года каждый рубль этой суммы снова обратится въ $1+r$ рублей, и потому долгъ будетъ $[a(1+r)-x](1+r)=a(1+r)^2-x(1+r)$, а за уплатою x рублей окажется: $a(1+r)^2-x(1+r)-x$. Такимъ же образомъ убѣдимся, что къ концу 3-го года долгъ будетъ $a(1+r)^3-x(1+r)^2-x(1+r)-x$ и вообще къ концу t-го года онъ окажется:

$$a(1+r)^t-x(1+r)^{t-1}-x(1+r)^{t-2}\ldots-x(1+r)-x$$

или $$a(1+r)^t-x[1+(1+r)+(1+r)^2+\ldots+(1+r)^{t-2}+(1+r)^{t-1}].$$

Многочленъ, стоящій внутри скобокъ [ ], представляетъ сумму членовъ геометрической прогрессіи, у которой первый членъ есть 1, послѣдній $(1+r)^{t-1}$, а знаменатель $(1+r)$. По формулѣ для суммы членовъ геометрической прогрессіи (§ 293) находимъ, что этотъ многочленъ равенъ:

$$s=\frac{lq-a}{q-1}=\frac{(1+r)^{t-1}(1+r)-1}{(1+r)-1}=\frac{(1+r)^t-1}{r}.$$

Вслѣдствіе этого величину долга послѣ t-ой уплаты можно написать такъ:

$$a(1+r)^t - x\frac{(1+r)^t-1}{r}.$$

По условію задачи, долгъ въ концѣ t-го года долженъ равняться 0; поэтому

$$a(1+r)^t - x\frac{(1+r)^t-1}{r} = 0, \text{ откуда } x = \frac{a(1+r)^t r}{(1+r)^t-1}. \qquad [1]$$

При вычисленіи этой **формулы срочныхъ уплатъ** помощью логариѳмовъ мы должны сначала найти вспомогательное число $N=(1+r)^t$ по логариѳму: $\text{Log } N = t \text{ Log } (1+r)$; найдя N, вычтемъ изъ него 1; тогда получимъ знаменателя формулы для x, послѣ чего вторичнымъ логариѳмированіемъ найдемъ:

$$\text{Log } x = \text{Log } a + \text{Log } r + \text{Log } N - \text{Log } (N-1).$$

322. По даннымъ тремъ изъ чиселъ: x, a, r и t опредѣлить четвертое. Та же формула можетъ служить для рѣшенія и такихъ задачъ, въ которыхъ извѣстна срочная уплата, а отыскивается или занятая сумма, или время, или величина процента. Изъ нея находимъ:

для опредѣленія долга: $a = \dfrac{x[(1+r)^t-1]}{r(1+r)^t}$;

для опредѣленія времени: $(1+r)^t = \dfrac{x}{x-ar}$;

откуда: $$t = \frac{\text{Log } x - \text{Log } (x-ar)}{\text{Log } (1+r)}.$$

Въ послѣднемъ случаѣ задача окажется невозможною, если $x \leqq ar$, такъ какъ отрицательныя числа не имѣютъ логариѳмовъ, а $\text{Log } 0 = -\infty$ (слѣд., $t=+\infty$); невозможность задачи видна и a priori, такъ какъ произведеніе ar означаетъ ежегодныя процентныя деньги, а если срочная уплата меньше процентныхъ денегъ, или равна имъ, то, конечно, долгъ не можетъ быть погашенъ ни въ какое число лѣтъ. Задача также невозможна, если для t получается дробное число: заключающееся въ этомъ

дробномъ числѣ цѣлое число n означаетъ, что n срочными уплатами долгъ не покрывается вполнѣ, а $n+1$ уплатами онъ покрывается съ избыткомъ.

Когда неизвѣстна величина процента, мы получаемъ уравненіе степени $(t+1)$-й, которое элементарно можетъ быть рѣшено только приблизительно, посредствомъ подстановки въ формулу[1] на мѣсто r произвольныхъ чиселъ до тѣхъ поръ, пока не получится для x числа, близкаго къ заданному.

323. Основная задача на срочные взносы. Нѣкто вноситъ въ банкъ въ началѣ каждаго года одну и ту же сумму a руб. Опредѣлить, какой капиталъ образуется изъ этихъ ежегодныхъ взносовъ по прошествіи t лѣтъ, если банкъ платитъ по p сложныхъ процентовъ.

Обозначивъ черезъ r ежегодныя процентныя деньги съ 1 рубля, т.-е. $\frac{p}{100}$, разсуждаемъ такъ: къ концу 1-го года капиталъ будетъ $a(1+r)$; въ началѣ 2-го года къ этой суммѣ прибавится a руб.; значитъ, въ это время капиталъ окажется $a(1+r)+a$. Къ концу 2-го года онъ будетъ $a(1+r)^2+a(1+r)$; въ началѣ 3-го года снова вносится a руб.; значитъ, въ это время капиталъ будетъ $a(1+r)^2+a(1+r)+a$; къ концу 3-го года онъ окажется $a(1+r)^3+a(1+r)^2+a(1+r)$. Продолжая эти разсужденія далѣе, найдемъ, что къ концу t-го года искомый капиталъ A будетъ:

$$A=a(1+r)^t+a(1+r)^{t-1}+a(1+r)^{t-2}+\ldots+a(1+r)=$$
$$=a(1+r)[(1+r)^{t-1}+(1+r)^{t-2}+\ldots+1]=$$
$$=a(1+r)\frac{(1+r)^{t-1}(1+r)-1}{(1+r)-1}=\mathbf{a(1+r)\frac{(1+r)^t-1}{r}}.$$

Такова **формула срочныхъ взносовъ,** дѣлаемыхъ въ началѣ каждаго года.

Ту же формулу можно было бы получить и такимъ разсужденіемъ. Первый взносъ въ a рублей, находясь въ банкѣ t лѣтъ, обратится, согласно формулѣ сложныхъ процентовъ (§ 318),

въ $a(1+r)^t$ руб. Второй взносъ, находясь въ банкѣ однимъ годомъ меньше, т.-е. $t-1$ лѣтъ, обратится въ $a(1+r)^{t-1}$ руб. Подобно этому третій взносъ дастъ $a(1+r)^{t-2}$ и т. д. и, наконецъ, послѣдній взносъ находясь въ банкѣ только 1 годъ, обратится въ $a(1+r)$ руб.

Значитъ, окончательный капиталъ A руб. будетъ:

$$A=a(1+r)^t+a(1+r)^{t-1}+a(1+r)^{t-2}+\ldots+a(1+r),$$

что, послѣ упрощенія, даетъ найденную выше формулу.

При вычисленіи помощью логариѳмовъ этой формулы надо поступить такъ же, какъ и при вычисленіи формулы срочныхъ уплатъ, т.-е. сначала найти число $N=(1+r)^t$ по его логариѳму: $\text{Log}\, N=t\, \text{Log}\,(1+r)$, затѣмъ число $N-1$ и уже тогда логариѳмировать формулу:

$$\text{Log}\, A=\text{Log}\, a+\text{Log}\,(1+r)+\text{Log}\,(N-1)-\text{Log}\, r.$$

Замѣчанія. 1°. Если бы срочный взносъ въ a руб. производился не въ началѣ, а въ концѣ каждаго года (какъ, напр., вносится срочная плата x для погашенія долга § 321), то, разсуждая подобно предыдущему, найдемъ, что къ концу t-го года искомый капиталъ A' руб. будетъ (считая въ томъ числѣ и послѣдній взносъ a руб., не приносящій процентовъ):

$$A'=a(1+r)^{t-1}+a(1+r)^{t-2}+\ldots+a(1+r)+a,$$

что равно

$$A'=a\cdot\frac{[(1+r)^t-1]}{r},$$

т.-е. A' оказывается въ $(1+r)$ разъ менѣе A, что и надо было ожидать, такъ какъ каждый рубль капитала A' лежитъ въ банкѣ годомъ меньше, чѣмъ соотвѣтствующій рубль капитала A.

2°. Существуютъ особыя таблицы, въ которыхъ выписаны значенія множителей:

$\dfrac{(1+r)^t r}{(1+r)^t r-1}$ (для срочн. уплатъ) и $\dfrac{(1+r)^t-1}{r}$ (для срочн. взносовъ) для разныхъ r и t.

ОТДѢЛЪ IX.

Соединенія, биномъ Ньютона и непрерывныя дроби.

ГЛАВА I.

Соединенія.

324. Опредѣленіе соединеній и ихъ раздѣленіе. Различныя группы, составленныя изъ данныхъ предметовъ и отличающіяся одна отъ другой или порядкомъ этихъ предметовъ, или самими предметами, называются соединеніями. Предметы, входящіе въ соединенія, наз. элементами и обозначаются буквами a, b, c, d...

Соединенія могутъ быть трехъ родовъ: размѣщенія (arrangements), перестановки (permutations) и сочетанія (combinaisons). Разсмотримъ ихъ отдѣльно.

325. Размѣщенія. Размѣщеніями изъ данныхъ m элементовъ по n ($n \leqq m$) называются такія соединенія, изъ которыхъ каждое содержитъ n элементовъ, взятыхъ изъ данныхъ m элементовъ, и которыя отличаются одно отъ другого или порядкомъ элементовъ, или самими элементами.

Напр., слѣдующія соединенія представляютъ собою размѣщенія изъ 4 элементовъ a, b, c, d по 2:

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,$$
$$ba,\ ca,\ da,\ cb,\ db,\ dc.$$

Изъ нихъ нѣкоторыя, напр. ab и ba, отличаются только порядкомъ элементовъ, а другія, какъ ab и ac, отличаются элементами.

Размѣщенія изъ данныхъ m элементовъ могутъ быть по 1, по 2, по 3..., и, наконецъ, по m.

Иногда бываетъ нужно знать число всевозможныхъ размѣщеній изъ m элементовъ по n, не составляя самихъ размѣщеній. Условимся это число обозначать символомъ A (здѣсь A есть начальная буква слова arrangement). Чтобы найти это число, разсмотримъ пріемъ, посредствомъ котораго можно составлять всевозможныя размѣщенія.

Пусть намъ дано m элементовъ:

$$a, b, c, \ldots k, l.$$

Сначала составимъ изъ нихъ всѣ размѣщенія по одному. Ихъ будетъ, очевидно, m. Значитъ: $A_m^1 = m$. Теперь составимъ всѣ размѣщенія по 2. Для этого къ каждому изъ размѣщеній по одному будемъ приставлять послѣдовательно всѣ оставшіеся элементы по одному:

$$m\begin{cases} ab, ac, ad, \ldots ak, al & (m-1 \text{ разм.}) \\ ba, bc, bd, \ldots bk, bl & (m-1 \text{ разм.}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ la, lb, lc \ldots\ldots\ldots lk & (m-1 \text{ разм.}) \end{cases}$$

Такъ, къ элементу a приставимъ послѣдовательно оставшіеся элементы: b, c, d,...k, l, къ элементу b приставимъ послѣдовательно оставшіеся элементы: a, c, d,...k, l, и т. д. Такъ какъ всѣхъ элементовъ m, то каждому размѣщенію по 1 элементу соотвѣтствуетъ $m-1$ оставшихся элементовъ, и потому изъ каждаго размѣщенія по одному элементу мы получимъ $m-1$ размѣщеній по 2 элемента, а всего ихъ будетъ $m(m-1)$. Очевидно, что другихъ размѣщеній по 2 элемента быть не можетъ. Такимъ образомъ:

$$A_m^2 = m(m-1).$$

Чтобы составить теперь размѣщенія по 3, беремъ каждое изъ размѣщеній по 2 и приставляемъ къ нему послѣдовательно по одному всѣ $m-2$ оставшихся элемента. Тогда получимъ слѣдующія соединенія:

$$m(m-1)\begin{cases} abc, abd, \ldots abk, abl & (m-2 \text{ разм.}) \\ acb, acd, \ldots ack, acl & (m-2 \text{ раз.}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ lka, lkb \ldots\ldots\ldots & (m-2 \text{ разм.}) \end{cases}$$

Такъ какъ число размѣщеній по 2 равно $m(m-1)$ и изъ каждаго размѣщенія по 2 получается $m-2$ размѣщенія по 3, то всѣхъ такихъ размѣщеній окажется $m(m-1)(m-2)$.

Законъ этотъ обладаетъ общностью, такъ какъ процессъ перехода отъ размѣщеній изъ m элементовъ по p къ размѣщеніямъ изъ m элементовъ по $p+1$ одинъ и тотъ же для всякой величины p.

Замѣтивъ это, можемъ писать вообще:

$$A_n^m = m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)].$$

Такова **формула размѣщеній;** ее можно выразить такъ: **число всевозможныхъ размѣщеній изъ m элементовъ по n равно произведенію n послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, изъ которыхъ бóльшее есть m.** Такимъ образомъ:

$A_4^2=4\,.\,3=12$, $A_4^3=4\,.\,3\,.\,2=24$, $A_8^4=8\,.\,7\,.\,6\,.\,5=1680$, и т. п.

Примѣры. 1°. Въ классѣ 10 учебныхъ предметовъ и 5 разныхъ уроковъ въ день. Сколькими способами могутъ быть распредѣлены уроки въ день?

Всевозможныя распредѣленія уроковъ въ день представляютъ собою, очевидно, всевозможныя размѣщенія изъ 10 элементовъ по 5; поэтому всѣхъ способовъ распредѣленія будетъ:

$$A_{10}^5=10\,.\,9\,.\,8\,.\,7\,.\,6=30240.$$

2°. Сколько можно образовать цѣлыхъ чиселъ, изъ которыхъ каждое выражалось бы тремя различными значащими цыфрами?

Искомое число представляетъ собою число размѣщеній изъ 9 значащихъ цыфръ по 3; слѣд., оно равно $9\,.\,8\,.\,7=504$.

3°. Сколько можно образовать цѣлыхъ чиселъ, изъ которыхъ каждое выражалось бы тремя различными цыфрами?

Изъ 10 цыфръ можно составить размѣщеній по три: $10\,.\,9\,.\,8=720$; но изъ этого числа надо исключить число тѣхъ размѣщеній по три, которыя начинаются съ цыфры 0; такихъ

размѣщеній будетъ столько, сколько можно составить размѣщеній по 2 изъ 9 значащихъ цыфръ, т.-е. 9 . 8=72; слѣдовательно, искомое число=720—72=648.

326. Перестановки. Перестановками изъ данныхъ m элементовъ наз. такія соединенія, изъ которыхъ каждое содержитъ всѣ m элементовъ и которыя отличаются одно отъ другого только порядкомъ ихъ. Напримѣръ, перестановки изъ трехъ элементовъ a, b и c будутъ такія соединенія: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Изъ этого опредѣленія видно, что перестановки представляютъ собою частный случай размѣщеній, а именно: перестановки изъ m элементовъ суть размѣщенія изъ m элементовъ по m.

Число всевозможныхъ перестановокъ изъ m элементовъ обозначается символомъ P_m (здѣсь P есть начальная буква слова permutation).

. Такъ какъ $P_m=A_m^m$, то формула перестановокъ есть слѣдующая:

$$P_m=m(m-1)(m-2)\ldots3\,.\,2\,.\,1=\mathbf{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-1)m},$$

т.-е. **число всевозможныхъ перестановокъ изъ m элементовъ равно произведенію натуральныхъ чиселъ отъ 1 до m**[1]).

Примѣры. 1°. Сколько девятизначныхъ чиселъ можно написать девятью разными значащими цыфрами?

Искомое число есть P_9=1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9=362880.

2°. Сколькими способами можно размѣстить 12 лицъ за столомъ, на которомъ поставлено 12 приборовъ?

Число способовъ=1 . 2 . 3 . . . 12=479001600.

---

[1]) Произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до m включительно обозначается иногда сокращенно такъ: m! Численная величина этого произведенія растетъ чрезвычайно быстро съ возрастаніемъ m; такъ, при m=10 это произведеніе даетъ 3628800, при m=100 оно выражается числомъ, требующимъ 158 цыфръ для своего изображенія.

327. Сочетанія. **Сочетаніями изъ данныхъ m элементовъ по n ($n \leqslant m$) наз. такія соединенія, изъ которыхъ каждое содержитъ n элементовъ, взятыхъ изъ данныхъ m элементовъ, и которыя отличаются одно отъ другого по крайней мѣрѣ однимъ элементомъ.**

Напримѣръ, изъ 4 элементовъ a, b, c и d сочетанія по 3 будутъ:

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd.$$

Сочетанія изъ m элементовъ могутъ быть: по 1, по 2, по 3... и, наконецъ, по m (въ послѣднемъ случаѣ получается только одно сочетаніе).

Изъ опредѣленія видно, что сочетанія представляютъ собою тѣ размѣщенія, которыя отличаются одно отъ другого элементами. Это обстоятельство позволяетъ найти число всѣхъ сочетаній изъ m элем. по n, обозначаемое символомъ C_m^n (здѣсь C есть начальная буква слова combinaison). Въ самомъ дѣлѣ, если, найдя всѣ сочетанія изъ m элем. по n, мы сдѣлаемъ въ каждомъ изъ нихъ всевозможныя перестановки, то получимъ всѣ размѣщенія изъ m элем. по n. Напримѣръ, сдѣлавъ въ каждомъ изъ написанныхъ выше сочетаній изъ 4 элем. по 3 всевозможныя перестановки, получимъ всевозможныя размѣщенія изъ 4 элементовъ по 3:

abc	abd	acd	bcd
acb	adb	adc	bdc
bac	bad	cad	cbd
bca	bda	cda	cdb
cab	dab	dac	dbc
cba	dba	dca	dcb.

Дѣйствительно, во-первыхъ, эти соединенія суть различныя размѣщенія, такъ какъ они отличаются одно отъ другого или порядкомъ элементовъ, или самими элементами; во-вторыхъ, въ этихъ соединеніяхъ должны встрѣтиться всѣ размѣщенія изъ 4 элементовъ по 3, такъ какъ, если бы могло быть размѣщеніе, не встрѣчающееся въ полученныхъ соедине-

ніяхъ, то оно отличалось бы отъ нихъ или порядкомъ, или элементами; если порядкомъ, то это значило бы, что мы не сдѣлали всевозможныхъ перестановокъ; если элементами, то это значило бы, что мы не сдѣлали всевозможныхъ сочетаній.

Изъ этого слѣдуетъ, что число всѣхъ размѣщеній изъ m элем. по n равно числу всѣхъ сочетаній изъ m элем. по n, умноженному на число всѣхъ перестановокъ, какія можно сдѣлать изъ n элементовъ; другими словами:

$$A_m^n = C_m^n \,.\, P_n.$$

Отсюда выводимъ слѣдующую **формулу сочетаній:**

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1 \ \dots \ m[-(n-1)]}{1.2.3 \dots n} \qquad (1)$$

Такимъ образомъ, $C_4^2 = \frac{4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2} = 6$, $C_4^3 = \frac{4 \,.\, 3 \,.\, 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 4$, и т. д.

Примѣры. 1°. Изъ 10 кандидатовъ на одну и ту же должность должны быть выбраны трое. Сколько можетъ быть разныхъ случаевъ?

Искомое число, очевидно, представляетъ число всевозможныхъ сочетаній изъ 10 элементовъ по 3, т.-е.

$$C_{10}^3 = \frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 120.$$

2°. Сколькими способами можно выбрать 13 картъ изъ колоды въ 52 карты?

Искомое число представляетъ собой число сочетаній изъ 52 по 13, т.-е.

$$C_{52}^{13} = \frac{52 \,.\, 51 \,.\, 50 \dots 40}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots 13} = 635\ 013\ 559\ 600.$$

328. Другой видъ формулы сочетаній. Формулѣ (1) можно дать иной видъ, если умножимъ числителя и знаменателя ея на произведеніе: $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots (m-n)$; тогда въ числителѣ получимъ произведеніе натуральныхъ чиселъ

отъ 1 до m, а въ знаменателѣ—произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n, умноженное на произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до $m-n$:

$$C_m^n = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(m-1)m}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(m-n)} = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}}. \qquad (2)$$

329. Свойство сочетаній. Замѣняя въ формулѣ (2) n на $m-n$, получаемъ:

$$C_m^{m-n} = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(m-1)m}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(m-n)\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n} = \frac{P_m}{P^{m-n}P^{n}}.$$

Сравнивая эту формулу со (2), находимъ:

$$C_m^n = C_m^{m-n},$$

т.-е. число сочетаній изъ m элементовъ по n равно числу сочетаній изъ m элементовъ по $m-n$.

Къ этому выводу приводитъ и такое простое разсужденіе: если изъ m элементовъ отберемъ какіе-нибудь n, чтобы составить изъ нихъ одно сочетаніе, то совокупность оставшихся элементовъ составитъ одно сочетаніе изъ $m-n$ элементовъ. Такимъ образомъ, каждому сочетанію, состоящему изъ n элементовъ, соотвѣтствуетъ одно сочетаніе изъ $m-n$ элементовъ, и наоборотъ; отсюда слѣдуетъ, что $C_m^n = C_m^{m-n}$.

Выведенное соотношеніе позволяетъ упростить нахожденіе числа сочетаній изъ m элементовъ по n, когда n превосходитъ $\frac{1}{2}m$. Напримѣръ:

$$C_{100}^{97} = C_{100}^{3} = \frac{100\,.\,99\,.\,98}{1\,.\,2\,.\,3} = 161700.$$

Замѣчаніе. Такъ какъ C_m^n есть число цѣлое, то формула (1) показываетъ, что произведеніе n послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ дѣлится на произведеніе n первыхъ натуральныхъ чиселъ.

ГЛАВА II.

Биномъ Ньютона.

330. Предварительное замѣчаніе. Въ этой главѣ мы ставимъ цѣлью преобразовать степень бинома $(a+b)^m$, въ которой показатель m есть число цѣлое и положительное, въ многочленъ, расположенный по степенямъ буквъ a и b (частные случаи такого преобразованія мы имѣли уже въ формулахъ: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ и $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$). Для этого предварительно найдемъ произведеніе m биномовъ: $x+a$, $x+b$, $x+c$,..., въ которыхъ первые члены одинаковы (мы ихъ обозначимъ буквою x), а вторые члены разные: a, b, c... и т. д. Найдя такое произведеніе, мы затѣмъ предположимъ, что и вторые члены одинаковы, т.-е. $a=b=c=...$

331. Произведеніе биномовъ, отличающихся только вторыми членами. Обыкновеннымъ умноженіемъ находимъ:

$$(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab;$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)=[x^2+(a+b)x+ab](x+c)=$$
$$=x^3+(a+b)x^2+abx+cx^2+(ac+bc)x+abc=$$
$$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc.$$

Подобно этому найдемъ:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3+$$
$$+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.$$

Разсматривая получившіяся произведенія, замѣчаемъ, что всѣ они составлены по одному и тому же закону, а именно:

Произведеніе представляетъ многочленъ, расположенный по убывающимъ степенямъ буквы x.

Показатель перваго члена равенъ числу перемножаемыхъ биномовъ; показатели при x въ слѣдующихъ членахъ постепенно убываютъ на 1; послѣдній членъ не содержитъ x.

Коэффиціентъ 1-го члена есть 1; коэффиціентъ 2-го члена есть сумма всѣхъ вторыхъ членовъ перемножаемыхъ биномовъ;

коэффиціентъ 3-го члена есть сумма произведеній вторыхъ членовъ, взятыхъ по два; коэффиціентъ 4-го члена есть сумма произведеній вторыхъ членовъ, взятыхъ по три.

Послѣдній членъ есть произведеніе всѣхъ вторыхъ членовъ.

Докажемъ, что этотъ законъ примѣнимъ къ произведенію какого угодно числа биномовъ. Для этого предварительно убѣдимся, что если онъ вѣренъ для произведенія m биномовъ:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ \dots\ (x+k),$$

то будетъ вѣренъ и для произведенія $m+1$ биномовъ:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ \dots\ (x+k)(x+l).$$

Итакъ, допустимъ, что вѣрно слѣдующее равенство:

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\dots(x+k)=x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+\dots+S_m,$$

гдѣ S_1 означаетъ сумму всѣхъ вторыхъ членовъ, S_2—сумму произведеній изо всѣхъ вторыхъ членовъ, взятыхъ по два, S_3—сумму произведеній изо всѣхъ вторыхъ членовъ, взятыхъ по три, и т. д.; наконецъ, S_m есть произведеніе всѣхъ вторыхъ членовъ.

Умноживъ обѣ части этого равенства на биномъ $x+l$, найдемъ:

$$(x+a)(x+b)\dots(x+k)(x+l)=(x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+\ \dots+S_m)(x+l)=$$
$$=x^{m+1}+S_1x^m+S_2x^{m-1}+\dots+S_mx+lx^m+lS_1x^{m-1}+\dots+lS_{m-1}x+lS_m=$$
$$=x^{m+1}+(S_1+l)x^m+(S_2+lS_1)x^{m-1}+\dots+(S_m+lS_{m-1})x+lS_m.$$

Разсматривая это новое произведеніе, убѣждаемся, что оно подчиняется такому же закону, какой мы предположили вѣрнымъ для m биномовъ. Дѣйствительно: во-1-хъ) этому закону слѣдуютъ показатели буквы x; во-2-хъ) коэффиціентъ 2-го члена S_1+l представляетъ сумму всѣхъ вторыхъ членовъ перемножаемыхъ биномовъ, включая сюда и l; коэффиціентъ 3-го члена S_2+lS_1 есть сумма парныхъ произведеній всѣхъ вторыхъ членовъ, включая сюда и l, и т. д.; наконецъ, lS_m есть произведеніе всѣхъ вторыхъ членовъ: a, b, $c\dots k$, l.

Мы выше видѣли, что разсматриваемый законъ вѣренъ для 4 биномовъ; слѣд., по доказанному теперь, онъ вѣренъ для

4+1, т.-е. для 5 биномовъ; если же онъ вѣренъ для 5 биномовъ, то онъ вѣренъ и для 6 биномовъ, и т. д.

Изложенное разсужденіе представляетъ такъ называемое «доказательство отъ m къ $m+1$». Оно часто употребляется для показанія общности какого-нибудь правила или свойства [1]).

332. Формула бинома Ньютона и ея свойства.

Предположимъ, что въ доказанномъ нами равенствѣ:

$(x+a)(x+b)\ldots(x+k)=x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+S_3x^{m-3}+\ldots+S_m$

всѣ вторые члены биномовъ одинаковы, т.-е. $a=b=c=\ldots=k$.

Тогда лѣвая часть его будетъ степень бинома $(x+a)^m$. Посмотримъ, во что обратятся коэффиціенты $S_1, S_2,\ldots S_m$.

Коэффиціентъ S_1, равный $a+b+c+\ldots+k$, обратится въ ma. Коэффиціентъ S_2, равный $ab+ac+ad+\ldots$, обратится въ a^2, повторенное столько разъ, сколько можно составить сочетаній изъ m элементовъ по два, т.-е. онъ обратится въ $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2$. Коэффиціентъ S_3, равный $abc+abd+\ldots$, обратится въ a^3, повторенное столько разъ, сколько можно составить сочетаній изъ m элементовъ по 3, т.-е. въ $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3$, и т. д. Наконецъ, коэффиціентъ S_m, равный $abc\ldots k$, обратится въ a^m.

Такимъ образомъ, мы получимъ:

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2x^{m-2}+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3x^{m-3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}a^nx^{m-n}+\ldots+a^m.$$

Это равенство извѣстно подъ именемъ формулы би-

[1]) Это доказательство наз. также „математической индукціей“ или „совершенной индукціей“. Замѣтимъ, что въ предыдущихъ главахъ этого учебника неоднократно представлялся случай примѣнить доказательство отъ m къ $m+1$ (напр., при выводѣ формулы квадрата многочлена, § 158, формулы для любого члена прогрессіи, §§ 287 и 292, формулы сложныхъ процентовъ, § 318, и др.). Мы этого не дѣлали только ради простоты изложенія

нома Ньютона (или просто бинома Ньютона)[1]). Разсмотримъ особенности многочлена, стоящаго въ правой части формулы (называемаго разложеніемъ бинома):

1) Показатели буквы x постепенно уменьшаются на 1 отъ перваго члена къ послѣднему, при чемъ въ первомъ членѣ показатель x равенъ показателю степени бинома, а въ послѣднемъ онъ есть 0; наоборотъ, показатели a постепенно увеличиваются на 1 отъ перваго члена къ послѣднему, при чемъ въ первомъ членѣ показатель при a есть 0, а въ послѣднемъ онъ равенъ показателю степени бинома. Вслѣдствіи этого **сумма показателей при x и a въ каждомъ членѣ равна показателю степени бинома.**

2) **Число всѣхъ членовъ разложенія есть $m+1$,** такъ какъ разложеніе содержитъ всѣ послѣдовательныя степени a отъ 0 до m включительно.

3) Коэффиціентъ 1-го члена равенъ 1; коэффиціентъ 2-го члена есть показатель степени бинома; коэффиціентъ 3-го члена представляетъ число сочетаній изъ m элементовъ по 2; коэффиціентъ 4-го члена—число сочетаній изъ m элем. по 3; вообще, **коэффиціентъ $(n+1)$-го члена есть число сочетаній изъ m элементовъ по n.** Наконецъ, коэффиціентъ послѣдняго члена равенъ числу сочетаній изъ m элементовъ по m, т.-е. 1.

Замѣтимъ, что всѣ эти коэффиціенты наз. биноміальными коэффиціентами.

4) Обозначая каждый членъ разложенія буквою T съ цыфрою внизу, указывающею мѣсто этого члена въ разложеніи, т.-е. первый членъ T_1, второй членъ T_2 и т. д., мы можемъ написать:

$$T_{n+1}=C_m^n a^n x^{m-n}=\frac{m(m-1)\dots[m-(n-1)]}{1.2.3\dots n}a^n x^{m-n}.$$

Эта формула представляетъ собою **общій членъ разложенія,**

[1] Исаакъ Ньютонъ, знаменитый англійскій математикъ, жилъ отъ 1642 г по 1727 г Формула бинома не только для m цѣлаго положительнаго, но и для отрицательнаго и дробнаго, была имъ указана около 1665 г Однако строгаго доказательства ея онъ не далъ Для цѣлыхъ положительныхъ показателей формула была впервые доказана Яковомъ Бернулли (1654—1705) съ помощью теоріи соединеній.

потому что изъ нея мы можемъ получить всѣ члены (кромѣ перваго), подставляя на мѣсто n числа: 1, 2, 3...m.

5) Коэффиціентъ 1-го члена отъ начала разложенія равенъ 1, коэффиціентъ 1-го члена отъ конца есть C_m^m, т.-е. тоже 1. Коэффиціентъ 2-го члена отъ начала есть m; т.-е. C_m^1, коэффиціентъ 2-го члена отъ конца есть C_m^{m-1}; но $C_m^1 = C_m^{m-1}$ (§ 329); коэффиціентъ 3-го члена отъ начала есть C_m^2, а 3-го члена отъ конца есть C_m^{m-2}; но $C_m^2 = C_m^{m-2}$, и т. д. [1]). Значитъ, **коэффиціенты членовъ, одинаково удаленныхъ отъ концовъ разложенія, равны между собою.**

6) Разсматривая биноміальные коэффиціенты:

$$1,\ m,\ \frac{m(m-1)}{1\ .\ 2},\ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3},\ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4}\dots$$

замѣчаемъ, что при переходѣ отъ одного коэффиціента къ слѣдующему числители умножаются на числа все меньшія и меньшія (на $m-1$, на $m-2$, на $m-3$, и т. д.), а знаменатели умножаются на числа все бóльшія и бóльшія (на 2, на 3, на 4, и т. д.). Вслѣдствіе этого коэффиціенты сначала возрастаютъ (пока множители въ числителѣ остаются бóльшими соотвѣтственныхъ множителей въ знаменателѣ), а затѣмъ убываютъ. Такъ какъ коэффиціенты членовъ, равноотстоящихъ отъ концовъ строки, одинаковы, то **членъ съ наибольшимъ коэффиціентомъ находится посрединѣ разложенія.** При этомъ надо различать два случая: первый, когда показатель бинома число четное, и второй, когда онъ число нечетное. Въ первомъ случаѣ число всѣхъ членовъ разложенія нечетное; тогда посрединѣ будетъ одинъ членъ съ наибольшимъ коэффиціентомъ. Во второмъ случаѣ число всѣхъ членовъ четное, и такъ какъ коэффиціенты членовъ, одинаково удаленныхъ отъ концовъ разложенія, одинаковы, то посрединѣ должны быть два члена съ одинаковыми наибольшими коэффиціентами.

---

[1]) Вообще, у $(n+1)$ го члена отъ начала коэффиціентъ есть C_m^n; $(n+1)$-й членъ отъ конца занимаетъ отъ начала ряда мѣсто $(m+1)-(n+1)+1= =m-n+1$; поэтому его коэффиціентъ есть C_m^{m-n}; но $C_m^n = C_m^{m-n}$; слѣд., коэффиціенты у этихъ членовъ одинаковы.

Примѣры: 1) $(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$;
2) $(x+a)^5=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5$.

7) Изъ сравненія двухъ рядомъ стоящихъ членовъ:

$$T_{n+1}=\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}a^n x^{m-n},$$

$$T_{n+2}=\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)](m-n)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n(n+1)}a^{n+1}x^{m-n-1},$$

слѣдуетъ: **чтобы получить коэффиціентъ слѣдующаго члена, достаточно коэффиціентъ предыдущаго члена умножить на показателя буквы x въ этомъ членѣ и раздѣлить на число членовъ, предшествующихъ опредѣляемому.**

Это свойство коэффиціентовъ значительно облегчаетъ разложеніе; такъ, пользуясь имъ, можемъ сразу писать:

$$(x+a)^7=x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4+\ldots$$

Написавъ члены до середины ряда, остальные получимъ основываясь на свойствѣ 5-мъ:

$$\ldots+35a^4x^3+21a^5x^2+7a^6x+a^7$$

8) **Сумма всѣхъ биноміальныхъ коэффиціентовъ равна 2^m.** Дѣйствительно, положивъ въ формулѣ бинома $x=a=1$, получимъ:

$$2^m=1+m+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots+1.$$

9) Замѣнивъ въ формулѣ бинома Ньютона a на $-a$, получимъ:

$$(x-a)^m=x^m+m(-a)x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}(-a)^2x^{m-2}+\ldots(-a)^m$$

т. е. $$(x-a)^m=x^m-max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2x^{m-2}-\ldots+(-1)^m a^m,$$

и, слѣд., въ разложеніи $(x-a)^m$ знаки + и — чередуются.

10) Положивъ въ послѣднемъ равенствѣ $x=a=1$, находимъ:

$$0=1-m+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots+(-1)^m,$$

т.-е. сумма биноміальныхъ коэффиціентовъ, стоящихъ на не-

четныхъ мѣстахъ, равна суммѣ биноміальныхъ коэффиціентовъ, стоящихъ на четныхъ мѣстахъ.

333. Практическій пріемъ. Когда x и a означаютъ какія-либо сложныя алгебраическія выраженія, то, для удобства примѣненія формулы бинома, обыкновенно поступаютъ такъ: пишутъ въ одной строкѣ коэффиціенты разложенія; подъ ними, въ другой строкѣ, соотвѣтствующія степени x, т.-е. x^m, x^{m-1}, x^{m-2},... 1 (ихъ удобнѣе писать, начиная съ конца); подъ ними, въ третьей строкѣ, соотвѣтствующія степени a, т.-е. 1, a, a^2, a^3,...a^m, затѣмъ перемножаютъ соотвѣтственные члены трехъ строкъ и полученныя произведенія соединяютъ знакомъ $+$, если было дано $(x+a)^m$, и попеременно знаками $+$ и $-$, если было дано $(x-a)^m$.

Для примѣра отыщемъ разложеніе $(4a^2x^3-3b)^4$:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 256a^8x^{12} & 64a^6x^9 & 16a^4x^6 & 4a^2x^3 & 1 \\ 1 & 3b & 9b^2 & 27b^3 & 81b^4 \\ \hline \end{array}$$
$$256a^8x^{12}-768a^6bx^9+864a^4b^2x^6-432a^2b^3x^3+81b^4.$$

334. Примѣненіе формулы бинома къ многочлену. Формула бинома Ньютона позволяетъ возвышать въ степень трехчленъ и вообще многочленъ. Такъ:

$$(a+b+c)^4=[(a+b)+c]^4=(a+b)^4+4c(a+b)^3+6c^2(a+b)^2+4c^3(a+b)+c^4.$$

Разложивъ $(a+b)^4$, $(a+b)^3$, $(a+b)^2$, окончательно получимъ:

$$(a+b+c)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4+4a^3c+12a^2bc+12ab^2c+4b^3c+6a^2c^2+$$
$$+12abc^2+6b^2c^2+4ac^3+4bc^3+c^4.$$

335. Сумма одинаковыхъ степеней членовъ ариѳметической прогрессіи. Укажемъ одно изъ интересныхъ примѣненій формулы бинома. Пусть имѣемъ ариѳметическую прогрессію, содержащую $n+1$ членовъ:

$$\div a,\ b,\ c\ldots k,\ l.$$

Если разность ея d, то $b=a+d$, $c=b+d$,.. $l=k+d$. Возвысивъ эти равенства по формулѣ бинома Ньютона въ $m+1$ степень, получимъ n слѣдующихъ равенствъ:

$$b^{m+1}=(a+d)^{m+1}=a^{m+1}+(m+1)a^md+\frac{(m+1)m}{1\,.\,2}a^{m-1}d^2+\ldots+d^{m+1},$$

$$c^{m+1}=(b+d)^{m+1}=b^{m+1}+(m+1)b^md+\frac{(m+1)m}{1\,.\,2}b^{m-1}d^2+\ldots+d^{m+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$l^{m+1}=(k+d)^{m+1}=k^{m+1}+(m+1)k^md+\frac{(m+1)m}{1\,.\,2}k^{m-1}d^2+\ldots+d^{m+1},$$

Сложивъ эти равенства и положивъ для краткости:

$$S_m=a^m+b^m+c^m+\ldots+k^m,$$
$$S_{m-1}=a^{m-1}+b^{m-1}+c^{m-1}+\ldots+k^{m-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_1=a+b+c+\ldots+k,$$

получимъ (члены: b^{m+1}, k^{m+1} сократятся):

$$l^{m+1}=a^{m+1}+(m+1)dS_m+\frac{(m+1)m}{1\,.\,2}d^2S_{m-1}+\ldots+nd^{m+1}.$$

Изъ этого уравненія опредѣлимъ S_m, если извѣстны S_{m-1}, S_{m-2},.. S_1. Полагая послѣдовательно $m=1, 2, 3\ldots$, найдемъ S_1, потомъ S_2, затѣмъ S_3, и т. д.

336. Сумма одинаковыхъ степеней чиселъ натуральнаго ряда. Примѣнивъ выведенное въ предыдущемъ параграфѣ уравненіе къ прогрессіи:

$$\div\ 1, 2, 3, 4,\ldots\ n,\ n+1,$$

получимъ:

$$(n+1)^{m+1}=1+(m+1)S_m+\frac{(m+1)m}{1\,.\,2}S_{m-1}+\ldots+n$$

Полагая $m=1$, найдемъ:

$$(n+1)^2=1+2S_1+n;\ \text{откуда: } S_1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

При $m=2$ получимъ:

$$(n+1)^3=1+3S_2+3S_1+n=1+3S_2+\frac{3n(n+1)}{2}+n,$$

откуда:

$$S_2=\frac{(n+1)^3-(n+1)}{3}-\frac{3n(n+1)}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=$$

$$=\frac{n(2n^2+n+n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\,.\,\frac{2n+1}{3}=S_1\,.\,\frac{2n+1}{3}.$$

При $m=3$ находимъ:

$$(n+1)^4=1+4S_3+6S_2+4S_1+n=1+4S_3+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n,$$

откуда:

$$S_3=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=S_1^2.$$

Подобнымъ же образомъ можно было бы найти S_4, S_5 и т. д. Формулы для $m=1, 2, 3$ полезно запомнить:

1°. Сумма S_1 первыхъ степеней $=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

2°. Сумма S_2 квадратовъ $=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=(1+2+\ldots+n)\,.\,\frac{2n+1}{3}$.

3°. Сумма S_3 кубовъ $=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=S_1^2$.

ГЛАВА III.

Непрерывныя дроби.

337. Опредѣленіе. Непрерывною или цѣпною дробью называется дробь вида:

$$a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots}}}\quad \text{или короче:}\quad a+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots,$$

гдѣ цѣлое число a складывается съ дробью, у которой числитель есть 1, а знаменатель цѣлое число a_1, сложенное съ дробью, у которой числитель есть 1, а знаменатель цѣлое число a_2, сложенное съ дробью, и т. д. (всѣ цѣлыя числа предполагаются положительными, число a можетъ быть 0).

Дроби: $\frac{a}{1}$, $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$ и т. д. наз. составляющими дробями или звеньями. Непрерывная дробь наз. конечною или безконечною, смотря по тому, будетъ ли у нея число звеньевъ конечное или безконечное. Мы будемъ разсматривать сначала только дроби конечныя.

Написанную выше непрерывную дробь сокращенно изображаютъ такъ:

$$(a,\ a_1,\ a_2,\ a_3\ldots).$$

Напримѣръ, дроби: $3+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{17}$

сокращенно изображаются: (3, 2, 1, 3) и (0, 2, 1, 17).

338. Теорема. Всякую конечную непрерывную дробь можно обратить въ равную ей обыкновенную.

Док. Непрерывная дробь представляетъ собою рядъ ариѳметическихъ дѣйствій надъ цѣлыми и дробными числами, а именно:

сложенія (указывается знакомъ +) и дѣленія (указывается горизонтальной чертой); если данная непрерывная дробь конечная, то число этихъ дѣйствій к о н е ч н о, и мы можемъ ихъ выполнить. Въ результатѣ получимъ обыкновенную дробь. Пусть, напр., имѣемъ такую непрерывную дробь:

$$(2,\ 3,\ 1,\ 4)=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}.$$

Производимъ указанныя дѣйствія:

$$1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4},\ \ 1:\frac{5}{4}=\frac{4}{5},\ \ 3+\frac{4}{5}=\frac{19}{5},\ \ 1:\frac{19}{5}=\frac{5}{19},\ \ 2+\frac{5}{19}=\frac{43}{19}.$$

Это и есть обыкновенная дробь, равная данной непрерывной.

339. Обратная теорема. Всякую положительную обыкновенную дробь можно обратить (развернуть) въ равную ей конечную непрерывную.

Д о к. Пусть дана обыкновенная положительная дробь $\frac{A}{B}$.

Исключивъ изъ нея цѣлое число, получимъ:

$$\frac{A}{B}=a+\frac{r}{B},$$

гдѣ a есть цѣлое частное, а r остатокъ отъ дѣленія A на B (если дробь $\frac{A}{B}$ правильная, то $a=0$ и $r=A$).

Раздѣливъ оба члена дроби $\frac{r}{B}$ на r, получимъ:

$$\frac{r}{B}=\frac{1}{B:r}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{r_1}{r}},$$

гдѣ a_1 есть цѣлое частное, а r_1 остатокъ отъ дѣленія B на r.

Раздѣливъ оба члена дроби $\frac{r_1}{r}$ на r_1, получимъ:

$$\frac{r_1}{r}=\frac{1}{r:r_1}=\cfrac{1}{a_2+\cfrac{r_2}{r_1}},$$

гдѣ a_2 есть цѣлое частное, а r_2 остатокъ отъ дѣленія r на r_1. Продолжая этотъ пріемъ далѣе, будемъ послѣдовательно получать:

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{1}{r_1:r_2}=\frac{1}{a_3+\frac{r_3}{r_2}},\ \frac{r_3}{r_2}=\frac{1}{r_2:r_3}=\frac{1}{a_4+\frac{r_4}{r_3}},\ \text{и т. д.}$$

Такъ какъ $B>r>r_1>r_2>r_3\ldots$ и эти числа всѣ цѣлыя, то, продолживъ этотъ пріемъ достаточно далеко, мы дойдемъ, очевидно, до нѣкотораго остатка, который будетъ равенъ 0.

Пусть $r_n=0$, т.-е. $\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}=\frac{1}{a_n}$.

Тогда, путемъ подстановки, мы получимъ конечную непрерывную дробь, равную данной обыкновенной:

$$\frac{A}{B}=a+\frac{r}{B}=a+\frac{1}{a_1+\frac{r_1}{r}}=a+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{r_2}{r_1}}}=a+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\cdots+\frac{1}{a_n}}}.$$

Замѣчаніе. Изъ разсмотрѣнія этого пріема слѣдуетъ, что числа a, a_1, $a_2,\ldots a_n$ суть цѣлыя частныя, получаемыя при послѣдовательномъ дѣленіи A на B, потомъ B на первый остатокъ, перваго остатка на второй, и т. д. (иначе сказать, это суть цѣлыя частныя, получаемыя при нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ A и B способомъ послѣдовательнаго дѣленія). Вслѣдствіе этого числа a_1, a_2, $a_3\ldots a_n$ наз. частными непрерывной дроби.

Примѣры.

1) Обратить въ непрерывную дробь число $\frac{40}{17}$.

Такъ какъ

```
      40|17
    17| 6 2
   6| 5 2
  5|1 1
  0 5
```

то $\frac{40}{17}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}$.

2) Обратить въ непрерывную дробь число $\frac{7}{120}$.

Такъ какъ

$$\begin{array}{r|l} 7 & 120 \\ \hline 120 & 7 \quad 0 \\ \hline 7 & 1 \;\; 17 \\ \hline 0 & 7 \end{array}$$

то

$$\frac{7}{120}=\cfrac{1}{17+\cfrac{1}{7}}.$$

340. Подходящія дроби. Если въ непрерывной дроби возьмемъ нѣсколько звеньевъ съ начала, отбросивъ всѣ остальныя, и составленную ими непрерывную дробь обратимъ въ обыкновенную, то получимъ такъ называемую подходящую дробь. Первая подходящая дробь получится, когда возьмемъ одно первое звено; вторая — когда возьмемъ два первыхъ звена, и т. д. Такимъ образомъ, для непрерывной дроби:

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$$

первая подход. дробь есть. . . $\frac{3}{1}$,

вторая » » » $3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$,

третья » » » $3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}=\frac{10}{3}$.

Четвертая подходящая дробь представитъ въ этомъ примѣрѣ точную величину непрерывной дроби $\frac{27}{8}$.

Когда въ непрерывной дроби нѣтъ цѣлаго числа, то первая подходящая дробь есть 0.

341. Законъ составленія подходящихъ дробей. Составимъ для непрерывной дроби $(a, a_1, a_2, a_3 \ldots)$ первыя три подходящія дроби:

$$1)\quad \frac{a}{1},\qquad 2)\quad a+\frac{1}{a_1}=\frac{aa_1+1}{a_1},$$

$$3)\quad a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}}=a+\cfrac{1}{\cfrac{a_1a_2+1}{a_2}}=a+\frac{a_2}{a_1a_2+1}=\frac{aa_1a_2+a+a_2}{a_1a_2+1}=$$

$$=\frac{(aa_1+1)a_2+a}{a_1a_2+1}.$$

Сравнивъ третью подходящую дробь съ двумя первыми, замѣтимъ, что числитель третьей подходящей дроби получится, если числителя второй подходящей дроби умножимъ на соотвѣтствующее частное (т.-е. на a_2) и къ полученному произведенію приложимъ числителя первой подходящей дроби; знаменатель третьей подходящей дроби получится подобнымъ же образомъ изъ знаменателей предыдущихъ двухъ подходящихъ дробей.

Докажемъ, что этотъ законъ примѣнимъ ко всякой подходящей дроби, слѣдующей за второй.

Теорема **Чтобы получить числителя $(n+1)$-й подходящей дроби, достаточно числителя n-й подходящей дроби умножить на соотвѣтствующее частное** (т.-е. на a_n) **и къ произведенію приложить числителя $(n-1)$-й подходящей дроби. Знаменатель $(n+1)$-й подходящей дроби подобнымъ же способомъ получается изъ знаменателей n-й и $(n-1)$-й подходящихъ дробей.**

Употребимъ доказательство отъ n къ $(n+1)$, т.-е. докажемъ, что если эта теорема примѣнима къ n-й подходящей дроби, то она примѣнима и къ $(n+1)$-й подходящей дроби.

Обозначимъ 1-ю, 2-ю, 3-ю, и т. д. подходящія дроби послѣдовательно такъ:

$$\frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_2}{Q_2},\ \frac{P_3}{Q_3}\ldots\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\ \frac{P_n}{Q_n},\ \frac{P_{n+1}}{Q_{n-1}}\ldots$$

и замѣтимъ, что соотвѣтствующія имъ частныя будутъ:

$$a,\ a_1,\ a_2\ldots a_{n-2},\ a_{n-1}\ \ a_n\ldots$$

Допустимъ, что вѣрны равенства:

$$P_n=P_{n-1}a_{n-1}+P_{n-2},\quad Q_n=Q_{n-1}a_{n-1}+Q_{n-2} \tag{1}$$

и, слѣдовательно, $$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n-1}a_{n-1}+P_{n-2}}{Q_{n-1}a_{n-1}+Q_{n-2}}. \tag{2}$$

Докажемъ, что въ такомъ случаѣ будетъ вѣрно равенство:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_na_n+P_{n-1}}{Q_na_n+Q_{n-1}}. \tag{3}$$

Изъ сравненія двухъ подходящихъ дробей:

$$\frac{P_n}{Q_n}=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\dots+\cfrac{1}{a_{n-1}}}}\qquad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\dots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}$$

усматриваемъ, что $(n+1)$-я подходящая дробь получится изъ n-й, если въ послѣдней замѣнимъ число a_{n-1} на сумму $a_{n-1}+\frac{1}{a_n}$. Поэтому равенство [2] даетъ:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n-1}}=\frac{P_{n-1}\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_n}\right)+P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_n}\right)+Q_{n-2}}.$$

Раскрывъ скобки и умноживъ оба члена дроби на a_n, получимъ:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_{n-1}a_{n-1}a_n+P_{n-1}+P_{n-2}a_n}{Q_{n-1}a_{n-1}a_n+Q_{n-1}+Q_{n-2}a_n}=\frac{(P_{n-1}a_{n-1}+P_{n-2})a_n+P_{n-1}}{(Q_{n-1}a_{n-1}+Q_{n-2})a_n+Q_{n-1}}.$$

Принявъ во вниманіе равенства (1), можемъ окончательно написать:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_na_n+P_{n-1}}{Q_na_n+Q_{n-1}}.$$

Это и есть равенство (3), которое требовалось доказать.

Такимъ образомъ, если доказываемый законъ вѣренъ для n-й подходящей дроби, то онъ будетъ вѣренъ и для $(n+1)$-й подходящей дроби. Но мы видѣли, что онъ вѣренъ для 3-й подходящей дроби; слѣд., по доказанному, онъ примѣнимъ для 4-й подходящей дроби, а если для 4-й, то и для 5-й, и т. д.

Примѣръ. Составимъ всѣ подходящія дроби для слѣдующей непрерывной:

$$a=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}}=(2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\ 5).$$

Вычисленіе всего удобнѣе расположить такъ:

Цѣлыя частныя:			3	2	3	1	5
Подход. дроби:	2	3	11	25	86	111	641
	1	1	4	9	31	40	231

Первыя двѣ подходящія дроби найдемъ непосредственно; это будутъ: $\frac{2}{1}$ и $\frac{3}{1}$. Остальныя дроби получимъ, основываясь на доказанномъ законѣ. Для памяти размѣщаемъ въ верхней строкѣ цѣлыя частныя, съ 3-го до послѣдняго.

342. Теорема. Точная величина конечной непрерывной дроби заключается между всякими двумя послѣдовательными подходящими дробями, при чемъ она ближе къ послѣдующей, чѣмъ къ предыдущей.

Док. Пусть имѣемъ конечную непрерывную дробь:

$$(a,\ a_1,\ a_2 \ldots a_{n-1},\ \ a_n,\ a_{n+1} \ldots a_s) = A,$$

величину которой обозначимъ черезъ A. Возьмемъ какія-нибудь три послѣдовательныя подходящія дроби:

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\ \ \frac{P_n}{Q_n},\ \ \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}.$$

По доказанному въ предыдущемъ параграфѣ:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}.$$

Если въ правую часть этого равенства вмѣсто a_n вставимъ $y = (a_n, a_{n+1} \ldots a_s)$, то получимъ точную величину A непрерывной дроби; значитъ:

$$A = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}},$$

откуда: $AQ_n y + AQ_{n-1} = P_n y + P_{n-1}$ или $AQ_n y - P_n y = P_{n-1} - AQ_{n-1}$

и, значитъ, $$yQ_n\left(A - \frac{P_n}{Q_n}\right) = Q_{n-1}\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A\right).$$

Изъ послѣдняго равенства можемъ вывести два слѣдующихъ заключенія:

1) Такъ какъ числа y, Q_n и Q_{n-1} положительныя, то разности,

стоящія внутри скобокъ, должны быть одновременно положительны, или одновременно отрицательны, значитъ:

$$\begin{cases} \text{если } A-\dfrac{P_n}{Q_n}>0, \\ \text{то и } \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-A>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \text{если } A-\dfrac{P_n}{Q_n}<0, \\ \text{то и } \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-A<0 \end{cases}$$

т.-е.

$$\begin{cases} \text{если } A>\dfrac{P_n}{Q_n}, \\ \text{то и } \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}>A \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \text{если } A<\dfrac{P_n}{Q_n} \\ \text{то и } \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}<A. \end{cases}$$

Слѣдовательно, величина A заключена между всякими двумя послѣдовательными подходящими дробями.

2) Такъ какъ $y>1$ и $Q_n>Q_{n-1}$, при чемъ числа Q_n и Q_{n-1} положительныя, то изъ того же равенства выводимъ:

$$\text{абс. вел. } \left(A-\frac{P_n}{Q_n}\right)<\text{абс. вел. } \left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-A\right).$$

Отсюда слѣдуетъ, что A ближе къ $\dfrac{P_n}{Q_n}$, чѣмъ къ $\dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Такъ какъ, очевидно, $A>a$, т.-е. $A>\dfrac{P_1}{Q_1}$, то $A<\dfrac{P_2}{Q_2}$, $A>\dfrac{P_3}{Q_3}$, $A<\dfrac{P_4}{Q_4}$, и т. д; т.-е. **точная величина непрерывной дроби болѣе всякой подходящей дроби нечетнаго порядка и менѣе всякой подходящей дроби четнаго порядка.**

343. Теорема. Разность между всякими двумя рядомъ стоящими подходящими дробями равна единицѣ, взятой со знакомъ + или — и дѣленной на произведеніе знаменателей этихъ подходящихъ дробей.

Д о к. Такъ какъ $\dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\dfrac{P_n}{Q_n}=\dfrac{P_{n+1}Q_n-Q_{n+1}P_n}{Q_{n+1}Q_n}$,

то очевидно, что знаменатель этой разности удовлетворяетъ требованію теоремы. Остается доказать, что числитель равенъ ± 1.

Такъ какъ: $P_{n+1}=P_na_n+P_{n-1}$ и $Q_{n+1}=Q_na_n+Q_{n-1}$,

то $$P_{n+1}Q_n-Q_{n+1}P_n=(P_na_n+P_{n-1})Q_n-(Q_na_n+Q_{n-1})P_n=$$
$$=P_na_nQ_n+P_{n-1}Q_n-Q_na_nP_n-Q_{n-1}P_n=-(P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n).$$

Выраженіе, стоящее въ скобкахъ, представляетъ собою числителя дроби, которая получится отъ вычитанія изъ $\frac{P_n}{Q_n}$ дроби $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$. Слѣд., мы доказали, что абсолютная величина числителя дроби, получаемой отъ вычитанія $\frac{P_n}{Q_n}$ изъ $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, равна абсолютной величинѣ числителя дроби, получаемой отъ вычитанія $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ изъ $\frac{P_n}{Q_n}$; другими словами, абсолютная величина числителя дроби, получаемой отъ вычитанія одной изъ другой двухъ рядомъ стоящихъ подходящихъ дробей, есть число постоянное для всѣхъ подходящихъ дробей. Но разность между 2-й и 1-й подходящими дробями есть:

$$\left(a+\frac{1}{a_1}\right)-a=\frac{1}{a_1}.$$

Слѣд., числитель разности между всякими двумя рядомъ стоящими подходящими дробями, по абсолютной своей величинѣ, равенъ 1.

Такъ, если взять примѣръ, приведенный на стран. 413, то найдемъ:

$$\frac{3}{1}-\frac{2}{1}=\frac{1}{1};\ \frac{11}{4}-\frac{3}{1}=\frac{-1}{4};\ \frac{25}{9}-\frac{11}{4}=\frac{1}{36};\ \frac{86}{31}-\frac{25}{9}=\frac{-1}{279},\ \text{и т. п.}$$

Слѣдствія. I. **Всякая подходящая дробь есть дробь несократимая**, потому что если бы дробь $\frac{P_n}{Q_n}$ могла быть сокращена на нѣкотораго дѣлителя $m>1$, то разность $P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n$ дѣлилась бы на m, что невозможно, такъ какъ эта разность равна ± 1.

II. Если вмѣсто точной величины непрерывной дроби возь-

мемъ подходящую дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, то сдѣлаемъ ошибку, меньшую каждаго изъ трехъ слѣдующихъ чиселъ:

$$\frac{1}{Q_n Q_{n+1}},\ \frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})},\ \frac{1}{Q_n^{\ 2}}.$$

Дѣйствительно, если A есть точная величина непрерывной дроби, то разность $A-\frac{P_n}{Q_n}$ численно меньше разности $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}$, абсолютная величина которой, по доказанному, равна $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$. Съ другой стороны, такъ какъ $Q_{n+1}=Q_n a_n+Q_{n+1}$, гдѣ $a_n \geqslant 1$, то $Q_{n+1} \geqslant Q_n+Q_{n-1}$; слѣд.,

$$Q_n Q_{n+1} \geqslant Q_n(Q_n+Q_{n-1}) \text{ и } \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} \leqslant \frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})},$$

и потому абсол. величина разности $A-\frac{P_n}{Q_n}$ меньше $\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})}$.

Наконецъ, такъ какъ $Q_{n+1}>Q_n$, то $Q_{n+1}Q_n>Q_n^{\ 2}$, и потому

$$\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}<\frac{1}{Q_n^{\ 2}}.$$

Слѣд., абсолютная величина разности $A-\frac{P_n}{Q_n}$ меньше $\frac{1}{Q_n^{\ 2}}$.

Изъ трехъ указанныхъ предѣловъ погрѣшности самый меньшій есть $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$; но его вычисленіе предполагаетъ, что знаменатель подходящей дроби, слѣдующей за той, которую мы приняли за приближеніе, извѣстенъ, что не всегда имѣетъ мѣсто. Вычисленіе предѣла $\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})}$ можетъ быть выполнено только тогда, когда извѣстенъ знаменатель предшествующей подходящей дроби. Когда же извѣстна одна подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, возможно только указаніе предѣла погрѣшности $\frac{1}{Q_n^{\ 2}}$.

Напр., если мы знаемъ, что нѣкоторая подходящая дробь данной непрерывной есть $\frac{45}{17}$, то можно сказать, что $\frac{45}{17}$ точно до $\frac{1}{17^2}=\frac{1}{289}$. Если, кромѣ того, знаемъ, что знаменатель предшествующей подходящей дроби есть, напр., 8, то можемъ сказать, что $\frac{45}{17}$ точно до $\frac{1}{17(17+8)}=\frac{1}{425}$. Наконецъ, когда еще знаемъ, что знаменатель слѣдующей подходящей дроби есть, напр., 37, то можемъ ручаться, что $\frac{45}{17}$ разнится отъ точнаго значенія непрерывной дроби менѣе, чѣмъ на $\frac{1}{17\cdot 37}=\frac{1}{629}$.

344. Теорема. **Подходящая дробь ближе къ точной величинѣ непрерывной дроби, чѣмъ всякая другая дробь съ меньшимъ знаменателемъ.**

Док. Допустимъ, что существуетъ дробь $\frac{a}{b}$, менѣе отличающаяся отъ точной величины непрерывной дроби A, чѣмъ подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, и пусть $b<Q_n$. Докажемъ, что это предположеніе невозможно. Такъ какъ $\frac{P_n}{Q_n}$ ближе къ A, чѣмъ $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, и $\frac{a}{b}$ ближе къ A, чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$ то, и подавно, $\frac{a}{b}$ ближе къ A, чѣмъ $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$; такъ какъ, кромѣ того, A заключается между $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$, то абсолютная величина разности $\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ больше абсолютной величины разности $\frac{a}{b}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$; значитъ, обращая вниманіе только на абсолютныя величины, можемъ написать:

$$\frac{1}{Q_nQ_{n-1}}>\frac{aQ_{n-1}-bP_{n-1}}{bQ_{n-1}},$$
$$Q_nQ_{n-1}>bQ_{n-1}.$$

Перемноживъ почленно эти неравенства (беря только абсолютныя величины), получимъ:

$$1>aQ_{n-1}-bP_{n-1}.$$

Такъ какъ aQ_{n-1} и bP_{n-1} суть числа цѣлыя, то это неравенство возможно только при условіи:

$$aQ_{n-1}-bP_{n-1}=0;\ \text{откуда: } \frac{a}{b}=\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}.$$

Но это равенство невозможно, такъ какъ, по предположенію $\frac{a}{b}$ ближе подходитъ къ A, чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$, тогда какъ $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ по доказанному (§ 342),

больше разнится отъ A, чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$. Невозможность равенства доказываетъ невозможность сдѣланнаго предположенія.

Изъ доказанной теоремы слѣдуетъ, что подходящія дроби представляютъ простѣйшіе виды приближеній къ точному значенію непрерывной дроби.

345. Обращеніе несоизмѣримаго числа въ безконечную непрерывную дробь Теорема 1 **Всякое положительное несоизмѣримое число x можетъ быть представлено въ видѣ выраженія:**

$$x=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{x_n}}}}}=(a,\ a_1,\ a_2,\ldots a_{n-1},\ x_n),$$

въ которомъ буквы a, a_1 $a_2\ldots a_{n-1}$ означаютъ числа цѣлыя положительныя (при чемъ a можетъ быть и 0) и которыхъ число n можетъ быть какъ угодно велико; буква же x означаетъ нѣкоторое положительное несоизмѣримое число, большее 1.

Док. Пусть наибольшее цѣлое число, заключающееся въ x, есть a (если $x<1$, то это цѣлое число равно 0). Тогда x можно выразить суммою $a+x'$, гдѣ x' есть нѣкоторое положительное несоизмѣримое число, меньшее 1. Введемъ новое число x_1, связанное съ x' уравненіемъ: $x'=\frac{1}{x_1}$.

Тогда x_1 должно быть положительнымъ несоизмѣримымъ числомъ, большимъ 1, и мы будемъ имѣть:

$$x=a+\frac{1}{x_1}. \qquad (1)$$

Преобразуя x_1 такъ, какъ было сейчасъ сдѣланно съ x, получимъ:

$$x_1=a_1+\frac{1}{x_2}, \qquad (2)$$

гдѣ a_1 есть наибольшее цѣлое число, заключающееся въ x_1 (это число больше 0), а x_2 нѣкоторое несоизмѣримое число, большее 1. Въ свою очередь можемъ положить:

$$x_2=a_2+\frac{1}{x_3} \quad (3) \qquad\qquad x_3=a_3+\frac{1}{x_4} \quad (4)$$

и т. д. безъ конца (такъ какъ всегда будемъ приходить къ положительному несоизмѣримому числу x_k, большему 1).

Ограничиваясь n такими равенствами и сдѣлавъ подстановки, найдемъ для x то выраженіе, которое требовалось доказать.

Такъ какъ число звеньевъ съ цѣлыми знаменателями: a, a_1, $a_2\ldots a_{n-1}$ можно сдѣлать какъ угодно большимъ, то говорятъ, что **всякое положительное несоизмѣримое число x обращается (развертывается) въ безконечную непрерывную дробь:** $(a,\ a_1\ a_2,\ a_3\ldots)$. Если примемъ еще во вни-

маніе теорему § 339, то можемъ теперь сказать, что **всякое положительное число обращается въ непрерывную дробь, конечную, если это число соизмѣримое, и безконечную, если оно несоизмѣримое.**

Теорема 2. **Всякое несоизмѣримое число x можно разсматривать, какъ предѣлъ, къ которому стремится неограниченный рядъ подходящихъ дробей: $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}...$, составленныхъ для безконечной непрерывной дроби, въ которую обращается это число x.**

Док. Выраженіе $(a\ a_1\ a_2,\ a_{n-1},\ x_n)$, выведенное нами для несоизмѣримаго числа x, отличается отъ разсмотрѣнныхъ раньше конечныхъ непрерывныхъ дробей только тѣмъ, что въ послѣднихъ всѣ знаменатели числа цѣлыя, а въ этомъ выраженіи знаменатель x_n есть несоизмѣримое число больше 1. Но, просматривая доказательства теоремъ §§ 341, 342 и 343, мы видимъ, что въ нихъ нигдѣ не требуется допущенія, чтобы знаменатели отдѣльныхъ звеньевъ были непремѣнно цѣлыми; поэтому можемъ сказать, что теоремы эти примѣнимы и къ выраженію, выведенному нами теперь для несоизмѣримаго числа x. Въ частности, напр., мы можемъ утверждать, что величина x заключается между каждыми двумя подходящими дробями, и что если вмѣсто точной величины x возьмемъ какую-нибудь подходящую дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, то сдѣлаемъ ошибку, меньшую $\frac{1}{Q_n^2}$. Такъ какъ $Q_n=Q_{n-1}a_{n-1}+Q_{n-2}$ гдѣ всѣ числа Q и a не меньше 1, то при неограниченномъ увеличеніи n число Q_n возрастаетъ неограниченно и, слѣд., дробь $\frac{1}{Q_n^2}$ уменьшается безпредѣльно; значитъ, абсолютная величина разности между постояннымъ числомъ x и перемѣннымъ числомъ $\frac{P_n}{Q_n}$ при достаточно большемъ n дѣлается (и при дальнѣйшемъ возрастаніи n остается) меньше любого положительнаго числа, какъ бы мало оно ни было. А это, согласно опредѣленію предѣла (§ 296), означаетъ, что *пред* $\frac{P_n}{Q_n}=x$.

346. Періодическая непрерывная дробь. Такъ наз. безконечная непрерывная дробь, у которой частныя повторяются въ одной и той же послѣдовательности. Таковы, напр., дроби:

Чистая періодическая: Смѣшанная періодическая:

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+...}}}} \qquad \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+...}}}}}}$$

Точную величину періодической непрерывной дроби можно опредѣлить слѣдующимъ образомъ.

Пусть намъ извѣстно, что нѣкоторое несоизмѣримое число x даетъ безконечную непрерывную дробь

$$x=(a,\ a_1,\ a_2 \ldots a_n,\ a,\ a_1\ a_2, \ldots a_n \ldots).$$

Тогда, очевидно, можемъ написать:

$$x=(a,\ a_1,\ a_2 \ldots a_n,\ x).$$

Допустимъ теперь, что $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ есть та подходящая дробь, которая получится, если мы остановимся на послѣднемъ звенѣ перваго періода, а $\frac{P_n}{Q_n}$ и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ двѣ предшествующія подходящія дроби. Очевидно, что точная величина данной непрерывной дроби получится изъ $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, если въ послѣдней на мѣсто a_n подставимъ сумму $a_n+\frac{1}{x}$.

Но $\quad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_n a_n+P_{n-1}}{Q_n a_n+Q_{n-1}};\quad$ слѣд. $\quad x=\frac{P_n\left(a_n+\frac{1}{x}\right)+P_{n-1}}{Q_n\left(a_n+\frac{1}{x}\right)+Q_{n-1}}$

или $\quad x=\frac{P_n a_n x+P_n+P_{n-1}x}{Q_n a_n x+Q_n+Q_{n-1}x}=\frac{(P_n a_n+P_{n-1})x+P_n}{(Q_n a_n+Q_{n-1})x+Q_n}=\frac{P_{n+1}x+P_n}{Q_{n+1}x+Q_n}.$

Отсюда видно, что x есть корень квадратнаго уравненія:

$$Q_{n+1}x^2+(Q_n-P_{n+1})x-P_n=0.$$

Это уравненіе имѣетъ вещественные корни, изъ нихъ только одинъ положительный; этотъ корень и есть значеніе данной періодической дроби.

Подобнымъ же образомъ можемъ опредѣлить точную величину смѣшанной періодической дроби. Пусть $x=(a\ a_1 \ldots a_n\ b\ b_2 \ldots b_m,\ b_1\ b_2 \ldots b_m \ldots)$, гдѣ періодъ образуютъ частныя: $b_1\ b_2\ b_3 \ldots b_m$. Тогда предварительно найдемъ $y=(b_1\ b_2, \ldots b_m,\ b_1\ b_2 \ldots)$, какъ указано выше, послѣ чего x опредѣлимъ изъ равенства:

$$x=\frac{P_{n+1}y+P_n}{Q_{n+1}y+Q_n}.$$

Примѣръ. Найти величину періодической дроби:

$$x=2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{5+\frac{1}{3+\frac{1}{5+\cdots}}}}}}$$

Опредѣлимъ сначала $y=3+\frac{1}{5+\frac{1}{3+\frac{1}{5+\cdots}}}=3+\frac{1}{5+\frac{1}{y}}$

$$y=3+\frac{y}{5y+1}=\frac{15y+3+y}{5y+1}=\frac{16y+3}{5y+1},$$

$$5y^2-15y-3=0;\ y=\frac{15+\sqrt{225+60}}{10}=\frac{15+\sqrt{285}}{10}.$$

Слѣд.
$$x=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{y}}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{y}{y+1}}=2+\frac{y+1}{3y+2}=\frac{7y+5}{3y+2};$$

$$x=\frac{7(15+\sqrt{285})+50}{3(15+\sqrt{285})+20}=\frac{155+7\sqrt{285}}{65+3\sqrt{285}}=\frac{409-\sqrt{285}}{166}.$$

ГЛАВА IV.

Нѣкоторыя приложенія непрерывныхъ дробей.

347 Приближенное значеніе данной ариѳметической дроби. Когда числитель и знаменатель данной несократимой ариѳметической дроби выражены большими числами, часто является потребность выразить эту дробь въ болѣе простомъ, хотя и приближенномъ, видѣ. Для этого достаточно обратить данную дробь въ непрерывную и найти ту или другую подходящую дробь, смотря по желаемой степени приближенія.

Примѣръ. Зная, что число π, представляющее отношеніе окружности къ ея діаметру, заключено между двумя дробями: $a=3{,}1415926$ и $b=3{,}1415927$, найти простѣйшія приближенныя значенія π.

Обративъ дроби a и b въ непрерывныя и взявъ только общія неполныя частныя, найдемъ:

$$\pi=(3,\ 7,\ 15,\ 1\ldots)\ ^{*)}.$$

---

*) Нельзя допустить, чтобы число π, заключающееся между a и b, будучи разве нуто въ непрывную дробь, не сохранило бы какого-либо изъ тѣхъ частныхъ, которыя общи числамъ a и b Дѣйствительно, если допустимъ, что какое-нибудь частное, напр., второе, было бы у числа π не 7, какъ у a и b, а меньше 7-и, напр 6, то тогда, сравнивъ два выраженія:

$$\pi=3+\frac{1}{6+\ldots}\qquad b=3+\frac{1}{7+\ldots}$$

и принявъ во вниманіе, что въ непрерывныхъ дробяхъ къ любому част-

Подходящія дроби будутъ:

		15	1
3	22	333	355
1	7	106	113

Приближеніе $\frac{22}{7}$ было найдено Архимедомъ; оно вѣрно до $\frac{1}{7\,.\,106}=\frac{1}{742}$, значитъ, и подавно вѣрно до $\frac{1}{100}$. Число $\frac{355}{113}$ было указало Адріаномъ Меціемъ; взявъ это число вмѣсто π, сдѣлаемъ ошибку, меньшую $\frac{1}{113\,.\,33102}=\frac{1}{3740526}$, т.-е. во всякомъ случаѣ меньшую 1 милліонной.

Приближенія Архимеда и Меція, какъ четнаго порядка, болѣе π.

348 Извлеченіе квадратнаго корня. Пусть требуется найти $\sqrt{41}$ при помощи непрерывныхъ дробей. Разсуждаемъ такъ: наибольшее цѣлое число, заключающееся въ $\sqrt{41}$, есть 6; поэтому можемъ положить;

$$\sqrt{41}=6+\frac{1}{x} \qquad (1)$$

Откуда: $\frac{1}{x}=\sqrt{41}-6$; $x=\frac{1}{\sqrt{41}-6}=\frac{\sqrt{41}+6}{5}$.

Такъ какъ $\sqrt{41}+6$ равняется 12 съ дробью, то наибольшее

ному прикладывается число, меньшее 1, мы получили бы слѣдующія неравенства:

$$6+\ldots<7+\ldots;\quad \frac{1}{6+\ldots}>\frac{1}{7+\ldots};\quad 3+\frac{1}{6+\ldots}>3+\frac{1}{7+\ldots};$$

т.-е. $\pi>b$,

что противорѣчитъ заданію. Если допустимъ, что второе частное у числа π будетъ больше 7-и, напр. 8, то тогда, сравнивъ два выраженія:

$$\pi=3+\frac{1}{8+\ldots} \qquad a=3+\frac{1}{7+\ldots}$$

мы нашли бы, подобно предыдущему, что $\pi<a$ что также противорѣчитъ заданію. Значитъ, второе частное должно быть 7. Также можно разъяснить, что и всѣ другія частныя, общія числамъ a и b, сохранятся и у числа π.

цѣлое число, заключающееся въ дроби $\frac{\sqrt{41}+6}{5}$, есть 2; поэтому можемъ положить:

$$x=\frac{\sqrt{41}+6}{5}=2+\frac{1}{y}. \qquad (2)$$

Откуда: $$\frac{1}{y}=\frac{\sqrt{41}+6}{5}-2=\frac{\sqrt{41}+4}{5}.$$

$$y=\frac{5}{\sqrt{41}-4}=\frac{5(\sqrt{41}+4)}{25}=\frac{\sqrt{41}+4}{5}.$$

Такъ какъ $\sqrt{41}+4$ равняется 10 съ дробью, то наибольшее цѣлое число, заключающееся въ дроби $\frac{\sqrt{41}+4}{5}$, есть 2; потому можемъ положить:

$$y=\frac{\sqrt{41}+4}{5}=2+\frac{1}{z}. \qquad (3)$$

Откуда: $\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{41}-6}{5}$; $z=\frac{5}{\sqrt{41}-6}=\frac{5(\sqrt{41}+6)}{5}=\sqrt{41}+6.$

Наибольшее цѣлое число, заключающееся въ $\sqrt{41}+6$, есть 12; поэтому можно положить:

$$z=\sqrt{41}+6=12+\frac{1}{v}. \qquad (4)$$

Откуда: $$\frac{1}{v}=\sqrt{41}-6;\ v=\frac{1}{\sqrt{41}-6}.$$

Сравнивая выраженіе для v съ выраженіемъ для x, находимъ, что $v=x$. Пользуясь равенствами (1), (2), (3) и (4), получимъ:

$$\sqrt{41}=6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{x}}}} \qquad =6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\dots}}}}}}$$

Такимъ образомъ, $\sqrt{41}$ выразился безконечною періодическою

непрерывною дробью, въ которой частныя 2, 2, 12 періодически повторяются [1]). Найдя подходящія дроби, получимъ приближенныя значенія $\sqrt{41}$:

		2	12	2	2	...
6	13	32	397	826	2049	...
1	2	5	62	129	320	...

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$\sqrt{12}=(3, \underbrace{1,\ 1,\ 1, 1,\ 6,}_{\text{періодъ}}\ 1,\ 1...)$; $\sqrt{20}=(5, \underbrace{2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 10}_{\text{періодъ.}}...)$.

349. Вычисленіе логариѳма. Пусть требуется вычислить Log 2 по основанію 10; другими словами, требуется рѣшить уравненіе $10^x=2$. Сначала находимъ для x ближайшее цѣлое число. Такъ какъ $10^0=1$, а $10^1=10$, то x заключается между 0 и 1; слѣд., можно положить, что $x=\frac{1}{z}$; тогда $10^{\frac{1}{z}}=2$, или $10=2^z$. Не трудно видѣть, что z заключается между 3 и 4; слѣд., можно положить, $z=3+\frac{1}{z_1}$;

$$\text{тогда} \qquad 10=2^{3+\frac{1}{z_1}}=2^3\,.\,2^{\frac{1}{z_1}}=8\,.\,2^{\frac{1}{z_1}};$$

$$\text{откуда:} \qquad 2^{\frac{1}{z_1}}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}.$$

$$\text{слѣд.:} \qquad 2=\left(\frac{5}{4}\right)^{z_1}.$$

Испытаніемъ находимъ, что z_1 заключается между 3 и 4, потому можно положить: $z_1=3+\frac{1}{z_2}$;

---

[1]) Можно было бы доказать, что *непрерывная дробь, въ которую обращается квадратный корень изъ положительнаго цѣлаго числа, всегда періодична, при чемъ періодъ начинается со второго частнаго и послѣднее частное въ періодѣ вдвое больше непеpіодическаго частнаго.*

тогда $$2=\left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{z_2}}=\left(\frac{5}{4}\right)^{3}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z_2}}$$

откуда: $$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z_2}}=2:\left(\frac{5}{4}\right)^{3}=\frac{128}{125};\quad \text{или}\quad \left(\frac{128}{125}\right)^{z_2}=\frac{5}{4}.$$

Снова испытаніемъ находимъ, что z_2 заключается между 9 и 10. Этотъ пріемъ можно продолжать далѣе. Довольствуясь приближенной величиной z_2, можемъ положить $z_2=9$;

слѣд., $$z_1=3+\frac{1}{9},\ z=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9}}\ \text{и}\ x=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9}}}.$$

Обративъ эту непрерывную дробь въ обыкновенную, получимъ: $x=\frac{28}{93}=0{,}30107$. Этотъ результатъ вѣренъ до 4-го десятичнаго знака; болѣе точныя изысканія даютъ: $x=0{,}3010300$.

350. Нахожденіе пары рѣшеній неопредѣленнаго уравненія. Непрерывныя дроби даютъ средство найти цѣлыя рѣшенія неопредѣленнаго уравненія $ax+by=c$ Покажемъ это на слѣдующихъ двухъ примѣрахъ.

Примѣръ 1. $43x+15y=8$.

Возьмемъ дробь $\frac{43}{15}$ и обратимъ ее въ непрерывную:

$$\frac{43}{15}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2}}}.$$

Найдемъ теперь предпослѣднюю подходящую дробь; это будетъ $\frac{20}{7}$. Такъ какъ послѣдняя подходящая дробь есть точное значеніе непрерывной дроби, т.-е. $\frac{43}{15}$, а $\frac{20}{7}$ есть подходящая дробь нечетнаго порядка, то, на основаніи теоремъ §§ 342 (замѣчаніе) и 343, можемъ написать:

$$\frac{43}{15}-\frac{20}{7}=\frac{1}{15.7};\ \text{откуда: } 43.7-15.20=1.$$

Чтобы уподобить послѣднее тождество данному уравненію, умножимъ всѣ его члены на 8 и представимъ его такъ:

$$43.56+15(-160)=8.$$

Сравнивъ теперь это тождество съ нашимъ уравненіемъ, находимъ, что въ послѣднемъ за x можно принять число 56, а за y число—160. Тогда всевозможныя рѣшенія выразятся формулами (§ 275):

$$x=56-15t,\ y=-160+43t.$$

Эти формулы можно упростить, замѣнивъ t на $t+3$ (что можно сдѣлать вслѣдствіе произвольности числа t):

$$x=56-15(t+3)=11-15t\quad y=-160+43(t+3)=-31+43t.$$

Примѣръ 2. $7x-19y=5$.

Обративъ дробь $\frac{7}{19}$ *въ непрерывную, найдемъ:*

$$\frac{7}{19}=0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$$

Предпослѣдняя подходящая дробь будетъ $\frac{3}{8}$. Такъ какъ она четнаго порядка, то $\frac{7}{19}-\frac{3}{8}=\frac{-1}{19.8}$, откуда:

$$7.8-19.3=-1.$$

Умноживъ всѣ члены этого равенства на 5, получимъ:

$$7.40-19.15=-5 \text{ или } 7.(-40)-19.(-15)=5.$$

Сравнивая послѣднее тождество съ даннымъ уравненіемъ, находимъ что въ послѣднемъ за x можно принять число—40, а за y число —15.

Тогда $$x=-40+19t,\ y=-15+7t$$

Эти формулы можно упростить, замѣнивъ t на $t+2$:

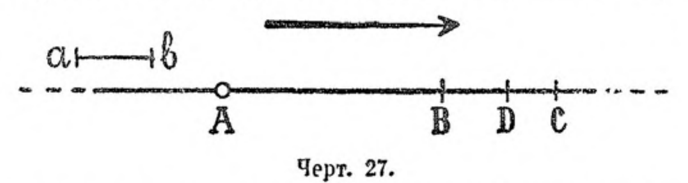
$$x=-40+19(t+2)=-2+19t,\ y=-15+7(t+2)=-1+7t.$$

ПРИЛОЖЕНІЕ 1.

(Въ развитіе и дополненіе главы VI Отдѣла IV. „Понятіе о несоизмѣримомъ числѣ").

Несоизмѣримыя числа.

1. Соизмѣримыя и несоизмѣримыя точки. Условимся называть любую точку числовой прямой (см. § 14) соизмѣримою или несоизмѣримою, смотря по тому, представляетъ ли она собою конецъ отрѣзка, соизмѣримаго съ единицей длины или несоизмѣримаго съ ней; при чемъ, конечно мы предполагаемъ, что за начало отрѣзковъ берется одна и та же условленная точка *A* (черт. 27) и



Черт. 27.

единицею длины служитъ одинъ и тотъ же опредѣленный отрѣзокъ прямой *ab* Такъ какъ соизмѣримые и несоизмѣримые отрѣзки прямой могутъ быть и положительные, и отрицательные, то соизмѣримыя и несоизмѣримыя точки числовой прямой расположены и направо отъ начальной точки A, и налѣво отъ нея. Самоё точку *A* мы будемъ считать соизмѣримою такъ какъ, можно сказать, она есть конецъ соизмѣримаго отрѣзка, равнаго 0. Замѣтимъ, что за положительное направленіе отрѣзковъ мы всегда будемъ брать направленіе слѣва направо (указанное на чертежѣ стрѣлкою).

2 Теорема. Между каждыми 2-мя точками числовой прямой (напр., между *B* и *C*, черт. 27) существуетъ на этой прямой соизмѣримая точка.

Док Раздѣливъ единицу *ab* на такое большое число *n* равныхъ частей, чтобы каждая часть была меньше отрѣзка *BC*, станемъ откладывать одну такую часть на числовой прямой, начиная отъ точки *A*, по направленію къ точкѣ *B*. Очевидно, что, при достаточномъ числѣ отложеній, мы всегда перейдемъ за точку *B*, при чемъ по крайней мѣрѣ одна изъ точекъ

отложенія упадетъ между *B* и *C*, напр., въ точку *D*. Такъ какъ образовавшійся при этомъ отрѣзокъ *AD* будетъ соизмѣримъ съ единицею длины, то точка *D* и будетъ та соизмѣримая точка, которая расположена между *B* и *C*.

Слѣдствіе. Между каждыми 2-мя точками числовой прямой существуетъ на этой прямой безчисленное множество соизмѣримыхъ точекъ

Дѣйствительно, по доказанному, между точками *B* и *C* существуетъ соизмѣримая точка *D*; но между *B* и *D*, а также между *C* и *D* тоже существуютъ соизмѣримыя точки; между этими точками опять-таки лежатъ соизмѣримыя точки, и т. д. безъ конца.

Замѣчаніе. Можно было бы доказать, что между каждыми 2-мя точками числовой прямой существуетъ несоизмѣримая точка, и какъ слѣдствіе отсюда вывести, что между каждыми 2-мя точками числовой прямой существуетъ безчисленное множество несоизмѣримыхъ точекъ [1]).

3. Каждая точка числовой прямой производитъ раздѣленіе всѣхъ соизмѣримыхъ чиселъ на 2 класса. Свойства этихъ классовъ. Такъ какъ каждый соизмѣримый съ единицей длины отрѣзокъ прямой можетъ быть точно выраженъ соизмѣримымъ числомъ (цѣлымъ или дробнымъ, положительнымъ или отрицательнымъ), то можно сказать, что каждой соизмѣримой точкѣ прямой соотвѣтствуетъ опредѣленное соизмѣримое число, именно число, выражающее соизмѣримый отрѣзокъ, концомъ котораго эта точка служитъ; если, напр., отрѣзокъ *AB* (черт. 27) выражается числомъ $+2\frac{1}{2}$, то точкѣ *B* соотвѣтствуетъ это число $+2\frac{1}{2}$ Замѣтивъ это, мы можемъ сказать, что всякая точка числовой прямой, напр., точка *D* (черт. 27), производитъ раздѣленіе всѣхъ соизмѣримыхъ чиселъ на такіе 2 класса:

классъ всѣхъ тѣхъ соизмѣримыхъ чиселъ, которыя соотвѣтствуютъ соизмѣримымъ точкамъ, лежащимъ налѣво отъ взятой точки *D* (назовемъ этотъ классъ 1-мъ);

и классъ всѣхъ тѣхъ соизмѣримыхъ чиселъ, которыя соотвѣтствуютъ соизмѣримымъ точкамъ, лежащимъ направо отъ *D*, и самой точкѣ *D*, если она принадлежитъ къ соизмѣримымъ точкамъ (назовемъ этотъ классъ 2-мъ).

Классы эти обладаютъ свойствомъ, что каждое число 1-го класса менѣе каждаго числа 2-го класса. Дѣйствительно, изъ двухъ чиселъ, соотвѣтствующимъ двумъ точкамъ числовой прямой, то считается меньшимъ, которое соотвѣтствуетъ лѣвой точкѣ; но каждая точка изъ тѣхъ, которымъ соотвѣтствуютъ числа 1-го класса,

---

[1]) Доказательство можно было бы обосновать на теоремѣ, что діагональ квадрата несоизмѣрима съ его стороною.

расположена лѣвѣе каждой точки изъ тѣхъ, которымъ соотвѣтствуютъ числа 2-го класса; слѣд., каждое число 1-го класса менѣе каждаго числа 2-го класса.

Если точка D, производящая указанное раздѣленіе, принадлежитъ сама къ несоизмѣримымъ точкамъ, то классы эти обладаютъ еще другимъ слѣдующимъ свойствомъ:

въ 1-мъ классѣ не существуетъ числа наибольшаго, во 2-мъ классѣ не существуетъ числа наименьшаго.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, допустимъ противное; напр., предположимъ, что во 2-мъ классѣ есть число наименьшее (положимъ, $+3$). Возьмемъ на числовой прямой соизмѣримую точку, соотвѣтствующую этому числу. Точка эта не можетъ быть точкой D, такъ какъ мы предположили точку D несоизмѣримой; значитъ, она должна быть расположена направо отъ D; пусть это будетъ, напр., точка C (т.-е. $AC=+3$, черт. 27); тогда между D и C не будетъ существовать ни одной соизмѣримой точки. Но это противорѣчитъ теоремѣ предыдущаго параграфа; значитъ, нельзя допустить, чтобы во 2-мъ классѣ существовало наименьшее число. Такъ же можно доказать, что въ 1-мъ классѣ нѣтъ наибольшаго числа.

Это свойство перестаетъ существовать, когда точка D, производящая раздѣленіе на классы, принадлежитъ сама къ соизмѣримымъ; тогда, отнеся соизмѣримое число, соотвѣтствующее этой точкѣ, ко 2-му классу (какъ это мы дѣлали), мы получимъ въ этомъ классѣ наименьшее число, именно то, которое соотвѣтствуетъ точкѣ D (если бы мы это число причислили къ 1-му классу, то въ этомъ классѣ было бы наибольшее число, именно, соотвѣтствующее точкѣ D).

Если вмѣсто точки D, о которой мы сейчасъ говорили, возьмемъ какую-нибудь другую точку, напр., точку C, то о ней, конечно, можно повторить все, сказанное о точкѣ D. Но классы чиселъ, производимые точкою C, будутъ не тѣ, которые производятся точкою D, а именно, тѣ числа, которыя соотвѣтствуютъ соизмѣримымъ точкамъ, лежащимъ между D и C, относятся ко 2-му классу въ раздѣленіи, производимомъ точкою D, тогда какъ въ раздѣленіи, производимомъ точкою C, они принадлежатъ 1-му классу. Значитъ каждой точкѣ прямой соотвѣтствуетъ свое опредѣленное раздѣленіе всѣхъ соизмѣримыхъ чиселъ на 2 класса.

4. Раздѣленіе соизмѣримыхъ чиселъ на 2 класса, производимое независимо отъ числовой прямой. Покажемъ на двухъ примѣрахъ, какъ иногда возможно, независимо отъ числовой прямой, распредѣлить всѣ соизмѣримыя числа на 2 класса, обладающіе указанными свойствами.

Примѣръ 1-й. Замѣтивъ, что не существуетъ никакого соизмѣримаго числа, квадратъ котораго равнялся бы 2-мъ, мы можемъ разбить всѣ соизмѣримыя числа на слѣдующіе два класса:

къ 1-му классу отнесемъ всѣ отрицательныя числа, число 0 и тѣ положительныя числа, квадраты которыхъ меньше 2-хъ;

ко 2-му классу отнесемъ всѣ тѣ положительныя числа, квадраты которыхъ больше 2-хъ.

Классы эти обладаютъ слѣдующими 2-мя свойствами:

1) каждое число 1-го класса меньше каждаго числа 2-го класса;

2) въ 1-мъ классѣ не существуетъ числа наибольшаго, во 2-мъ классѣ не существуетъ числа наименьшаго.

Первое свойство безполезно доказывать по его очевидности. Для доказательства второго свойства, допустимъ, что a есть какое угодно положительное число 1-го класса. Тогда $a^2<2$ и, слѣд., $2-a^2>0$. Замѣтивъ это, возьмемъ положительное число n настолько большимъ, чтобы оно удовлетворяло неравенству:

$$\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<2-a^2,$$

что, конечно, всегда возможно (мы можемъ, напр., выбрать n настолько большимъ, чтобы каждое изъ 2-хъ слагаемыхъ лѣвой части неравенства сдѣлалось меньше половины правой части). Тогда:

$$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n}<2,\text{ т.-е. }\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<2.$$

Отсюда видно, что соизмѣримое числа $a+\frac{1}{n}$ принадлежатъ тоже 1-му классу, какъ и число a. Значитъ, какое бы число a въ 1-мъ классѣ мы ни взяли, всегда возможно въ этомъ же классѣ найти число $a+\frac{1}{n}$, большее a; слѣд., наибольшаго числа въ 1-мъ классѣ не можетъ быть. Такъ же доказывается, что во 2-мъ классѣ не можетъ быть числа наименьшаго [1]).

Примѣръ 2. Образуемъ 2 класса соизмѣримыхъ чиселъ слѣдующимъ образомъ: къ 1-му классу отнесемъ всѣ отрицательныя числа, число 0 и всѣ положительныя числа, меньшія $+2$; ко 2-му классу отнесемъ само число $+2$ и всѣ большія числа. Классы эти, вмѣщая въ себѣ всѣ соизмѣримыя числа, обладаютъ, очевидно, свойствомъ, что каждое число 1-го класса меньше каждаго числа 2-го класса, но они не обладаютъ вторымъ изъ свойствъ, указанныхъ въ примѣрѣ 1-мъ, такъ какъ теперь во 2-мъ классѣ есть наименьшее число, именно $+2$.

---

[1]) Пусть A есть какое угодно число 2-го класса; тогда $A^2>2$ и, слѣд. $A^2-2>0$. Возьмемъ положительное число n настолько большимъ, чтобы $\frac{2A}{n}-\frac{1}{n^2}<A^2-2$; тогда: $2<A^2-\frac{2A}{n}+\frac{1}{n^2}$, т.-е. $2<\left(A-\frac{1}{n}\right)^2$. Слѣдовательно, во 2-мъ классѣ есть число $A-\frac{1}{n}$, меньшее, чѣмъ A. Значитъ, въ этомъ классѣ наименьшаго числа не можетъ быть.

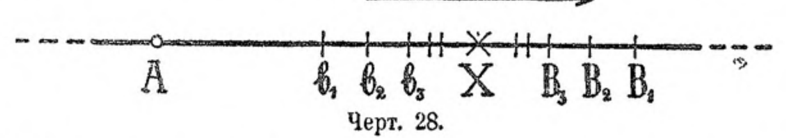
5. Допущенiе. Примемъ безъ доказательства, какъ необходимое допущенiе, слѣдующее предложенiе:

если какимъ-нибудь способомъ намъ удалось установить раздѣленiе всѣхъ соизмѣримыхъ чиселъ на такiе 2 класса — 1-й и 2-й —, что каждое число 1-го класса меньше каждаго числа 2-го класса;

и если, выбравъ произвольную единицу длины, мы отнесемъ, при помощи этой единицы, всѣ соизмѣримыя числа къ соотвѣтствующимъ точкамъ числовой прямой,

то на этой прямой существуетъ точка и только одна, которая служитъ границею, отдѣляющею область точекъ, соотвѣтствующихъ числамъ 1-го класса, отъ области точекъ, соотвѣтствующихъ числамъ 2-го класса.

Предложенiе это можно наглядно пояснить совершенно такъ же, какъ это мы дѣлали въ текстѣ алгебры при установленiи несоизмѣримаго значенiя



Черт. 28.

$\sqrt[m]{A}$ (§ 204). Пусть точки b_1, b_2, b_3 ... (и вообще точки b, черт. 28) числовой прямой будутъ соотвѣтствовать числамъ 1-го класса, а точки B_1, B_2, B_3 .. (и вообще точки B) будутъ соотвѣтствовать числамъ 2-го класса. Такъ какъ, по условiю, каждое число 1-го класса меньше каждаго числа 2-го класса, то каждая изъ точекъ b должна лежать лѣвѣе каждой изъ точекъ B. Вообразимъ, что всѣ точки b, а также и промежутки между ними, окрашены въ какой-нибудь одинаковый цвѣтъ, напр., въ зеленый, и всѣ точки B, а также и промежутки между ними, окрашены въ другой цвѣтъ, напр., въ красный. Такъ какъ точки b лежатъ лѣвѣе точекъ B, то зеленая часть прямой не можетъ захватить красную ея часть; слѣд., между этими частями должна быть какая-нибудь граница. Если допустимъ, что между зеленою и красною частями прямой лежитъ неокрашенный промежутокъ въ видѣ отрѣзка прямой, то мы должны тогда прiйти къ заключенiю, что на этомъ отрѣзкѣ нѣтъ ни одной соизмѣримой точки. Такъ какъ это невозможно, то такого допущенiя сдѣлать нельзя; остается допустить, что эти части раздѣляются *одной точкой* [1], напр., точкою X (черт. 28).

[1]) Значитъ, допущенiе состоитъ въ признанiи, что тамъ, гдѣ кончается зеленая часть прямой и начинается красная, находится *точка прямой*, и, слѣд., въ этомъ мѣстѣ прямая не имѣетъ *перерыва*; другими словами, допущенiе состоитъ въ признанiи того свойства прямой, которое наз. *непрерывностью*.

О точкѣ этой мы будемъ говорить, что она соотвѣтствуетъ данному раз дѣленію соизмѣримыхъ чиселъ, или что она опредѣляется имъ.

Будетъ ли точка X соизмѣримая, или несоизмѣримая, это зависитъ от того, какой изъ слѣдующихъ возможныхъ случаевъ имѣетъ мѣсто:

1) Если въ 1-мъ классѣ нѣтъ наибольшаго числа, но во 2-мъ классѣ ест наименьшее число (какъ это было въ примѣрѣ 2-мъ предыдущаго пара графа), то точка X будетъ соизмѣримая, именно та, которая соотвѣтствует наименьшему числу 2-го класса (числу $+2$ въ указанномъ примѣрѣ).

2) Если во 2-мъ классѣ нѣтъ наименьшаго числа, но въ 1-мъ классѣ ест наибольшее число, (какъ это было бы въ примѣрѣ 2-мъ предыдущаго пара графа, если бы число $+2$ мы причислили къ 1-му классу а не ко 2-му), т точка X окажется, какъ и въ первомъ случаѣ, соизмѣримой; именно, эт будетъ точка, соотвѣтствующая наибольшему числу въ 1-мъ классѣ.

Замѣтимъ, что этотъ случай можно всегда свести къ случаю 1-му, если мы условимся наибольшее число 1-го класса, если оно существуетъ, переносит во 2-й классъ; тогда въ 1-мъ классѣ не будетъ наибольшаго числа, а во 2-м классѣ окажется наименьшее число.

3) Если въ 1-мъ классѣ нѣтъ наибольшаго числа и во 2-мъ классѣ нѣт наименьшаго, то точка X должна быть несоизмѣримой. Дѣйстви тельно, если бы она была соизмѣримая, то ей соотвѣтствовало бы нѣкоторо соизмѣримое число k. Такъ какъ всѣ соизмѣримыя числа мы рас предѣлили на 2 класса, то это число k принадлежало бы либо 1-му класс и тогда оно было бы въ немъ наибольшимъ, либо ко 2-му классу и тогд въ немъ было бы наименьшимъ [1].

6. Опредѣленіе несоизмѣримаго числа. Условимся гово рить, что въ области соизмѣримыхъ чиселъ произведено сѣченіе (ил разрѣзъ), если какимъ-нибудь путемъ намъ удалось распредѣлить вс соизмѣримыя числа на такіе 2 класса, 1-й и 2-й, что каждое числ 1-го класса меньше каждаго число 2-го класса.

Всякому сѣченію, какъ мы видѣли, соотвѣтствуетъ на числовой прямо опредѣленная точка, несоизмѣримая, если въ 1-мъ классѣ нѣтъ наиболь шаго числа и во 2-мъ классѣ нѣтъ наименьшаго числа, и соизмѣримая, есл это условіе не выполнено.

Всякое сѣченіе (области соизмѣримыхъ чиселъ) мы будемъ называт числомъ, при чемъ то сѣченіе, которому на числовой прямой соотвѣт ствуетъ несоизмѣримая точка, мы назовемъ несоизмѣримымъ (ил

[1]) Невозможно допустить, чтобы одновременно въ 1-мъ классѣ существо вало наибольшее число a и во 2-мъ классѣ существовало наименьше число A. Дѣйствительно, если бы это такъ было, то всѣ соизмѣримыя числа заключающіяся между a и A (напр., среднее ариѳметическое этихъ чиселъ) не могли бы принадлежать ни 1-му, ни 2-му классу, что невозможно, так какъ классы наши, по условію, заключаютъ въ себѣ всѣ соизмѣримы числа.

ирраціональнымъ) числомъ, а то сѣченіе, которому на этой прямой соотвѣтствуетъ соизмѣримая точка, мы будемъ отождествлять съ соизмѣримымъ числомъ, соотвѣтствующимъ этой точкѣ, т.-е. съ тѣмъ числомъ, которое является наименьшимъ во 2-мъ классѣ (или наибольшимъ въ 1-мъ). Такъ, то сѣченіе, которое было нами указано въ примѣрѣ 1-мъ § 4, представляетъ собою, согласно нашему опредѣленію, несоизмѣримое число, а сѣченіе, указанное тамъ же въ примѣрѣ 2-мъ, мы будемъ считать тождественнымъ числу $+2$.

Мы будемъ принимать, что несоизмѣримое число, представляющее собою нѣкоторое сѣченіе, измѣряетъ тотъ несоизмѣримый отрѣзокъ прямой, концомъ котораго служитъ точка, соотвѣтствующая этому сѣченію. Такъ какъ этотъ отрѣзокъ больше соизмѣримаго отрѣзка измѣряемаго любымъ числомъ 1-го класса, и меньше соизмѣримаго отрѣзка, измѣряемаго любымъ числомъ 2-го класса, то мы примемъ, что **несоизмѣримое число, представляющее собою нѣкоторое сѣченіе, больше каждаго соизмѣримаго числа, входящаго въ 1-й классъ этого сѣченія, и меньше каждаго соизмѣримаго числа, входящаго во 2-й его классъ.**

Несоизмѣримое число обозначаютъ какимъ-нибудь знакомъ, напр., одною изъ буквъ греческаго алфавита: α, β, γ δ.. Иногда его обозначаютъ такимъ знакоположеніемъ: $\alpha=a/A$, въ которомъ a означаетъ область всѣхъ соизмѣримыхъ чиселъ, составляющихъ 1-й классъ, A означаетъ область всѣхъ соизмѣримыхъ чиселъ, составляющихъ 2-й классъ, и α—число, опредѣляемое сѣченіемъ (оно можетъ быть и соизмѣримое); вертикальная черта въ этомъ обозначеніи напоминаетъ, что вся область соизмѣримыхъ чиселъ **разсѣчена** на 2 класса a и A.

Несоизмѣримое число $\alpha=a/A$ считается **извѣстнымъ** (или **даннымъ**), если вполнѣ извѣстны его классы a и A, т.-е. если указанъ способъ, посредствомъ котораго о всякомъ соизмѣримомъ числѣ мы можемъ рѣшить, къ какому изъ классовъ a и A его надо отнести. Такъ, несоизмѣримое число, представляющее собою сѣченіе, указанное въ примѣрѣ 1-мъ § 4, можно считать извѣстнымъ, потому что о всякомъ соизмѣримомъ числѣ мы можемъ рѣшить, къ какому изъ 2-хъ классовъ этого сѣченія его отнести; напр., число 1,4 надо отнести къ 1-му классу, потому что $1,4^2=1,96$, а $1,96<2$; число же 1,5 надо отнести ко 2-му классу, такъ какъ $1,5^2=2,25$, а $2,5>2$.

7. Равенство и неравенство несоизмѣримыхъ чиселъ. Два несоизмѣримыя числа $\alpha=a/A$ и $\beta=b/B$ считаются равными, если они представляютъ собою **тождественныя** сѣченія, т.-е. если ихъ первые классы a и b, а также и вторые классы A и B, состоятъ соотвѣтственно изъ однихъ и тѣхъ же соизмѣримыхъ чиселъ.

Изъ двухъ неравныхъ несоизмѣримыхъ чиселъ то считается бо́льшимъ, у котораго 1-й **классъ обширнѣе** такъ, если классъ a содержитъ въ себѣ всѣ числа класса b и еще нѣкоторыя не входящія въ этотъ классъ (а входящія, слѣд., въ классъ B), то число $\alpha=a/A$ считается бо́льшимъ числа $\beta=b/B$

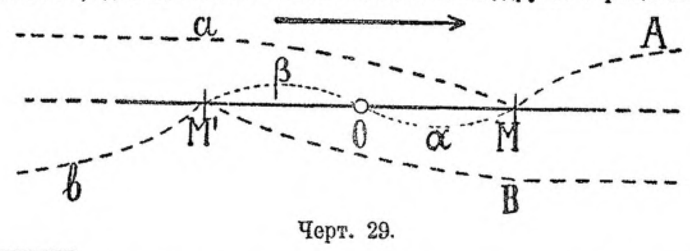
Если одно изъ сравниваемыхъ чиселъ, напр., $\alpha = a/A$, несоизмѣримое, а другое, напр., m, соизмѣримое, то ихъ относительная величина была уже опредѣлена нами ранѣе; именно: $\alpha > m$, если число m входитъ въ 1-й классъ (классъ a) сѣченія, и $\alpha < m$, если m входитъ во 2-й классъ (классъ A) сѣченія $\alpha = a/A$.

Изъ этихъ опредѣленій слѣдуетъ, что если числа α и β отнесены къ одной и той же числовой прямой, при одной и той же единицѣ длины, то на ней равнымъ числамъ соотвѣтствуетъ одна и та же точка, неравнымъ же числамъ соотвѣтствуютъ 2 различныя точки, при чемъ бо́льшему числу соотвѣтствуетъ правая точка, а меньшему—лѣвая. Это можно выразить другими словами такъ: равныя числа служатъ мѣрою равныхъ (по величинѣ и направленію) отрѣзковъ прямой, бо́льшему числу соотвѣтствуетъ бо́льшій отрѣзокъ прямой.

Легко усмотрѣть, что свойства равенствъ и неравенствъ, вѣрныя для чиселъ соизмѣримыхъ, остаются также вѣрными и для чиселъ несоизмѣримыхъ. Такъ, если $\alpha = \beta$, то и $\beta = \alpha$; если $\alpha = \beta$ и $\beta = \gamma$, то $\alpha = \gamma$, если $\alpha > \beta$, то $\beta < \alpha$; если $\alpha > \beta$ и $\beta > \gamma$, то $\alpha > \gamma$; и пр.

8. Положительныя и отрицательныя числа Число $\alpha = a/A$ называется положительнымъ, если оно больше нуля, и отрицательнымъ, если оно меньше нуля. Это значитъ, что въ первомъ случаѣ число 0 входитъ въ классъ a, а во второмъ случаѣ оно входитъ въ классъ A. На числовой прямой положительнымъ числамъ соотвѣтствуютъ точки, расположенныя направо отъ начальной точки, а отрицательнымъ числамъ—точки, лежащія налѣво отъ нея.

Два числа: $\alpha = a/A$ и $\beta = b/B$ называются противоположными, если на числовой прямой имъ соотвѣтствуютъ точки M и M' (черт. 29), расположенныя по разныя стороны отъ начальной точки O на разныхъ отъ нея разстояніяхъ; одно изъ этихъ чиселъ положительно, другое отрицательно [1]).



Черт. 29.

[1]) На черт. 29-мъ пунктирныя линіи, у которыхъ поставлены буквы a, A, b и B, проведены съ цѣлью напомнить значеніе этихъ буквъ; такъ, буква a, означаетъ совокупность всѣхъ соизмѣримыхъ чиселъ, которымъ соотвѣтствуютъ точки, лежащія налѣво отъ M; буква A означаетъ совокупность всѣхъ соизмѣримыхъ чиселъ, которымъ соотвѣтствуютъ точки, лежащія направо отъ M, и т. д.

Изъ чертежа не трудно усмотрѣть, что если прямую повернуть (въ плоскости чертежа) на 180° вокругъ точки O, то точки M и M' помѣняются мѣстами, а также помѣняются мѣстами классы: b съ A и B съ a. Изъ этого слѣдуетъ, что если числа $\alpha = a/A$ и $\beta = b/B$ противоположны, то классы a и B состоятъ изъ чиселъ, противоположныхъ другъ другу, а также и классы A и b. Это можно выразить письменно такъ: если $\alpha = a/A$, то число, противоположное α, есть $-A/-a$. Число, противоположное α, выражаютъ также и такъ: $-\alpha$.

9. Приближенныя значенія несоизмѣримаго числа. Приближеннымъ значеніемъ (или просто приближеніемъ) несоизмѣримаго числа $\alpha = a/A$, съ точностью до $\frac{1}{n}$ (n цѣлое положительное число), называется каждая изъ двухъ дробей: $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$ (x цѣлое число), между которыми заключается число α; меньшая изъ этихъ дробей наз. приближеніемъ съ недостаткомъ, а бо́льшая—съ избыткомъ. При $n=1$ эти приближенія точны до цѣлой единицы.

Такъ какъ приближеніе съ недостаткомъ есть соизмѣримое число, меньшее α, а приближеніе съ избыткомъ—соизмѣримое число, бо́льшее α, то первое есть одно изъ чиселъ класса a, а второе—одно изъ чиселъ класса A; точнѣе сказать: первое есть наибольшее кратное доли $\frac{1}{n}$, заключающееся въ классѣ a, а второе—наименьшее кратное этой доли, содержащееся въ классѣ A.

10. Теорема. Для всякаго даннаго несоизмѣримаго числа можно найти его приближенія съ любою точностью

Док. Если число $\alpha = a/A$ дано, то это значитъ, что указанъ способъ, посредствомъ котораго о всякомъ соизмѣримомъ числѣ мы можемъ рѣшить, къ какому изъ двухъ классовъ: a или A оно принадлежитъ. Замѣтивъ это, положимъ что требуется найти приближенія этого даннаго числа съ точностью до $\frac{1}{n}$, гдѣ n есть какое угодно положительное цѣлое число. Для этого составимъ неограниченный въ обѣ стороны рядъ чиселъ:

$$\ldots -\frac{3}{n},\ -\frac{2}{n},\ -\frac{1}{n},\ 0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n}\ \ldots$$

Очевидно, что числа этого ряда, при достаточномъ удаленіи направо, могутъ превзойти любое число, какъ бы оно велико ни было, а при достаточномъ удаленіи налѣво, они могутъ сдѣлаться меньше любого числа, какъ бы оно мало ни было. Поэтому, испытывая эти числа съ цѣлью опредѣлить, къ какому классу сѣченія a/A каждое изъ нихъ относится, мы

непремѣнно дойдемъ до двухъ рядомъ стоящихъ чиселъ $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$ такихъ, что меньшее изъ нихъ окажется принадлежащимъ классу a (и слѣд., будетъ меньше α), а бо́льшее — классу A (и, слѣд., будетъ больше α). Это и будутъ искомыя приближенныя значенія съ точностью до $\frac{1}{n}$.

11. Слѣдствіе. Если дано сѣченіе a/A, то всегда возможно найти два такія числа, одно изъ класса A, другое изъ класса a, что разность между ними будетъ меньше любого даннаго положительнаго числа (какъ бы мало оно ни было).

Положимъ, напр., мы желаемъ, чтобы эта разность была меньше 0,01. Для этого найдемъ приближенныя значенія числа $\alpha=a/A$ съ точностью до такой дроби $\frac{1}{n}$, которая была бы меньше 0,01 (напр., до 0,001). Тогда мы будемъ имѣть 2 числа: одно $\frac{x+1}{n}$, принадлежащее классу A, другое $\frac{x}{n}$, принадлежащее классу a, и такія, что разность между ними менѣе 0,01.

Замѣчаніе. Приближенныя значенія двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ могутъ служить средствомъ для установленія равенства ихъ, какъ это было объяснено въ текстѣ алгебры (§ 200).

12. Десятичныя приближенія. Чаще всего приходится находить приближенія даннаго числа съ точностью до какой-нибудь десятичной доли единицы. Для примѣра найдемъ съ точностью до 0,001 приближенія того несоизмѣримаго числа, о которомъ мы уже неоднократно говорили, именно числа $\alpha=a/A$, у котораго 1-й классъ a состоитъ изъ всѣхъ отрицательныхъ соизмѣримыхъ чиселъ, числа 0 и тѣхъ положительныхъ соизмѣримыхъ чиселъ, которыхъ квадраты меньше 2 хъ, а 2 й классъ A включаетъ въ себѣ всѣ положительныя соизмѣримыя числа, квадраты которыхъ больше 2-хъ. Для уменьшенія числа испытаній будемъ вести нахожденіе приближеній въ такой послѣдовательности: сначала найдемъ приближенія съ точностью до 1, потомъ съ точностью до 0,1, затѣмъ до 0,01 и, наконецъ, до 0,001.

Такъ какъ $1^2<2<2^2$, то число 1 принадлежитъ первому классу, а число 2—второму классу; поэтому $1<\alpha<2$ Значитъ, числа 1 и 2 суть приближенія α съ точностью до 1.

Чтобы найти теперь приближенія α съ точностью до 0,1 достаточно испытать только рядъ чиселъ:

1,1; 1,2; 1,3... 1,9,

такъ какъ 1 и всѣ числа, меньшія 1, принадлежатъ 1-му классу, а 2 и всѣ числа, бо́льшія 2-хъ, относятся ко 2-му классу. Возьмемъ изъ указаннаго ряда чиселъ какое-нибудь одно, напр., среднее 1,5, и испытаемъ его. Такъ

какъ $1{,}5^2=2{,}25$, что больше 2-хъ, то число 1,5 (и всѣ бо́льшія) относятся къ 2-му классу. Слѣдовательно, теперь надо испытать только числа: 1,1; 1,2; 1,3; 1,4. Находя квадраты этихъ чиселъ, видимъ, что всѣ они меньше 2-хъ; значитъ: $1{,}4<\alpha<1{,}5$. Поэтому каждое изъ чиселъ 1,4 и 1,5 есть приближенiе α съ точностью до 0,1.

Чтобы найти теперь приближенія съ точностью до 0,01, достаточно испытать рядъ чиселъ:

$$1{,}41;\ 1{,}42;\ 1{,}43; \ldots 1{,}49.$$

Такъ какъ $1{,}41^2=1{,}9881<2$, а $1{,}42^2=2{,}0164>2$, то $1{,}41<\alpha<1{,}42$. Наконецъ, чтобы найти приближенія до 0,001, достаточно испытать числа:

$$1{,}411;\ 1{,}412;\ 1{,}413; \ldots 1{,}419.$$

Возвысивъ въ квадратъ среднее число 1,415, получаемъ больше 2-хъ. Значитъ, остается подвергнуть испытанію первыя 4 числа. Оказывается, что $1{,}414^2<2$ Значитъ: $1{,}414<\alpha<1{,}415$, и поэтому каждое изъ чиселъ: 1,414 и 1,415 есть искомое приближенное значеніе числа α съ точностью до 0,001[1].

Теперь можно было бы находить приближенія числа α съ точностью до 0,0001, затѣмь съ точностью до 0,00001 и т. д. При этомъ, какъ видно изъ самаго способа нахожденія, всѣ десятичные знаки приближенія съ недостаткомъ съ точностью до $\frac{1}{10^n}$ переходятъ безъ измѣненія и въ приближеніе съ недостаткомъ съ точностью до $\frac{1}{10^{n+1}}$, при чемъ къ знакамъ этимъ добавляется еще одинъ новый знакъ (который иногда можетъ оказаться и нулемъ). Приближенія съ избыткомъ получаются изъ соотвѣтствующихъ приближеній съ недостаткомъ посредствомъ усиленія послѣдняго десятичнаго знака на 1.

Беря изъ двухъ найденныхъ приближеній только одно съ недостаткомъ, мы можемъ написать: $\alpha=1{,}414\ldots$ Точки, поставленныя послѣ найденныхъ цыфръ, означаютъ, что къ этимъ цыфрамъ можно было бы находить и слѣдующія.

---

[1]) Замѣтимъ, что приближенія взятаго нами числа α мы могли бы найти тѣмъ способомъ, который указывается въ алгебрѣ для нахожденія приближенныхъ квадратныхъ корней изъ 2 хъ (§ 179). Въ самомъ дѣлѣ, согласно опредѣленію, приближенные квадратные корни изъ 2-хъ, съ точностью до $\frac{1}{n}$, суть такія числа $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, которыя удовлетворяютъ неравенству $\left(\frac{x}{n}\right)^2<2<\left(\frac{x+1}{n}\right)^2$; слѣд., $\frac{x}{n}<\alpha<\frac{x+1}{n}$. Мы однако нарочно примѣнили въ текстѣ другой общій пріемъ съ цѣлью на примѣрѣ показать, какъ имъ слѣдуетъ пользоваться.

Подобнымъ же образомъ можно обратить въ десятичную дробь и всякое соизмѣримое число, но тогда, какъ извѣстно изъ ариѳметики, получается или конечная десятичная дробь, или безконечная періодическая. Если же мы обращаемъ въ десятичную дробь несоизмѣримое число, то въ результатѣ получается безконечная десятичная дробь, но не періодическая.

Дѣйствія надъ несоизмѣримыми числами.

(При строгомъ изложеніи теоріи несоизмѣримыхъ чиселъ мы должны къ тому, что было нами сказано о дѣйствіяхъ надъ этими числами въ текстѣ алгебры (см § 201), сдѣлать нѣкоторыя разъясненія и добавленія. Изложимъ ихъ въ порядкѣ дѣйствій).

13. Сложеніе и умноженіе. Данныя нами въ алгебрѣ опредѣленія этихъ дѣйствій полезно теперь выразить нѣсколько иначе, а именно такъ:

1) Сложить несоизмѣримыя числа α, β, γ..., значитъ найти число, которое больше суммы любыхъ соизмѣримыхъ чиселъ, соотвѣтственно меньшихъ чиселъ α, β, γ..., и меньше суммы любыхъ соизмѣримыхъ чиселъ, соотвѣтственно бо́льшихъ чиселъ α, β, γ.

2) Перемножить положительныя несоизмѣримыя числа α, β, γ.. значитъ найти число, которое больше произведенія любыхъ положительныхъ соизмѣримыхъ чиселъ, соотвѣтственно меньшихъ α, β, γ..., и меньше произведенія любыхъ соизмѣримыхъ чиселъ, соотвѣтственно бо́льшихъ α, β, γ...

Докажемъ, что искомое число, о которомъ говорится въ каждомъ изъ этихъ 2-хъ опредѣленій, существуетъ и притомъ только одно при всякихъ данныхъ числахъ α, β, γ.. Для простоты мы ограничимся разсмотрѣніемъ случая, когда данныхъ чиселъ только два.

Предварительно замѣтимъ, что любое соизмѣримое число, меньшее даннаго несоизмѣримаго, есть число, взятое изъ 1-го класса, а любое соизмѣримое число, бо́льшее даннаго несоизмѣримаго, есть число, взятое изъ 2-го класса сѣченія, опредѣляющаго это несоизмѣримое число.

Пусть намъ даны два несоизмѣримыя числа: $\alpha = a/A$ и $\beta = b/B$ Условимся—всякое число, которое можетъ быть получено сложеніемъ любого числа изъ класса a съ любымъ числомъ изъ класса b. называть числомъ „вида $a+b$"; подобно этому, всякое число, которое можетъ быть получено сложеніемъ любого числа изъ класса A съ любымъ числомъ изъ класса B, мы будемъ называть числомъ „вида $A+B$". Замѣтивъ это, составимъ слѣдующіе 2 класса соизмѣримыхъ чиселъ: къ 1-му классу (назовемъ его c) отнесемъ всѣ числа вида $a+b$ и всѣ меньшія какого-либо изъ этихъ чиселъ; ко второму классу (обозначимъ его C) отнесемъ всѣ числа вида $A+B$ и

всѣ бóльшія какого-либо изъ этихъ чиселъ [1]). Легко убѣдиться, что классы эти обладаютъ слѣдующими 3-мя свойствами:

1°, каждое число класса c меньше каждаго числа класса C (потому что каждое a меньше каждаго A и каждое b меньше каждаго B);

2°, въ классѣ c нѣтъ наибольшаго числа, въ классѣ C нѣтъ наименьшаго числа (такъ какъ, если α и β числа несоизмѣримыя, то нѣтъ наибольшихъ a и b и нѣтъ наименьшихъ A и B);

3°, всегда возможно найти такое число C_1, изъ класса C и такое число c_1 изъ класса c, что разность C_1-c_1 будетъ какъ угодно мала.

Дѣйствительно, если допустимъ, что $C_1=A_1+B_1$ и $c_1=a_1+b_1$, гдѣ A_1, B_1, a_1 и b_1 суть какія-либо числа соотвѣтственно изъ классовъ A, B, a и b, то

$$C_1-c_1=(A_1+B_1)-(a_1+b_1)=(A_1-a_1)+(B_1-b_1).$$

По свойству сѣченій a/A и b/B каждая изъ разностей: A_1-a_1 и B_1-b_1 можетъ быть сдѣлана какъ угодно малой (§ 11 этого приложенія); слѣд., и сумма этихъ разностей (а потому и число C_1-c_1) можетъ быть сдѣлана какъ угодно малой.

Разсмотримъ теперь такіе 2 возможные случая:

1) Пусть классы c и C_1 включаютъ въ себѣ всѣ соизмѣримыя числа. Тогда, вслѣдствіе свойства 1°, они образуютъ сѣченіе c/C, представляющее собою нѣкоторое единственное число γ, которое, вслѣдствіе свойства 2°, должно быть несоизмѣримымъ. Но несоизмѣримое число $\gamma=c/C$ больше каждаго числа изъ класса c и меньше каждаго числа изъ класса C, т.-е. оно больше каждаго числа вида $a+b$ и меньше каждаго числа вида $A+B$, слѣд., оно и есть то число, которое мы опредѣлили, какъ сумму $\alpha+\beta$.

2) Пусть классы c и C включаютъ въ себѣ не всѣ соизмѣримыя числа. Изъ способа образованія этихъ классовъ слѣдуетъ, что тѣ соизмѣримыя числа, которыя не входятъ ни въ классъ c, ни въ классъ C, должны быть больше всякаго числа изъ класса c и меньше всякаго числа изъ класса C. Докажемъ, что такихъ чиселъ не можетъ быть больше одного. Допустимъ, что существуютъ 2 соизмѣримыхъ числа N и $N_1>N$, которыя превосходятъ всѣ числа класса c и меньше всѣхъ чиселъ класса C. Тогда, очевидно, разность между любымъ числомъ изъ класса C и любымъ числомъ изъ класса c должна быть больше разности N_1-N. Такъ какъ это противорѣчитъ свойству 3° классовъ c и C, то, значитъ, такого допущенія сдѣлать нельзя. Итакъ, если случится, что

[1]) Дополненія: „всѣ меньшія какого-либо изъ этихъ чиселъ" и „всѣ бóльшія какого-либо изъ этихъ чиселъ", строго говоря, излишни, такъ какъ можно доказать, что всякое соизмѣримое число, меньшее какого-либо числа вида $a+b$, есть само число вида $a+b$, и всякое соизмѣримое число, бóльшее какого-либо числа вида $A+B$, есть число вида $A+B$. Дополненія эти мы и сдѣлали только для того, чтобы не тратить ни времени, ни мѣста на это доказательство.

наши классы вмѣщаютъ въ себѣ не всѣ соизмѣримыя числа, то тогда внѣ классовъ стоитъ только одно соизмѣримое число, которое больше всякаго числа вида $a+b$ и меньше всякаго числа вида $A+B$, это соизмѣримое число и есть сумма $\alpha+\beta$.

Докажемъ теперь существованіе числа, которое мы опредѣлили, какъ произведеніе положительныхъ несоизмѣримыхъ чиселъ $\alpha=a/A$ и $\beta=b/B$. Обозначивъ буквами a' и b' какія угодно положительныя числа, взятыя соотвѣтственно изъ классовъ a и b (и, слѣд. соотвѣтственно меньшія чиселъ α и β), составимъ 2 класса соизмѣримыхъ чиселъ слѣдующимъ образомъ: къ одному классу (обозначимъ его c) отнесемъ всѣ числа вида $a'b'$, и всѣ меньшія любого изъ такихъ чиселъ (слѣд., между прочимъ всѣ отрицательныя соизмѣримыя числа и число 0); къ другому классу C отнесемъ всѣ числа вида AB и бо́льшія какого-либо изъ этихъ чиселъ [1]). Классы эти обладаютъ тѣми же 3-мя свойствами, какія мы указали выше для классовъ, образованныхъ для доказательства существованія суммы $\alpha+\beta$. Первыя два свойства почти очевидны; третье можно доказать такъ. Пусть $C_1=A_1B_1$ есть какое-нибудь число изъ класса C и $c_1=a_1b_1$ какое-нибудь число изъ класса c, положимъ еще, что $A_1-a_1=p$ и $B_1-b_1=q$. Тогда:

$$C_1-c_1=A_1B_1-a_1b_1=(a_1+p)(b_1+q)-a_1b_1=b_1p+a_1q+pq.$$

Возьмемъ какое-нибудь соизмѣримое число M, которое было бы больше каждаго изъ чиселъ α и β; оно будетъ, и подавно, больше каждаго изъ чиселъ a_1 и b_1. Поэтому

$$C_1-c_1<Mp+Mq+pq \quad \text{т.-е} \quad C_1-c_1<M(p+q)+pq.$$

Такъ какъ по свойству сѣченій (§ 11) числа $p=A_1-a_1$ и $q=B_1-b_1$ могутъ сдѣлаться какъ угодно малыми, то правая часть послѣдняго неравенства, а слѣд., и его лѣвая часть, можетъ быть также сдѣлана какъ угодно малой.

Во всемъ дальнѣйшемъ доказательство для произведенія $\alpha\beta$ совершенно одинаково съ изложеннымъ выше доказательствомъ для суммы $\alpha+\beta$.

Замѣчанія. 1°. Опредѣленія сложенія и умноженія несоизмѣримыхъ чиселъ не находятся въ противорѣчіи съ опредѣленіями этихъ дѣйствій для чиселъ соизмѣримыхъ; напр., сумма $m+n$ соизмѣримыхъ чиселъ, конечно, болѣе суммы любыхъ соизмѣримыхъ чиселъ, соотвѣтственно меньшихъ m и n, и меньше суммы любыхъ соизмѣримыхъ чиселъ, соотвѣтственно бо́льшихъ m и n. Но само собою разумѣется, что если соизмѣримыя числа m и n даны, не какъ сѣченія, то дѣйствія надъ ними производятся независимо отъ указанныхъ опредѣленій.

2°. Если нѣкоторыя изъ данныхъ чиселъ соизмѣримыя, а другія несоизмѣримыя, то хотя указанныя выше опредѣленія сложенія и умноженія примѣнимы и въ этомъ случаѣ, однако ихъ полезно тогда нѣсколько

[1]) Здѣсь можно сдѣлать то же замѣчаніе, какое мы сдѣлали въ выноскѣ на предыдущей страницѣ.

упростить (какъ это было нами указано въ алгебрѣ, § 201); напр., если $\alpha=a/A$ есть число несоизмѣримое, а m число соизмѣримое, то сумма $\alpha+m$ есть число, бо́льшее каждой суммы вида $a+m$ и меньшее каждой суммы вида $A+m$. Въ частности, напр., $\alpha+0=\alpha$, $\alpha \cdot 1=\alpha$.

3. Произведеніе, въ которомъ какой-нибудь сомножитель есть нуль, принимается, по опредѣленію, равнымъ 0.

14. Основныя свойства сложенія и умноженія. Эти свойства для несоизмѣримыхъ чиселъ остаются тѣ же самыя, какія были указаны для чиселъ соизмѣримыхъ, что можно для каждаго свойства доказать такъ, какъ мы это сейчасъ сдѣлаемъ для распредѣлительнаго свойства умноженія. Пусть α, β, γ будутъ положительныя несоизмѣримыя числа; требуется доказать, что

$$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma.$$

Обозначимъ буквами a, b, c любыя соизмѣримыя положительныя числа, соотвѣтственно меньшія чиселъ α, β, γ, и буквами A, B, C любыя соизмѣримыя числа, соотвѣтственно бо́льшія чиселъ α, β, γ. Тогда, согласно опредѣленіямъ сложенія и умноженія, лѣвая часть доказываемаго равенства представляетъ собою число, бо́льшее каждаго числа вида $(a+b)c$ и меньшее каждаго числа вида $(A+B)C$, правая же часть того же равенства есть число, бо́льшее каждаго числа вида $ac+bc$ и меньшее каждаго числа вида $AC+BC$. Но любое число вида $(a+b)c$, согласно распредѣлительному свойству умноженія въ примѣненіи къ соизмѣримымъ числамъ, есть также и число вида $ac+bc$, и любое число вида $(A+B)C$ есть также и число вида $AC+BC$; слѣд., обѣ части доказываемаго равенства представляютъ собою одно и то же число и потому равенство это вѣрно.

15. Возвышеніе въ степень. Пусть α есть какое-нибудь положительное несоизмѣримое число и $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ какія угодно положительныя соизмѣримыя числа, меньшія α, а $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ какія угодно соизмѣримыя числа, бо́льшія α. Тогда выраженіе α^n, представляющее собою, *по опредѣленію, произведеніе n одинаковыхъ сомножителей:* $\alpha\alpha\alpha \ldots \alpha$, есть нѣкоторое число γ, которое, согласно опредѣленію умноженія, больше каждаго произведенія $a_1a_2a_3 \ldots a_n$ и меньше каждаго произведенія $A_1A_2A_3 \ldots A_n$. Докажемъ теперь предложеніе, принятое нами въ курсѣ алгебры безъ доказательства (§ 201, 3°), а именно, что это число γ есть въ то же время такое число γ', которое больше n-ой степени любого положительнаго соизмѣримаго числа a, меньшаго α, и меньше n-ой степени любого соизмѣримаго числа A, бо́льшаго α. Дѣйствительно:

число γ должно быть больше каждой степени a^n, потому что степень эта представляетъ собой частный случай произведенія $a_1a_2 \ldots a_n$ (тотъ случай, когда всѣ эти сомножители равны), а число γ, по опредѣленію, больше всякаго такого произведенія;

обратно, число γ' должно быть больше каждаго произведенія $a_1a_2 \ldots a_n$,

потому что это произведенie не больше n-й степени наибольшаго изъ чиселъ $a_1, a_2, \ldots a_n$, а число γ', по опредѣленiю, больше n-й степени любого изъ этихъ чиселъ.

Такъ же убѣждаемся, что число γ должно быть меньше каждой степени A^n, и, обратно, число γ' должно быть меньше каждаго произведенiя $A_1 A_2 \ldots A_n$.

Отсюда слѣдуетъ, что $\gamma = \gamma'$, и такъ какъ, по свойству умноженiя, число γ существуетъ только одно, то и число γ' также должно быть единственнымъ.

16. Вычитанie. Данныя нами въ курсѣ алгебры (§ 201, 4°) опредѣленiя обратныхъ дѣйствiй: вычитанiя, дѣленiя и извлеченiя корня (одинаковыя для чиселъ соизмѣримыхъ и несоизмѣримыхъ) не требуютъ какихъ-либо измѣненiй или дополненiй. Намъ нужно только доказать, что тѣ правила вычитанiя (§ 23) и дѣленiя (§ 41), которыя были указаны раньше для чиселъ соизмѣримыхъ, примѣнимы вполнѣ и къ числамъ несоизмѣримымъ.

Общее правило вычитанiя. Чтобы вычесть какое нибудь число, достаточно къ уменьшаемому приложить число, противоположное вычитаемому.

Требуется доказать, что $\alpha - \beta = \alpha + \beta'$, если β' есть число, противоположное β. Для доказательства найдемъ сумму: $(\alpha + \beta') + \beta$, которую, согласно сочетательному свойству сложенiя, можно написать такъ: $\alpha + (\beta' + \beta)$ Докажемъ, что $\beta + \beta' = 0$. Если $\beta = b/B$, то, какъ мы видѣли (§ 8 этого прил.), $\beta' = -B/-b$. Тогда, по опредѣленiю сложенiя, сумма $\beta + \beta'$ есть число, бóльшее каждаго числа вида $b + (-B) = b - B$, и меньшее каждаго числа вида $B + (-b) = B - b$ Такъ какъ всякое b меньше всякаго B, и, кромѣ того, разность $B - b$ можетъ быть какъ угодно мала и какъ угодно велика, то числа вида $b - B$ суть всѣ отрицательныя соизмѣримыя числа, а числа вида $B - b$ суть всѣ положительныя соизмѣримыя числа: число же, бóльшее первыхъ и меньшее вторыхъ, есть только 0; значитъ, $\beta + \beta' = 0$. Тогда будемъ имѣть:

$$(\alpha + \beta') + \beta = \alpha + (\beta' + \beta) = \alpha + 0 = \alpha.$$

Слѣдовательно, согласно опредѣленiю вычитанiя, разность $\alpha - \beta$ дѣйствительно равна суммѣ $\alpha + \beta'$.

Другое опредѣленie вычитанiя. Пусть $\alpha = a/A$ и $\beta = b/B$; тогда $\alpha' = -B/-b$, и потому сумма $\alpha + \beta'$ есть число, бóльшее каждаго числа вида $a + (-B) = a - B$ и меньшее каждаго числа вида $A + (-b) = A - b$. Слѣдовательно, мы можемъ вычитанie опредѣлить и такъ:

вычесть изъ числа $\alpha = a/A$ число $\beta = b/B$ значитъ найти число, бóльшее любого числа вида $a - B$ и меньшее любого числа вида $A - b$.

Слѣдствie. Допустимъ, что $\alpha > \beta$. Это значитъ, что классъ a обширнѣе класса b, т.-е. что въ классѣ a встрѣчаются и такiя числа, которыя не

входятъ въ классъ b, а входятъ, слѣд., въ классъ B. Тогда, очевидно, среди чиселъ вида $a - B$ находится также и число 0; вслѣдствіе этого разность $\alpha - \beta$, которая больше всякаго числа вида $a - B$, должна быть больше нуля, т.-е. эта разность есть число положительное.

Допустимъ, что $\alpha < \beta$. Это значитъ, что классъ b обширнѣе класса a, т.-е. что въ классѣ b встрѣчаются и такія числа, которыя не входятъ въ классъ a, а входятъ, слѣд., въ классъ A. Въ такомъ случаѣ, очевидно среди чиселъ вида $b - A$ находится также и число 0. Поэтому разность $\alpha - \beta$, которая меньше всякаго числа вида $b - A$, должна быть также меньше нуля, т.-е. эта разность есть число отрицательное.

Отсюда слѣдуетъ обратное заключеніе: если $\alpha - \beta > 0$, то $\alpha > \beta$ и если $\alpha - \beta < 0$, то $\alpha < \beta$.

Такимъ образомъ, это соотношеніе между разностью двухъ чиселъ и ихъ относительной величиной, которое въ области соизмѣримыхъ чиселъ служитъ опредѣленіемъ понятій „больше" и „меньше", остается примѣнимымъ и къ несоизмѣримымъ числамъ. Вслѣдствіе этого всѣ тѣ свойства неравенствъ, которыя основаны на этомъ соотношеніи (§ 259), примѣнимы и къ числамъ несоизмѣримымъ. Такъ:

1) если $\alpha > \beta$ и $\gamma \geqslant \delta$, то $\alpha + \gamma > \beta + \delta$;

2) если $\alpha > \beta$ и m положительное число, то $\alpha m > \beta m$;

3) если $\alpha > \beta$ и m отрицательное число, то $\alpha m < \beta m$, и пр.

17. Дѣленіе. Чтобы показать примѣнимость къ несоизмѣримымъ числамъ правила дѣленія, указаннаго прежде для чиселъ соизмѣримыхъ (§ 41), мы должны предварительно установить, что называется числомъ, обратнымъ несоизмѣримому числу α, и указать нѣкоторыя свойства его.

Обратное число. Предположимъ сначала, что несоизмѣримое число $\alpha = a/A$ положительно. Обозначимъ буквою a' любое положительное число изъ класса a. Тогда обратнымъ по отношенію къ α наз число, бо́льшее любого числа вида $\frac{1}{A}$, и меньшее любого числа вида $\frac{1}{a'}$. Для доказательства существованія такого числа (и притомъ единственнаго) составимъ 2 класса соизмѣримыхъ чиселъ слѣдующимъ образомъ: къ 1-му классу (обозначимъ его c) отнесемъ всѣ отрицательныя числа, число 0 и всѣ положительныя числа вида $\frac{1}{A}$, ко 2-му классу (обозначимъ его C) отнесемъ всѣ числа вида $\frac{1}{a'}$. Классы эти, включая въ себѣ всѣ отрицательныя соизмѣримыя числа и число 0, содержатъ также и всѣ положительныя соизмѣримыя числа. Дѣйствительно, какое бы положительное соизмѣримое число k мы ни взяли, его всегда можно представить подъ видомъ $k = \frac{1}{x}$, гдѣ x есть нѣкоторое со-

измѣримое положительное число Это число x, конечно, должно быть либо меньше α, либо больше α. Въ первомъ случаѣ число k должно быть однимъ изъ чиселъ вида $\frac{1}{a'}$ и, слѣд., должно относиться ко 2-му классу; во второмъ случаѣ число k будетъ однимъ изъ чиселъ вида $\frac{1}{A}$ и потому должно относиться къ 1-му классу Итакъ, классы c и C вмѣщаютъ въ себѣ всѣ соизмѣримыя числа. Кромѣ того, они обладаютъ слѣдующими 2 свойствами: 1) каждое число 1-го класса меньше каждаго числа 2-го класса (такъ какъ каждое A больше каждаго a'); 2) изъ чиселъ 1-го класса нѣтъ наибольшаго (такъ какъ изъ чиселъ A нѣтъ наименьшаго), изъ чиселъ 2-го класса нѣтъ наименьшаго (такъ какъ изъ чиселъ a' нѣтъ наибольшаго). Вслѣдствіе этого классы c и C образуютъ сѣченіе c/C, представляющее собою нѣкоторое несоизмѣримое число α', бо́льшее каждаго числа изъ класса c и меньшее каждаго числа изъ класса C и, слѣд, бо́льшее каждаго числа вида $\frac{1}{A}$ и меньшее каждаго числа вида $\frac{1}{a'}$. Это и есть то число, которое мы назвали обратнымъ числу α.

Если $\alpha<0$, то обратное число получится если возьмемъ число, обратное абсолютной величинѣ α, и поставимъ передъ нимъ знакъ —.

Число 0 не имѣетъ себѣ обратнаго числа.

Свойства обратнаго числа. 1° Если α' есть число, обратное α, то и α есть число, обратное α'.

Дѣйствительно, если $\alpha>0$, то α' есть число, бо́льшее каждаго числа вида $\frac{1}{A}$ и меньшее каждаго числа вида $\frac{1}{a'}$; тогда число α'', обратное α', должно быть числомъ, бо́льшимъ каждаго числа вида $1:\frac{1}{a'}=a'$ и меньшимъ каждаго числа вида $1:\frac{1}{A}=A$; значитъ, $\alpha''=\alpha$. Это равенство не нарушится и тогда, когда $\alpha<0$, потому что тогда и $\alpha''<0$, а абсолютныя величины этихъ чиселъ одинаковы.

2°. Произведеніе двухъ чиселъ, обратныхъ другъ другу, равно 1.

Дѣйствительно, если $\alpha>0$, то и $\alpha'>0$, и тогда произведеніе $\alpha\alpha'$ есть число, бо́льшее всякаго числа вида $a'.\frac{1}{A}=\frac{a'}{A}$ и меньшее всякаго числа вида $A.\frac{1}{a'}=\frac{A}{a'}$. Числа перваго вида — это всѣ положительныя соизмѣримыя числа, меньшія 1, а числа второго вида — это всѣ положительныя соизмѣримыя числа, бо́льшія 1; значитъ, $\alpha\alpha'=1$. Это равенство не нарушится и тогда, когда $\alpha<0$, потому что тогда и $\alpha'<0$, а произведеніе абсолютныхъ величинъ этихъ чиселъ равно 1.

Изъ равенства: $\alpha\alpha'=1$, по опредѣленію дѣленія, слѣдуетъ: $\alpha'=\frac{1}{\alpha}$; такимъ образомъ, и для несоизмѣримыхъ чиселъ остается вѣрнымъ, что число, обратное α, равно частному отъ дѣленія 1 на α.

Правило дѣленія. Чтобы раздѣлить α на β, достаточно α умножить на число β', обратное дѣлителю.

Въ самомъ дѣлѣ. $\alpha:\beta=\alpha\beta'$, потому что $(\alpha\beta').\beta=\alpha\beta\beta'$, что, согласно сочетательному свойству умноженія, равно $\alpha(\beta'\beta)$. По $\beta'\beta=1$ и $\alpha.1=\alpha$; значитъ, частное $\alpha:\beta$ дѣйствительно равно $\alpha\beta'$.

Другое опредѣленіе дѣленія. Пусть $\alpha=a/A$ и $\beta=b/B$ будутъ два положительныхъ несоизмѣримыхъ числа. Обозначимъ буквами a' и b' любыя положительныя числа соотвѣтственно изъ классовъ a и b. Такъ какъ число β', обратное β, больше каждаго числа вида $\frac{1}{B}$ и меньше каждаго числа вида $\frac{1}{b'}$, то частное $\alpha:\beta$, равное, какъ мы видѣли, произведенію $\alpha\beta'$, должно быть, согласно опредѣленію умноженія, больше любого числа вида $a'.\frac{1}{B}=\frac{a'}{B}$ и меньше любого числа вида $A.\frac{1}{b'}=\frac{A}{b'}$. Поэтому мы можемъ опредѣлить дѣленіе и такъ:

раздѣлить положительныя числа $\alpha=a/A$ на $\beta=b/B$ значитъ найти число, которое больше всякаго числа вида $a':B$ и меньше всякаго числа вида $A:b'$.

18. Извлеченіе корня. Для доказательства существованія $\sqrt[m]{A}$ при всякомъ положительномъ числѣ A (несоизмѣримомъ или соизмѣримомъ) не представляющемъ собою точной m-ой степени никакого соизмѣримаго числа, мы можемъ, съ точки зрѣнія теоріи сѣченій, разсуждать такъ. Разобьемъ область соизмѣримыхъ чиселъ на такіе 2 класса: къ 1-му классу (обозначимъ его c) отнесемъ всѣ отрицательныя числа, число 0 и тѣ положительныя, m—ая степень которыхъ меньше A, ко 2-му классу (обозначимъ его C) отнесемъ всѣ положительныя числа, m-ая степень которыхъ больше A. Классы эти, вмѣщая въ себѣ всѣ соизмѣримыя числа, обладаютъ, очевидно, свойствомъ, что каждое число 1-го класса меньше каждаго числа 2-го класса. Поэтому они образуютъ сѣченіе c,C, представляющее собою нѣкоторое положительное число $\gamma=c/C$[1]). Докажемъ, что m-ая степень этого числа равна A.

---

[1]) Можно теперь же доказать, что число это несоизмѣримое. Для этого достаточно обнаружить, что въ 1-мъ классѣ не существуетъ наибольшаго числа и во 2-мъ классѣ не существуетъ наименьшаго числа. Пусть a есть какое-нибудь положительное число, принадлежащее 1-му классу

Согласно свойству возвышенія въ степень (§ 15 этого приложенія), выраженіе γ^m есть то единственное число, которое больше m-ой степени любого соизмѣримаго положительнаго числа, меньшаго γ, и меньше m-ой степени любого соизмѣримаго числа, бóльшаго γ. Но всякое соизмѣримое число, меньшее γ, входитъ въ классъ c, и всякое соизмѣримое число, бóльшее γ, входитъ въ классъ C; классы же эти такъ нами составлены, что m-ая степень любого положительнаго числа, входящаго въ классъ c, меньше A, а m-ая степень любого числа, входящаго въ классъ C, больше A. Значитъ, то единственное число, которое представляетъ собою выраженіе γ^m, и есть число A. Такимъ образомъ: $\gamma^m=A$ и потому $\gamma=\sqrt[m]{A}$ Отсюда, конечно, слѣдуетъ, что γ есть число несоизмѣримое, такъ какъ, по условію, не существуетъ никакого соизмѣримаго числа, котораго m-ая степень равнялась бы числу A.

Замѣчаніе. Намъ остается еще развить и пополнить содержаніе § 284 „Элементарной алгебры", въ которомъ давалось понятіе о несоизмѣримыхъ показателяхъ и ихъ свойствахъ. Это нами сдѣлано въ другой книгѣ, именно въ „Началахъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій", изданія 3-е и слѣд.

Тогда $a^m>A$ и, слѣд., разность $A-a^m$ есть число положительное Возьмемъ положительное число n, удовлетворяющее слѣдующему неравенству:

$$\frac{ma^{m-1}}{n}+\frac{\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}}{n^2}+\frac{\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}}{n^3}+\cdots+\frac{1}{n^m}<A-a^m.$$

Для этого достаточно взять n настолько большимъ, чтобы каждое слагаемое суммы, стоящей въ лѣвой части этого неравенства, сдѣлалось меньшимъ числа $\frac{A-a^m}{n}$, что, конечно, возможно. Тогда:

$$a^m+\frac{ma^{m-1}}{n}+\frac{\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^m}<A,$$

что, согласно биному Ньютона, даетъ: $\left(a+\frac{1}{n}\right)^m<A$. Такимъ образомъ, оказывается, что какое бы число a въ 1-мъ классѣ мы ни взяли, въ этомъ классѣ всегда найдется еще бóльшее число. Значитъ, наибольшаго числа въ 1-мъ классѣ не можетъ быть Такъ же можно доказать, что наименьшаго числа во 2-мъ классѣ не можетъ быть.

Чтобы избѣжать этого громоздкаго доказательства, мы въ текстѣ оставляемъ вопросъ о характерѣ числа γ пока открытымъ.

ПРИЛОЖЕНІЕ 2.

Предѣлъ погрѣшности, происходящей отъ допущенія пропорціональности разностей между логариѳмами разностямъ соотвѣтствующихъ чиселъ.

При нахожденіи $Log(n+h)$ (§ 310) мы писали пропорцію: $\triangle : d = h : 1$, въ которой:

$$\triangle = Log(n+h) - Log\, n \text{ и } d = Log(n+1) - Log\, n.$$

Изъ этой пропорціи мы опредѣляли $\triangle = dh$. Такъ какъ въ дѣйствительности разности между логариѳмами не вполнѣ пропорціональны разностямъ между соотвѣтствующими числами, то выведенное изъ пропорціи равенство есть только приближенное. Опредѣлимъ предѣлъ погрѣшности, заключающейся въ этомъ равенствѣ; другими словами, опредѣлимъ верхній предѣлъ разности между точными величинами $\triangle$ и произведенія dh.

Средствами элементарной алгебры это выполнить очень затруднительно; но вопросъ рѣшается весьма просто при помощи выводимаго въ теоріи рядовъ равенства:

$$Log\,(1+x) = M\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right),$$

въ которомъ M есть модуль, служащій для перехода отъ натуральныхъ логариѳмовъ къ десятичнымъ (онъ равенъ дроби 0,43429448 . . .) и x — какое угодно число, абсолютная величина котораго не превосходитъ 1. Пользуясь этимъ равенствомъ, находимъ:

$$\triangle = Log(n+h) - Log\, n = Log\,\frac{n+h}{n} = Log\left(1 + \frac{h}{n}\right) =$$
$$= M\left(\frac{h}{n} - \frac{h^2}{2n^2} + \frac{h^3}{3n^3} - \frac{h^4}{4n^4} + \ldots\right).$$

Подобно этому получимъ:

$$d = Log\, n+1) - Log\, n = M\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \ldots\right);$$

$$dh = \left[Log(n+1) - Log\, n\right] h = M\left(\frac{h}{n} - \frac{h}{2n^2} + \frac{h}{3n^3} - \frac{h}{4n^4} + \ldots\right).$$

Изъ этихъ равенствъ находимъ:

$$\triangle - dh = M\left[\frac{h(1-h)}{2n^2} - \frac{h(1-h^2)}{3n^3} + \ldots\right].$$

Въ правой части этого равенства, внутри большихъ скобокъ, стоитъ знакопеременный рядъ, члены котораго по абсолютной величинѣ убываютъ; значитъ, рядъ этотъ представляетъ собою нѣкоторое положительное число, меньшее перваго члена ряда. Поэтому

$$\triangle - dh < M \cdot \frac{h(1-h)}{2n^2}.$$

Такъ какъ сумма множителей h и $1-h$ постоянна, то наибольшая величина произведенія $h(1-h)$ равна $\frac{1}{4}$ при $h=1-h$, кромѣ того, если мы разсматриваемъ числа, бо́льшія 1000, то тогда $n^2>10^6$ и потому

$$\triangle - dh < \frac{M}{4.2.10^6} = \frac{M}{8.10^6}.$$

Подставивъ вмѣсто M указанное выше число, найдемъ:

$$\triangle - dh < \frac{0{,}0542868\ldots}{10^6} = \frac{0{,}0054286\ldots}{10^5}.$$

Такъ какъ $\frac{1}{184}=0\ 00543\ldots$, то, значитъ:

$$0 < \triangle - dh < \frac{1}{184} \text{ стотысячной.}$$

Такимъ образомъ, принимая $\triangle = dh$, мы дѣлаемъ ошибку, меньшую $\frac{1}{184}$ стотысячной доли Столь ничтожная ошибка вообще не оказываетъ вліянія на 5-й десятичный знакъ мантиссы и потому на нее можно не обращать вниманія.

